Barycentrum

Martin Fraas

Definícia. (Vážený bod) *Dvojicu A, a, kde A je bod priestoru a a reálne číslo, nazveme váženým bodom a budeme ho značiť $A(a)$. Motiváciou môže byť napríklad popis hmotného bodu, ktorý je okrem polohy charakterizovaný svojou hmotnosťou.*

Definícia. (Barycentrum) *Barycentrom systému $\{A_1(a_1), \ldots, A_n(a_n)\}$, pre ktorý platí $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \neq 0$, nazývame vážený bod $G(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ taký, že $a_1\boldsymbol{GA_1} + a_2\boldsymbol{GA_2} + \cdots + a_n\boldsymbol{GA_n} = \boldsymbol{0}$.*

Príklad. Barycentrom systému $\{A(1), B(1), C(1)\}$ je ťažisko trojuholníka ABC s váhou 3.

Domluva. Vetšinou budeme písať iba barycentrum G, pričom váha bude zrejmá z kontextu a preto ju nebudeme vypisovať. A ono ak nás bude zaujímať iba poloha v priestore tak váha nebude dôležitá.

Veta. (1) *Barycentrum existuje pre každý systém vážených bodov a je určené jednoznačne.*

Otázka. Čo sa stane s barycentrom, ak $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$?

Nasleduje dôležitá veta, ktorá je základom práce s barycentrom. Myslím, že je intuitívne zrejmá a pri predstave hmotných bodov ju každý v prípade potreby používa. Je zaujímavé koľko netušených aplikácií má toto jednoduché tvrdenie.

Veta. (2) *Nech G je barycentrom systému $\{A_1(a_1), A_2(a_2), \ldots, A_n(a_n)\}$, $n \geq 3$ a nech pre $2 \leq p \leq n-1$ je $a_1 + \cdots + a_p \neq 0$. Potom je G tiež barycentrom systému $\{H(a_1 + a_2 + \cdots + a_p), A_{p+1}(a_{p+1}), \ldots, A_n(a_n)\}$, kde H je barycentrom systému $\{A_1(a_1), A_2(a_2), \ldots, A_n(a_n)\}$.*

Ako budeme vetšinou túto vetu využívať si ukážeme hneď na nasledujúcom príklade.

Príklad. Nech $ABCD$ je ľubovoľný konvexný štvoruholník. Označme R stred strany AB, S stred strany CD, L stred strany BC, K stred strany AD, M stred strany AC a N stred strany BD. Ukážte, že úsečky RS, KL a MN prechádzajú spoločným bodom O, ktorý je stredom každej z nich.

Na vyriešenie si stačí uvedomiť, že hladaným bodom O je barycentrum systému $\{A(1), B(1), C(1), D(1)\}$, ktoré je zároveň barycentrom troch systémov: $\{K(2), L(2)\}$, $\{R(2), S(2)\}$ i $\{N(2), M(2)\}$, keďže napríklad $N(2)$ je barycentrom $\{B(1), D(1)\}$.

Veta. (3) *Majme trojuholník ABC a ľubovolný bod M v rovine tohoto trojuholníka. Potom $M(P)$ je barycentrom systému $A(P_A)$, $B(P_B)$, $C(P_C)$, kde P, P_A, P_B, P_C sú po rade obsahy trojuholníkov ABC, MBC, MAC, MAB.*

Ukážeme, že z tejto vety ľahko plynie známa Čevova veta, ale samozrejme aj opačne z Čevovej vety sa predchádzajúci teorém dá bez problémov odvodiť. Ešte pripojím niekoľko príkladov na precvičenie.

Príklad 1. Daný je konvexný štvoruholník $ABCD$. S je stred úsečky BD, K bod úsečky AB taký, že $\boldsymbol{AK} = \frac{2}{3}\boldsymbol{AB}$, L bod úsečky CD taký, že $\boldsymbol{CL} = \frac{2}{3}\boldsymbol{CD}$ a M je stred úsečky KL. Dokážte, že body M, R a S ležia na jednej priamke.

Príklad 2. Daná je kocka $ABCDEFGH$ a body P, Q, K, L nasledovnými vzťahmi:

$$\boldsymbol{AP} = \frac{1}{3}\boldsymbol{AE}, \quad \boldsymbol{BQ} = \frac{1}{3}\boldsymbol{BG}, \quad \boldsymbol{AK} = \frac{1}{2}\boldsymbol{AB}, \quad \boldsymbol{EL} = \frac{1}{2}\boldsymbol{EG}.$$

Dokážte, že body P, Q, K, L ležia v jednej rovine.

Príklad 3. Daný je rovnobežnosten $ABCDEFGH$. Označme K ťažisko trojuholníka BED a L ťažisko trojuholníka FHC. Dokážte, že $|AK| = |KL| = |LG|$.

Literatúra.

• Obzory matematiky fyziky a informatiky 53, 54/1998, *Ivan Trenčanský, Peter Repáš* – Barycentrum ako prostriedok na riešenie niektorých planimetrických a stereometrických úloh.