Ofarbovanie grafov

Katka Quittnerová

V prednáške sa budeme venovať ofarbovaniu grafov, či už ich vrcholov alebo hrán. Prvá časť sa bude týkať Ramseyovej vety. V druhej by som chcela voľne nadviazať na ofarbovanie grafov z časti tohtoročného seriálu, jej znalosť však nie je nutná.

Ramseyova teória

Motivačný príklad. Na večierku sa stretlo 6 ľudí, každí dvaja sa buď poznajú alebo nepoznajú. Potom medzi nimi existujú 3 ľudia, medzi ktorými sa každí dvaja poznajú alebo každí dvaja nepoznajú.

V takejto verzii je úloha jednoduchá. Ak však chceme zistiť, koľko najmenej ľudí musí byť na večierku tak, aby sme medzi nimi vždy našli päticu tak, aby sa v rámci nej každí dvaja poznali alebo každí dvaja nepoznali, na našu otázku zatiaľ nikto nepozná odpoveď (ani za pomoci počítačov). Pozrime sa na tento problém trochu obecnejšie.

Veta. (Ramseyova pre grafy) *Pre každé n a r prirodzené existuje $N \in \mathbb{N}$ tak, že pri ľubovoľnom ofarbení hrán úplného grafu K_N pomocou r farieb existuje podgraf tohto grafu na n vrcholoch K_n, ktorého hrany majú rovnakú farbu.*

Špeciálne (pre $r = 2$) dostávame, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $N \in \mathbb{N}$ tak, že ľubovoľný graf na N vrcholoch obsahuje ako svoj podgraf úplný graf na n vrcholoch K_n alebo nezávislú množinu vrcholov veľkosti n.

Najmenšie číslo N také, že v grafe K_N vždy nájdeme úplný K_k alebo nezávislú množinu veľkosti l, značíme $N = R(k, l)$ (tieto čísla sa ešte dajú zobecniť, napr. pri ofarbovaní r farbami). Presné hodnoty sa však poznajú len pre $R(3, 3) = 6$, $R(3, 4) = 9$, $\ldots$, $R(3, 9) = 36$, $R(4, 4) = 18$, $R(4, 5) = 25$. Dosť. Čo sa týka odhadov, tak napr. $43 \leq R(5, 5) \leq 49$, ale o $R(10, 10)$ sa vie už len $798 \leq R(10, 10) \leq 23556$.

Úloha. Uhlopriečky pravidelného n-uholníka ofarbíme 2 farbami. Aké veľké musí byť n, aby vždy existoval jednofarebný trojuholník?

Farebnosť grafu

Definícia. *Nech G je graf. Ofarbením grafu G pomocou k farieb rozumieme každú funkciu $u : V \to \{1, 2, \ldots, k\}$ takú, že ak sú x a y vrcholy grafu G spojené hranou, potom $u(x) \neq u(y)$. Farebnosťou grafu G rozumieme najmenšie prirodzené číslo k, pre ktoré existuje ofarbenie grafu G pomocou k farieb. Značíme ju $\chi(G)$.*

Pozorovanie. $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, kde $\Delta(G)$ je maximálny stupeň vrcholov grafu G.

Pozorovanie. Ak G je k-regulárny, t. j. v každom indukovanom podgrafe grafu G existuje vrchol stupňa $\leq k$, potom $\chi(G) \leq k + 1$.

Veta. (Brooks) *Ak súvislý graf G nie je úplný ani kružnica nepárnej dĺžky, potom $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Veta. *Pre každé k existuje graf bez K_3, ktorého farebnosť je najmenej k.*

Vyberavost grafu

Pojem farebnosti trochu zobecníme, a to tak, že pre každý vrchol budeme mať zoznam (anglicky list) farieb, ktorými ho môžme ofarbiť. Tradičné ofarbenie k farbami potom dostaneme tak, že každému vrcholu priradíme ten istý zoznam $\{1, 2, \ldots k\}$.

Definícia. *Nech pre každý vrchol u grafu G je $L(u)$ zoznam farieb použiteľných pre tento vrchol. Listové L-ofarbenie grafu G je ofarbenie $f : V(G) \to \bigcup_{u \in V(G)} L(u)$ také, že $f(u) \in L(u)$ pre každé $u \in V(G)$ a $f(u) \neq f(v)$ pre každú hranu $uv \in E(G)$.*

Definícia. *Najmenšie číslo k, pre ktoré je pravda, že listové L-ofarbenie grafu G existuje pre každý systém L, v ktorom $|L(u)| \geq k$ pre všetky vrcholy $u \in V(G)$, sa nazýva vyberavosť (choosability) grafu G a značí sa $ch(G)$.*

Pozorovanie. Pre každý graf G platí

$$\chi(G) \leq ch(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Ak je G k-degenerovaný, potom $ch(G) \leq k + 1$.

Veta. (Thomassen) *Pre každý rovinný graf G platí $ch(G) \leq 5$.*

Vetu budeme dokazovať matematickou indukciou a ako to už býva, bude výhodnejšie dokazovať silnejšie tvrdenie:

Veta. *Nech G je vonkajšia triangulácia (t. j. existuje nakreslenie, v ktorom hranica vonkajšej steny je kružnica a každá vnútorná stena je trojuholník). Pri každom vrchole u nech je daný zoznam použiteľných farieb $L(u)$, pre ktorý platí*

(1) *Isté dva po sebe idúce vrcholy u, v na hranici vonkajšej steny majú zoznamy jednoprvkové a rôzne (alebo tieto vrcholy sú predfarbené rôznymi farbami);*

(2) *Všetky ostatné vrcholy na hranici vonkajšej steny majú zoznamy 3-prvkové;*

(3) *Zoznamy u vnútorných vrcholoch sú 5-prvkové.*

Potom existuje listové L-ofarbenie.

Veta. (Voigt) *Existuje rovinný graf, ktorý nie je 4-vyberavý.*

Hranová farebnosť

Ak nám zostane čas, môžme si povedať niečo aj o hranovej farebnosti grafu.

Definícia. *Hranovým grafom grafu G nazývame graf*

$$L(G) = (E(G), \{ef : e \cap f \neq \emptyset\}).$$

Hranovou farebnosťou grafu G rozumieme farebnosť jeho hranového grafu a značíme $\chi'(G) = \chi(L(G))$.

Pozorovanie. Hranová farebnosť je najmenší počet farieb, ktorými možno ofarbiť hrany grafu tak, aby zo žiadneho vrcholu nevychádzali dve hrany rovnakej farby.

Pozorovanie. $\Delta(G) \leq \chi'(G)$.

Veta. (Vizing) *Pre hranovú farenosť ľubovoľného grafu G platí $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.*