Barevnost grafu a její modifikace

David Opěla

Teorie grafů je jedno z nejbouřlivěji se rozvíjejících odvětví matematiky. Je to dáno jednak tím, že je poměrně mladá (kromě úplných začátků, které jsou spojeny se jménem Eulera, se jí začali matematici zabývat až okolo čtyřicátých let tohoto století), a také tím, že má mnoho aplikací v moderních disciplínách (algoritmy). Někteří z vás již vědí, co to je barevnost grafu, kterou se budeme zabývat. Jak už to tak v matematice bývá, mnohé pojmy se modifikují a zobecňují. A tak my si povíme něco o hranové barevnosti, a také o vybíravosti. Na mé přenášce (i s důkazy, které budou pochopitelné) se dozvíte velmi nové výsledky (z devadesátých let), což je, podle mne, velmi vzácná příležitost. Tak teď již víte, kterou přednášku si jistě nenecháte ujít.

Některé pojmy z teorie grafů

Nejprve si samozřejmě řekneme, co to vlastně graf je, a hned k tomu přidáme pár dalších pojmů.

Definice. *Graf je uspořádaná dvojice (V, E), kde $E \subset \binom{V}{2}$, přičemž V je množina vrcholů, které si představujeme jako body, a E je množina hran — ty si můžeme představit jako čáry spojující vždy dva body mezi sebou. Pokud graf označíme nějakým písmenkem (např. G), pak $V(G)$, resp. $E(G)$, je množina jeho vrcholů, resp. hran. Stupeň vrcholu je počet hran, jež z něho vycházejí. Graf je rovinný, pokud lze nakreslit do roviny tak, aby se žádné dvě hrany nekřížily.*

Nyní zadefinujeme pojem homomorfismu grafu, který už nám umožní definovat barevnost grafu. Mimochodem, homomorfismus je velmi obecný strukturní pojem, který prochází naskrz celou matematikou a dá se definovat velmi obecně (i když se často definuje pro každou strukturu zvlášť).

Definice. *Buďte G a H grafy. Pak zobrazení $f : V(G) \to V(H)$, které splňuje $\forall x, y \in V(G) \quad (x, y) \in E(G) \Rightarrow (f(x), f(y)) \in E(H)$, se nazývá homomorfismus. Tedy pokud nějaké dva vrcholy spojovala hrana v původním grafu, spojuje je i v jeho obrazu.*

Nyní již jednoduše zadefinujeme barevnost grafu.

Definice. *Nechť G je graf. Pak barevnost grafu G je $\chi(G) = \min\{k \in \mathbb{N} : \exists\ f : G \to K_k$ homomorfismus$\}$, kde K_k značí úplný graf na k vrcholech, tzn. graf, v němž jsou každé dva (různé) vrcholy spojeny hranou. Barevnost grafu je tedy nejmenší počet* *barev, kterými lze obarvit graf tak, že každé dva vrcholy spojené hranou mají různou barvu.*

Definice. *Ke grafu G definujeme hranový graf $L(G)$ tak, že hrany původního grafu budou vrcholy nového, a budou spojeny hranou, pokud v původním grafu měly ony hrany společný vrchol. Tedy $V(L(G)) = E(G)$ a $(e_1, e_2) \in E(L(G)) \Leftrightarrow |e_1 \cap e_2| = 1$.*

Definice. *Hranová barevnost grafu je barevnost jeho hranového grafu, tedy $\chi_e(G) = \chi(L(G))$.*

Nyní uvažujme, že ke každému vrcholu je dán seznam barev, jimiž jej můžeme obarvit. Formálně $L : V(G) \to \mathcal{P}(B)$, kde B je množina barev a $\mathcal{P}(B)$ značí množinu všech jejích podmnožin. Obarvení $f : V \to B$ je *dobré*, pokud každé dva vrcholy spojené hranou mají různou barvu. Tedy pokud $\forall x \in V(G)\ f(x) \in L(x)$ a $\forall x, y \in V(G)\ (x, y) \in E(G) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Definice. *Pro graf G je jeho vybíravost $ch(G) = \min\{k \in \mathbb{N} : \forall L : V(G) \to \mathcal{P}(B)\ \forall x \in V(G)\ (|L(X)| = k \Rightarrow$ existuje dobré obarvení $G)\}$. Tedy srozumitelněji, pro každý seznam barev takový, že každý vrchol může být obarven k barvami, už musí existovat dobré obarvení. Je vidět, že $\chi(G) \leq ch(G)$, neboť $\{1, 2, \ldots, \chi(G)\}$ pro každé x je jeden z možných seznamů.*

Abychom si mohli uvést jeden zajímavý výsledek, řekneme si zhruba, co to je *plocha rodu* γ. Plocha rodu 0 je sféra. Všimněte si, že každý graf, který lze nakreslit na sféru, lze nakreslit i do roviny, a naopak. Rod plochy se zvýší o jedna, pokud k ní přilepíte *ucho*, což je, zhruba řečeno, že vezmete povrch válce (bez podstav), na povrchu plochy vystřihnete dva kruhové otvory a zohnutý válec za jejich místo přilepíte. Plochu můžete samozřejmě deformovat a její rod se tím nezmění. Nesmíte ji však stříhat ani lepit.

Věty o barevnostech a vybíravosti

Na přednášce si řekneme o většině z následujících tvrzení a u některých si ukážeme i důkaz. Zvláštní pozornost bych věnoval větě o vybíravosti rovinného grafu, jejíž důkaz je nejnovější a asi i nejkratší způsob, jak dokázat, že barevnost rovinného grafu je nejvýše pět. Sice platí, že barevnost rovinného grafu je nejvýše čtyři, ale k vyřešení této otázky známé pod názvem problém čtyř barev byly použity počítače, a to dosti podstatným způsobem.

Věta. *G je bipartitní (tedy jeho barevnost je dvě), právě když neobsahuje kružnici liché délky.*

Graf je bipartitní, pokud jeho vrcholy lze rozdělit do dvou skupin tak, že žádné dva vrcholy z téže skupiny nejsou spojeny hranou. Kružnice je takový graf, jehož vrcholy lze seřadit tak, že každý vrchol je spojen pouze s následujícím a předchozím (a první je spojen s posledním). Toto tvrzení se objevilo jako úloha v minulém ročníku semináře.

Věta. *Každý rovinný graf lze obarvit pomocí čtyř barev.*

Věta. $\chi(G) \leq \triangle(G) + 1$. *Pro G souvislý ostrá nerovnost nastává pouze pro K_n či C_{2k+1}.*

V této nerovnosti $\triangle(G)$ značí maximální stupeň vrcholu v grafu G. Graf je souvislý, pokud lze po hranách přejít mezi libovolnými dvěma vrcholy. K_n je úplný graf na n vrcholech, C_{2k+1} značí lichou kružnici. V dalším $\omega(G)$ značí maximální velikost úplného grafu, který lze v G najít.

Věta. $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists G_k\ \omega(G_k) = 2\ \ \&\ \ \chi(G) = k.$

Následující věta je známa jako Heawoodova nerovnost. Zajímavé je, že pro $\gamma = 0$ bylo težké ji dokázat (tj. vyřešit problém čtyř barev), ale lehké najít příklad, kdy nastavá rovnost. Pro ostatní γ je tomu naopak.

Věta. *Pokud graf G lze nakreslit na plochu rodu γ, pak platí* $\chi(G) \leq \lfloor \frac{1}{2}(7 + \sqrt{1 + 48\gamma}) \rfloor$.

Věta. $\chi_e(G) \leq \triangle(G) + 1$.

V souvislosti s problémem čtyř barev je zajímavá také tato věta. Její význam je v tom, že pokud by se někomu podařilo dokázat levou stranu ekvivalence bez počítačů, znamenalo by to odstranění námitek některých matematiků proti způsobu řešení problému čtyř barev.

Věta. *Pro každý tříbarevný graf platí $\chi_e(G) = \triangle(G)$ právě tehdy, když platí problém čtyř barev.*

Věta. *Vybíravost každého rovinného grafu je nejvýše 5.*

Věta. *Existuje rovinný graf, jehož vybíravost je alespoň 5.*

Věta. *Každý rovinný bipartitní graf má vybíravost nejvýše 3.*

Věta. *Pro každý bipartitní graf G platí $ch(L(G)) = \chi(L(G))$.*