

Barevné grafy pro pokročilé

ŠTĚPÁN ŠIMSA

ABSTRAKT. Příspěvek uvádí do problematiky vrcholového a hranového obarvování grafů a formuluje některé důležité věty, se kterými se obvykle středoškolák nepotká.

V celém textu budeme uvažovat neorientované grafy. Obvykle budeme graf značit G a množinu jeho vrcholů, resp. hran budeme značit V , resp. E .

Definice. (Základní grafové pojmy) Pro graf G definujeme tyto pojmy:

- (i) $\Delta(G)$ je velikost nejvyššího stupně v grafu.
- (ii) *Klika* je úplný podgraf grafu G .
- (iii) *Nezávislá množina* je podmnožina vrcholů V , mezi kterými nevedou žádné hrany.
- (iv) *Doplňěk* grafu G je graf na stejné množině vrcholů, který obsahuje hranu mezi dvěma vrcholy, právě když v grafu G tato hrana není.
- (v) *Indukovaný podgraf* H grafu G je takový podgraf grafu G , který má hranu mezi dvěma vrcholy, právě když je tato hrana i v G .

Definice. (Barevnost grafu) Říkáme, že graf G má (*vrcholovou*) *barevnost* $\chi(G)$, pokud můžeme každý vrchol obarvit jednou z $\chi(G)$ barev tak, aby žádné dva sousední vrcholy neměly stejnou barvu. *Hranovou barevnost* $\chi_E(G)$ definujeme obdobně, ale barvíme hrany, přičemž dvě hran nesmějí mít stejnou barvu, pokud mají společný vrchol.

Cvičení. Platí $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Věta. (Brooksova) *Pokud G není úplný graf ani kružnice liché délky, tak platí:*

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

Věta. (Vizingova) *Pro graf G platí:*

$$\Delta(G) \leq \chi_E(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Definice. (Perfektní graf) *Perfektní graf* je takový graf, jehož každý indukovaný podgraf má přesně takovou barevnost, jako je velikost jeho největší kliky.

Věta. (Slabá věta o perfektních grafech) *Graf je perfektní, právě když jeho doplněk je perfektní.*

Věta. (Silná věta o perfektních grafech) *Graf je perfektní, právě když neobsahuje jako indukovaný podgraf žádnou lichou díru (tj. kružnici liché délky alespoň 5) ani lichou antidíru (tj. doplněk díry).*