Banach-Tarského paradox

Alexander „Olin“ Slávik

Úvod

Roku 1924 spatřil světlo světa krásný paradox z dílny Stefana Banacha a Alfreda Tarského, který odhalil, že ačkoliv se v trojrozměrném euklidovském prostoru ($\mathbb{R}^3$) dá bez potíží provozovat klasická stereometrie, existují zde i množiny, jejichž vlastnosti odporují jakékoliv geometrické intuici. Přesné znění je následující:

Paradox. (Banach-Tarského, silnější forma) *Pro jakékoliv dvě omezené množiny $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$, které mají neprázdný vnitřek (tj. obsahují jako podmnožinu nějakou kouli), existuje $n \in \mathbb{N}$, disjunktní množiny $A_1, \ldots, A_n$ a disjunktní množiny $B_1, \ldots, B_n$ takové, že $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, $B = B_1 \cup \cdots \cup B_n$ a množiny A_i a B_i jsou přímo shodné*[1] *pro $1 \leq i \leq n$ (neformálně, A lze „rozřezat“ a „přeskládat“ na B).*

Populární je však podstatně slabší forma paradoxu, kterou si na přednášce dokážeme a která praví (již jen neformálně):

Paradox. (Banach-Tarského, populární forma) *Kouli lze „rozřezat“ a „přeskládat“ na dvě koule.*

Důsledek. *V $\mathbb{R}^3$ neexistuje „univerzální objem“, tedy funkce μ, která by každé množině přiřadila nezáporné reálné číslo či ∞, jednotkové krychli by přiřadila 1, při shodných zobrazeních by neměnila hodnotu a pro každé dvě disjunktní množiny $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ by platilo $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.*[2]

[1] Tedy liší se jen posunutím a otočením.

[2] Tento problém naštěstí není až tak palčivý, jak by se mohlo zdát – s uvedenými patologickými případy se v „praxi“ téměř nikdy nesetkáváme, takže pokud se smíříme s jistými nepříliš striktními omezeními na množiny, u kterých chceme měřit objem (tzv. měřitelné množiny), můžeme takovouto μ sestrojit.

Plán důkazu

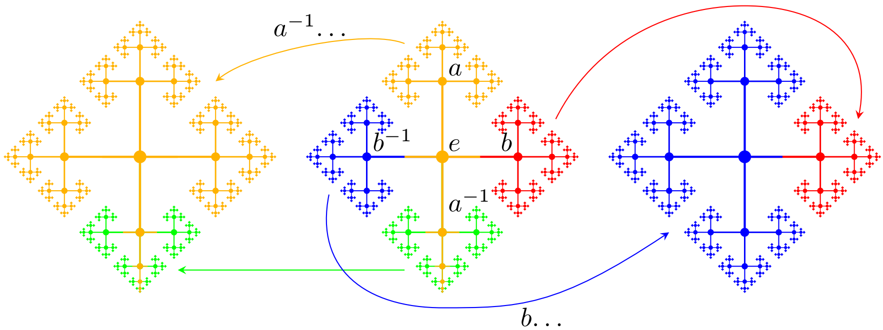
Důkaz provedeme v následujících krocích:

(1) Rozdělíme na čtyři části (množiny) tzv. *volnou grupu generovanou dvěma prvky*, přičemž z dvojic „protějších“ částí dokážeme sestavit dvě kopie původní grupy.
(2) Analogický rozklad (prvky grupy interpretujeme jako rotace koule) provedeme na kouli, ze které vyhodíme některé body.
(3) Ukážeme, že nám vyhození bodů v části (2) nevadí.

Část (1) – volná grupa a její rozklad

Definice. *Volná grupa generovaná dvěma prvky* je množina všech (konečných) slov (posloupností, řetězců) skládajících se z „písmen“ a, b, a^{-1}, b^{-1}, přičemž a a a^{-1}, resp. b a b^{-1} se v těchto slovech nesmí vyskytovat za sebou; navíc obsahuje prázdné slovo e. Tuto grupu značíme F_2. Prvky F_2 lze skládat tak, že příslušná slova napíšeme za sebe[3] a případná zakázaná podslova vyškrtneme[4].

Následující obrázek ilustruje výše zmiňovaný rozklad F_2:



Rozkladové množiny budeme nadále značit F_a, $F_{a^{-1}}$ F_b, $F_{b^{-1}}$.

Pozorování. *F_2 je spočetná množina.*

Část (2) – rozklad koule

V dalším textu budeme jako B označovat jednotkovou kouli se středem v počátku a S její povrch (tzv. sféru).

[3]Pokud je jedním z těchto slov e, jednoduše místo něj nic nenapíšeme.

[4]Pokud po vyškrtnutí vzniknou nová zakázaná podslova, pokračujeme ve škrtání. Pokud po vyškrtání nic nezbyde, jde o prázdné slovo e.

Prvkům F_2 nyní přiřadíme následující symetrie B: a budeme intepretovat jako otočení o[5] $\vartheta = \arccos \frac{1}{3}$ podle osy y, b jako otočení o ϑ podle osy z, příslušné „$^{-1}$-prvky“ jako inverzní otočení, delší slova jako postupná otáčení[6] a prázdné slovo jako identitu. V dalším textu budeme prvky F_2 ztotožňovat s příslušnými rotacemi.

Definice. Pro $s \in S$ nazveme *orbitou* s množinu všech prvků S, na které lze s zobrazit při nějakém otočení z F_2; značíme ji O_s.

Pozorování. *Orbity tvoří rozklad sféry.*

Nyní provedeme přeskládání sféry. Nejprve z ní ale „vyhodíme“ orbity těch prvků, které se zachovávají (tj. leží na ose) při nějakém otočení z F_2 – ty by mohly dělat problémy. Takto jsme vyhodili spočetně mnoho (každá rotace z F_2 zachovává právě dva prvky a F_2 je spočetná) spočetných množin (každá orbita je jen „nakreslením“ spočetné množiny F_2), jde tedy o spočetnou množinu. Tuto množinu označíme D.

Množinu $S \setminus D$ již umíme rozložit na čtyři části – z každé orbity vybereme[7] jeden prvek, množinu těchto prvků označíme A. Aplikujeme-li nyní na všechny prvky A rotace z množin F_a, $F_{a^{-1}}$ F_b, $F_{b^{-1}}$, dostaneme rozklad $S \setminus D$ na čtyři množiny (každá obsahuje „čtvrtinu“ z každé orbity v $S \setminus D$), přičemž z odpovídajících dvojic můžeme otočením dostat dvě kopie $S \setminus D$.

Část (3) – dokončení a opravy

Pozorování. *Umíme-li přeskládat sféru, umíme přeskládat i kouli bez středu.*

Lemma.

(i) *Kružnici lze přeskládat na kružnici bez jednoho bodu.*
(ii) *Kouli lze přeskládat na kouli bez středu.*
(iii) *Sféru lze přeskládat na sféru bez spočetně mnoha bodů.*

Ve světle uvedeného Pozorování a Lemmatu se problém přeskládání koule redukuje na přeskládání množiny $S \setminus D$ (tj. sféry bez spočetně mnoha bodů), což jsme již vyřešili výše.

Literatura a zdroje

[1] Paták, P.: *Sbírka příkladů: Teorie množin a patologické případy*, *http://atrey.karlin.mff.cuni.cz/~papa/texty/sbirka-temno.pdf*
[2] Článek o Banach-Tarského paradoxu na Wikipedii, *http://en.wikipedia.org/wiki/Banach-Tarski_paradox*

[5] Lze volit i mnohé jiné hodnoty ϑ, tato je „tradiční“ a obvykle se v důkazech používá.

[6] Tedy např. $abba^{-1}$ reprezentuje otočení, které vznikne takto: nejprve kouli otočíme o ϑ podle y, potom dvakrát o ϑ podle z a nakonec o $-\vartheta$ podle y.

[7] Stojí za zmínku, že v tuto chvíli je nutné použít tzv. *axiom výběru*. Bez něj by paradox nemusel být platný.