# Axiom výběru

*Pavel Podbrdský*

## Abstrakt

Když vznikala axiomatická teorie množin, bylo stanoveno několik základních axiomů, které zaručovaly uzavřenost množinového světa na *přirozené operace*, málokdo doufal, že nebude časem potřeba přidat další. Jedním z nich je tzv. *Axiom výběru* (dále jen $AC$). Mnohé moderní partie matematiky se bez něj (nebo alespoň nějaké slabší obdoby) neobejdou, někteří matematikové ale studují světy, kde $AC$ neplatí. My si na přednášce ukážeme některé jeho zajímavé důsledky a příklady jeho typických použití.

## O co tedy jde?

Nejčastěji se $AC$ zapisuje v tomto tvaru:

**Axiom.** $(AC)$ *Buď $a$ množina, která neobsahuje prázdnou množinu jako svůj prvek. Pak existuje funkce $f$ definovaná na množině $a$, taková, že kdykoliv $x \in a$, pak $f(x) \in x$.*

Funkci $f$ se pak říka *selektor* na množině $a$. Snadno zjistíme, že je-li množina $a$ konečná, $AC$ lze pro ni snadno dokázat z axiomů teorie množin (bez ohledu na velikost prvků $x \in a$). Je-li ale $a$ nekonečná, už se nám to nepodaří ani v případě, kdy všechny její prvky jsou dvouprvkové.

Často zaslechnete někoho říkat, že $AC$ je tvrzení, že „z každé neprázdné množiny lze vybrat prvek“. To je samozřejmě nesmysl ... Důležité je, že tento výběr se děje pro všechny prvky $x \in a$ současně a je realizován funkcí $f$ jakožto objektem teorie množin (jde zase o nějakou množinu).

$AC$ je tvrzení samo o sobě vcelku přirozené a tak si můžeme pomyslet, proč existují matematici, kteří ho zavrhují. Věc je ale složitější, ve světě, kde $AC$ platí se nám podaří dokázat, jak dále uvedeme, některá „divná“ tvrzení ...

Než se vrhneme na použití $AC$, uvedeme si dvě tvrzení, které s ním jsou ekvivalentní.

**Věta.** *$AC$ je ekvivalentní s tvrzením, že kartézský součin každého neprázdného souboru neprázdných množin je neprázdný.*

**Věta.** *$AC$ je ekvivalentní s tvrzením, že každou množinu lze dobře uspořádat.*

Díky $AC$ mají pojmy jako *mohutnost* množiny hezké vlastnosti.

## Důsledky AC

Uvedeme zde několik tvrzení, které jsou důsledkem $AC$ a bez něj je nelze dokázat.

**Tvrzení.** ($AC$) Spočetné sjednocení spočetných množin je spočetná množina.

**Tvrzení.** ($AC$) Každý vektorový prostor má bázi.[1]

**Tvrzení.** ($AC$) Existuje podmnožina $\mathbb{R}^n$, která nemá dobře definovaný „objem“ (je tzv. *Lebesgueovsky neměřitelná*).

**Tvrzení.** ($AC$) Jednotkovou kouli v $\mathbb{R}^3$ lze rozřezat na konečně mnoho částí, ze kterých lze (při zachování jejich geometrického tvaru) sestavit dvě disjunktní jednotkové koule (všimněme si, že touto transformací se nezachovává objem).

První dvě uvedená tvrzení jsou užitečná a v matematice často používaná, naproti tomu další dvě tvrzení jsou jakousi „daní“ za silný důkazový prostředek, jakým $AC$ je.

## Transfinitní indukce

Dostáváme se k tomu nejzajímavějšímu, co bych rád na přednášce uvedl. Nejdříve si ale musíme, alespoň intuitivně, zavést některé pojmy.

**Definice.** *Dobré uspořádání na množině $a$ je lineární uspořádání, pro které v libovolné podmnožině $b \subset a$ existuje nejmenší prvek.*

**Definice.** *Ordinální číslo je reprezentant typu dobrého uspořádání — ze všech množin, které jsou „stejně“ dobře uspořádané vybereme jednoho reprezentanta — ordinální číslo. Třídu všech ordinálních čísel značíme $On$. Třída $On$ je sama dobře uspořádaná.*

**Poznámka.** Můžeme si představit, že všechny typy dobrých uspořádání vzniknou postupným přidáváním větších a větších prvků „nakonec“.

**Věta.** (Transfinitní indukce) *Nechť $T$ je podtřída $On$ s vlastnostmi*

[1] Pokud těmto pojmům nerozumíš, nevadí. Tvrzení nijak nesouvisí s další přednáškou a je zde uvedené jen pro zajímavost.

(1) $0 \in T$.
(2) $(\forall \alpha \in On)((\beta < \alpha \Rightarrow \beta \in T) \Rightarrow \alpha \in T)$.
*Pak* $T = On$.

**Poznámka.** Transfinitní indukce je pouze zobecnění známé matematické indukce tak jako pojem ordinálního čísla pouze rozšiřuje pojem přirozeného čísla.

## Příklady použití AC a transfinitní indukce

**Příklad.** V 8. sérii loňského ročníku byla úloha na zkonstruování funkce, která je definovaná na celé množině $\mathbb{R}$ a její graf se nezmění po otočení o 60 stupňů okolo počátku. Příklad takové funkce lze explicitně sestrojit, ale její existenci lze také snadno dokázat transfinitní indukcí. Tento přístup umožňuje další zobecnění ...

**Příklad.** Dokažte, že existuje podmnožina $M \subset \mathbb{R}^2$, kterou každá přímka v $\mathbb{R}^2$ protíná v právě dvou bodech.

**Příklad.** Dokažte, že existují nespojitá řešení funkcionální rovnice $f(x+y) = f(x) + f(y),\ x, y \in \mathbb{R}$.

**Příklad.** Dokažte, že existuje reálná funkce reálné proměnné, jejíž graf protíná graf každé spojité funkce.