Aritmetické funkce

PEPA SVOBODA

ABSTRAKT. V přednášce se seznámíme s aritmetickými funkcemi jako je Eulerova funkce nebo součet dělitelů. Ukážeme si jejich vlastnosti a spočítáme nějaké příklady. Ve druhé přednášce se budeme zabývat nekonečnými Dirichletovými řadami a dostaneme se až k prvočíselné větě.

Definice. *Aritmetická funkce* je funkce z přirozených čísel do reálných čísel.

Příkladem aritmetických funkcí jsou funkce $f(n) = n^3$, $f(n) = \log(n)$ nebo třeba $\pi(n) =$ počet prvočísel menších nebo rovných n. Obvykle nás zajímají aritmetické funkce, které nesou nějakou informaci o přirozených číslech, například když vezmeme všelijaké vlastnosti čísla n týkající se dělitelnosti.

Definice. *Eulerova funkce* $\varphi(n)$ je počet přirozených čísel nesoudělných s n, která jsou menší rovna n.

Definice. Aritmetickou funkcí $\tau(n)$ myslíme počet všech kladných dělitelů čísla n. Součet všech kladných dělitelů čísla n označujeme jako $\sigma(n)$.

Tvrzení. *Nechť $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ je rozklad čísla n na prvočísla. Pak platí*

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_r + 1).$$

Důkaz. Stačí si uvědomit, že každý dělitel obsahuje ve svém rozkladu pouze prvočísla $p_1, \dots, p_r$, přičemž prvočíslo p_i v mocnině 0 až α_i. To je tedy $(\alpha_i + 1)$ možností pro prvočíslo p_i. Jelikož můžeme exponenty u různých prvočísel volit nezávisle na sobě, zjistíme počet všech dělitelů jako součin těchto výrazů. □

Tvrzení. *Pro součet dělitelů mocniny prvočísla platí* $\sigma(p^k) = \dfrac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$.

Klíčovou roli hraje Möbiova funkce μ.

Definice. *Möbiova funkce* μ je

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 1, \\ 0, & \text{je-li } n \text{ \emph{čtvercové}, tedy existuje-li } a > 1 \text{ takové, že } a^2 \mid n, \\ (-1)^r, & \text{je-li } n = p_1 p_2 \cdots p_r, \text{ kde } p_i \text{ jsou navzájem různá prvočísla.} \end{cases}$$

Například $\mu(4) = 0$, $\mu(5) = -1$, $\mu(6) = 1$.

Dirichletova konvoluce

V teorii čísel se často objevují výrazy typu $\sum_{d|n} f(d) \cdot g\left(\frac{n}{d}\right)$, kde f a g jsou aritmetické funkce. Prozkoumáme jejich obecné vlastnosti. K tomu potřebujeme tři jednoduché aritmetické funkce:

Definice.

(i) *Jednotka* je aritmetická funkce u definovaná jako $u(n) = 1$ pro každé n.

(ii) Aritmetická funkce N je definovaná vztahem $N(n) = n$ pro každé n.

(iii) *Identita* je aritmetická funkce I definovaná jako

$$I(n) = \left\lfloor \frac{1}{n} \right\rfloor = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 1, \\ 0 & \text{pro } n > 1. \end{cases}$$

Definice. *Dirichletova konvoluce* aritmetických funkcí f a g je aritmetická funkce

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d) \cdot g\left(\frac{n}{d}\right).$$

Konvoluci funkcí f a g značíme $f * g$.

Úloha.

(i) $\mu * u = I$,
(ii) $\varphi * u = N$,
(iii) $\mu * N = \varphi$.

Úloha. (Dirichletova inverzní formule) Nechť $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$. Potom platí rovnost $f(n) = \sum_{d|n} g(d)$.

Tvrzení. (vlastnosti konvoluce) *Nechť f, g, h jsou libovolné aritmetické funkce. Pak platí:*

(i) $f * g = g * f$ *(komutativita),*
(ii) $(f * g) * h = f * (g * h)$ *(asociativita),*
(iii) $f * I = I * f = f$ *(identita nedělá nic).*

Multiplikativita funkcí

Většina aritmetických funkcí, se kterými jsme se dosud setkali a se kterými se zde ještě setkáme, má významnou vlastnost, které se říká multiplikativita.

Definice. O aritmetické funkci f řekneme, že je *multiplikativní*, pokud $f(1) \neq 0$ a pro každou dvojici a, b přirozených navzájem nesoudělných čísel platí $f(ab) = f(a)f(b)$. Funkce je *úplně multiplikativní*, pokud $f(ab) = f(a)f(b)$ platí pro každou dvojici přirozených čísel.

Poznámka.

$$f(p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}) = f(p_1^{\alpha_1}) \cdots f(p_r^{\alpha_r}).$$

Cvičení. Uvědom si, že funkce I, u, N a μ jsou multiplikativní. Které z nich jsou multiplikativní úplně?

Cvičení. Dokaž, že pokud je f multiplikativní funkce, tak $f(1) = 1$.

Tvrzení. (Konvoluce zachovává multiplikativitu) *Pokud jsou f a g multiplikativní, pak je multiplikativní i $f * g$. Totéž obecně neplatí pro úplnou multiplikativitu.*

Příklad. Funkce τ (počet dělitelů) a σ (součet dělitelů) jsou multiplikativní.

Úloha. $\sigma = \tau * \varphi$.

Definice. Nechť f je aritmetická funkce taková, že $f(1) \neq 0$. Potom funkci g nazveme *Dirichletovou inverzí* k f, pokud $f * g = g * f = I$. Obvykle ji značíme f^{-1}.

Tvrzení. *Dirichletova inverze existuje pro každou funkci f splňující $f(1) \neq 0$.*

Tvrzení. *Nechť f je multiplikativní. Pak f je úplně multiplikativní, právě když*

$$f^{-1}(n) = \mu(n)f(n) \quad \textit{pro každé přirozené } n.$$

Definice. Funkce $\pi(n)$ označuje počet prvočísel menších nebo rovných číslu n.

Dirichletovy řady

Definice. *Riemannova ζ funkce* je definovaná předpisem $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Obecněji, *Dirichletovou řadou* aritmetické funkce $f(n)$ myslíme řadu[1]

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}.$$

Dirichletovy řady dávají pravý smysl Dirichletovu násobení, jak ukazuje následující tvrzení.

[1] Otázkou konvergence Dirichletových řad se nezabýváme.

Tvrzení. *Nechť f a g jsou dvě aritmetické funkce a $h = f * g$. Pak pro jejich Dirichletovy řady platí $F(s)G(s) = H(s)$.*

Příklad.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Příklad.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

Příklad.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = \zeta(s)^2.$$

Tvrzení. (Basilejský problém) $\zeta(2) = \pi^2/6$.

Tvrzení. (Eulerova formule) *Nechť f je úplně multiplikativní. Pak*

$$F(s) = \prod_p \frac{1}{1 - f(p)p^{-s}}.$$

Úloha. Dokaž, že

$$\frac{\sigma(n)}{n} < \frac{n}{\varphi(n)} < \frac{\pi^2}{6}\frac{\sigma(n)}{n}.$$

Prvočísla

Na závěr si ukážeme, co můžou říct aritmetické funkce a Dirichletovy řady k otázce rozložení prvočísel. Pokud ještě přidáme výsledky matematické analýzy, dostaneme slavnou prvočíselnou větu[2].

Definice. *Von Mangoldtova* funkce Λ je definovaná předpisem

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log(p), & \text{je-li } n = p^k \text{ pro prvočíslo } p \text{ a } k \geq 1\ , \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Příklad. $\log = \Lambda * u$.

Příklad.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

[2] dokázali ji současné pánové Jacques Hadamard a Charles Jean de la Vallée-Poussin

Úloha. Zobecni minulý příklad pro Dirichletovu řadu úplně multiplikativní funkce.

Definice. *Čebyševova funkce* je definovaná jako $\psi(n) = \sum_{p^k \leq n} \log(p)$.

Příklad. Dokaž, že $\psi(n) = \sum_{i \leq n} \Lambda(i)$. Pomocí tohoto vzorce můžeme definovat $\psi(x)$ pro reálné x.

Věta. (Prvočíselná věta)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \log(x)}{x} = 1$$

Tvrzení. *Riemannova funkce nemá žádné kořeny v polorovině $\Re(s) \geq 1$.*

Lemma. *Prvočíselná věta je ekvivalentní limitě $\dfrac{\psi(x)}{x} = 1$.*

Úloha. Nechť p_n značí n-té prvočíslo. Dokaž, že

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{n \log(n)} = 1.$$

Literatura a zdroje

[1] Tom M. Apostol: *Introduction to analytic number theory*, Springer 1998.
[2] Hua Loo Keng: *Introduction to number theory*, Springer-Verlag 1982.
[3] Josef Svoboda, Štěpán Šimsa: *Seriál z teorie čísel, 3. díl*, *http://mks.mff.cuni.cz/archive/33/serial.pdf*.