Antirovnoběžnost

MICHAL „KENNY" ROLÍNEK

ABSTRAKT. Příspěvek vysvětluje princip antirovnoběžnosti na mnoha úlohách z českých i zahraničních soutěží. Ukazuje i využití antirovnoběžnosti v moderní geometrii trojúhelníka.

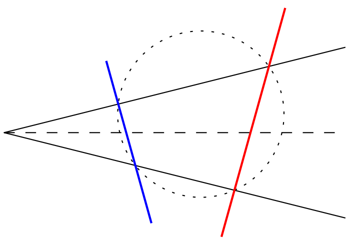
O co jde?

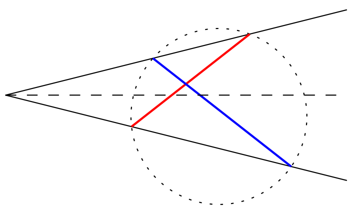
Definice. Je dán úhel XVY a jeho osa o. Přímky p a q nazveme *antirovnoběžné* v úhlu XVY, pokud pro osový obraz p' přímky p podle o platí $p' \parallel q$. Pokud navíc $V \in p$ a $V \in q$, říkáme, že p a q jsou *izogonální* v úhlu XVY.

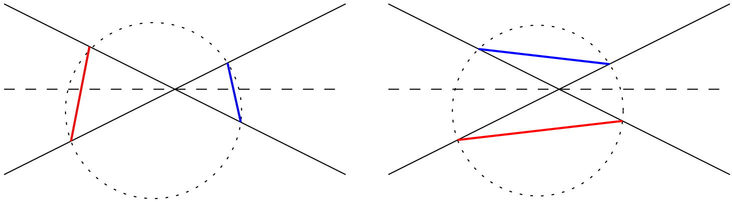
Úhlem v přechozí definici rozumíme i dvojici rovnoběžných přímek. Osou úhlu pak v tomto případě rozumíme osu pásu mezi rovnoběžkami.

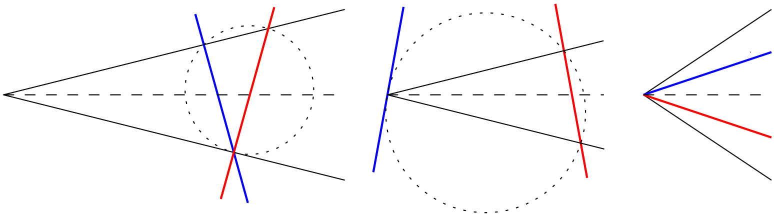
Bez nároku na přesnou formulaci a přesný důkaz uvedeme klíčové tvrzení, které propojí antirovnoběžnost s tětivovými čtyřúhelníky.

Tvrzení. *Přímky p a q jsou antirovnoběžné v daném úhlu, právě když nastane jedna ze situací zachycených na obrázcích níže.*









Tvrzení. *Pokud jsou p a q antirovnoběžné vzhledem ke dvěma různým úhlům, pak mají tyto úhly kolmé či rovnoběžné osy.*

Tvrzení. *Pokud jsou p a q antirovnoběžné vzhledem ke dvěma různým úhlům, pak dvojice antirovnoběžných přímek v těchto úhlech splývají.*

Lehké příklady

Příklad 1. Na kružnici k je dána tětiva AB. Označme $\check{S}$ střed kratšího oblouku AB. Bodem $\check{S}$ vedeme dvě různé přímky, které protnou AB a k ve čtyřech dalších bodech. Ukažte, že tyto body leží na kružnici.

Příklad 2. Ať $ABCD$ je tětivový. Buď $P = AB \cap CD$ a $Q = AD \cap BC$. Ukažte, že osy úhlů AQB and BPC jsou kolmé.

Příklad 3. Jsou dány kružnice k, l, které se protínají v bodech A, B. Označme K, L po řadě dotykové body jejich společné tečny zvolené tak, že bod B je vnitřním bodem trojúhelníku AKL. Na kružnicích k a l zvolme po řadě body N a M tak, aby bod A byl vnitřním bodem úsečky MN. Dokažte, že čtyřúhelník $KLMN$ je tětivový, právě když přímka MN je tečnou kružnice opsané trojúhelníku AKL.
(Domácí kolo MO 2010)

Příklad 4. Ať ABC je trojúhelník. Kružnice procházející body B a C protne strany AB a AC podruhé postupně v C' a B'. Ukažte, že BB', CC' a HH', kde H a H' jsou postupně ortocentra trojúhelníků ABC a $AB'C'$, procházejí jedním bodem.
(IMO shortlist 1995)

Kamarádi H a O

Tvrzení 5. *V $\triangle ABC$ je H průsečík výšek a O střed kružnice opsané. Pak AH a AO jsou izogonální v úhlu BAC.*

Příklad 6. V trojúhelníku ABC platí, že výška a těžnice z vrcholu A rozdělí úhel BAC na třetiny. Určete vnitřní úhly v $\triangle ABC$.

Příklad 7. V trojúhelníku ABC platí, že výška, těžnice a osa úhlu z vrcholu A rozdělí úhel BAC na čtvrtiny. Určete vnitřní úhly v $\triangle ABC$.

Příklad 8. Úhlopříčky AC a BD tětivového čtyřúhelníka $ABCD$ se protínají v P. Středy kružnic opsaných $ABCD$, ABP, BCP, CDP a DAP označme postupně O, O_1, O_2, O_3 a O_4. Ukažte, že OP, O_1O_3 a O_2O_4 procházejí jedním bodem.

(Čína 1990)

Příklad 9. Trojúhelník ABC je ostroúhlý. Buďte D a E body na stranách BC a AC takové, že A, B, D a E leží na kružnici. Dále předpokládejme, že kružnice opsaná D, E a C protne stranu AB ve dvou bodech X a Y. Ukažte, že střed XY je zároveň patou výšky z C na AB. (Baltic Way 2010)

Příklad 10. V rovině se kružnice k_1 a k_2 o středech po řadě I_1 a I_2 protínají ve dvou bodech A a B. Nechť je úhel I_1AI_2 tupý. Tečna ke k_1 v bodě A protíná k_2 ještě v bodě C a tečna ke k_2 v bodě A protíná k_1 ještě v bodě D. Označme k_3 kružnici opsanou trojúhelníku BCD. Nechť E je střed toho oblouku CD kružnice k_3, který obsahuje bod B. Přímky AC a AD protínají k_3 po řadě ještě v bodech K a L. Dokažte, že přímky AE a KL jsou navzájem kolmé. (MEMO 2011)

Symediány

Definice 11. Je dán trojúhelník ABC. Přímku, která je izogonální s těžnicí z vrcholu A v úhlu BAC, nazveme A-*symediánou* trojúhelníka ABC.

Tvrzení 12. *Ke kružnici opsané $\triangle ABC$ sestrojíme tečny v bodech B a C a jejich průsečík označíme S. Pak AS je symediána v $\triangle ABC$.*

Příklad 13. Ať ABC je rovnoramenný trojúhelník se základnou AB. Dále nechť P je jeho vnitřní bod takový, že $|\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle PBC|$. Označme M střed AB. Ukažte, že $|\sphericalangle APM| + |\sphericalangle BPC| = 180°$. (Polsko 2000)

Příklad 14. Jsou dány dvě kružnice k_1 a k_2, které se protínají v bodech A a B. Na kružnici k_2 zvolme bod C tak, že úsečka BC protne kružnici k_1 v bodě různém od B, který označíme L. Přímka AC protne kružnici k_1 v bodě ruzném od A, který označíme K. Dokažte, že přímka, na níž leží težnice z vrcholu C trojúhelníku KLC, prochází pevným bodem nezávislým na poloze bodu C.

(zobecněné domácí kolo MO 2011)

Tvrzení 15. *Symediány se protínají v jednom bodě. Nazveme ho Lemoinovým bodem $\triangle ABC$.*

Příklad 16. Buď ABC trojúhelník s Lemoinovým bodem L. Rovnoběžka s AB vedená bodem L protne strany CA a CB v bodech C_1, C_2. Podobně definujme A_1, A_2, B_1, B_2. Ukažte, že pak těchto šest bodů leží na kružnici. Kde je střed této kružnice?

Příklad 17. Buď ABC trojúhelník s Lemoinovým bodem L. Antirovnoběžka s AB v úhlu ACB vedená bodem L protne strany CA a CB v bodech C_1, C_2. Podobně definujme A_1, A_2, B_1, B_2. Ukažte, že pak těchto šest bodů leží na kružnici. Kde je střed této kružnice?

Isogonal conjugates

Definice 18. Body P a P' v trojúhelníku ABC nazveme *isogonal conjugates* vůči $\triangle ABC$, pokud jsou AP a AP' izogonální v úhlu BAC a podobně dvojice přímek BP, BP' a CP, CP' jsou izogonální postupně v úhlech ABC a BCA.

Tvrzení 19. *Ke každému bodu v rovině, který neleží na kružnici opsané $\triangle ABC$, existuje isogonal conjugate vůči $\triangle ABC$.*

Příklad 20. Ať P a P' jsou isogonal conjugates vzhledem k $\triangle ABC$. Pak projekce bodů P a P' na strany trojúhelníka leží na jedné kružnici.

Příklad 21. Je dán trojúhelník ABC, Γ je Gergonneův bod a H^+ střed kladné stejnolehlosti, která zobrazí kružnici vepsanou $\triangle ABC$ na kružnici opsanou. Pak Γ a H^+ jsou isogonal conjugates.

Příklad 22. Je dán trojúhelník ABC, N je Nagelův bod a H^- střed záporné stejnolehlosti, která zobrazí kružnici vepsanou $\triangle ABC$ na kružnici opsanou. Pak N a H^- jsou isogonal conjugates.

Příklad 23. Uvnitř čtyřúhelníka $ABCD$ je dán bod P neležící na BD tak, že $|\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle DBA|$ a $|\sphericalangle PDC| = |\sphericalangle BDA|$. Ukažte, že $ABCD$ je tětivový právě tehdy, když $|AP| = |PC|$. (IMO 2004)

Příklad 24. Ať P a P' jsou isogonal conjugates vůči $\triangle ABC$. Ukažte, že P' je střed kružnice opsané trojúhelníku tvořenému obrazy bodu P přes strany $\triangle ABC$.

Příklad 25. Kružnice k vytne na každé straně trojúhelníka ABC úsečku. Ukažte, že potenční střed kružnic, jejichž průměry jsou tyto úsečky, je isogonal conjugate středu kružnice k. (zobecněné IMO 2008)

Příklad 26. Uvnitř trojúhelníka ABC je dán bod P. Označme A', B', C' paty kolmic spuštěných z bodu P na příslušné strany. Dále nechť A'' je průsečík kružnice opsané trojúhelníku $A'B'C'$ a strany BC různý od A'. Konečně nalezněme na úsečce $A''B'$ bod X takový, že $|\sphericalangle XAC| = |\sphericalangle PAB|$. Ukažte, že $|\sphericalangle AXB| = 90°$.

(*i*KS G3)

Tvrzení 27. *Je dán $\triangle ABC$ a přímka ℓ. Množina bodů X', které jsou isogonal conjugate k nějakému bodu $X \in \ell$, je kuželosečka.*

Příklad 28. (General Feuerbach Theorem) Je dán $\triangle ABC$ a v něm X a X' isogonal conjugates. Pokud přímka XX' prochází středem O kružnice opsané $\triangle ABC$, pak kružnice opsaná projekcím bodů X a X' na strany $\triangle ABC$ se dotýká kružnice devíti bodů.

Příklad 29. Je dán trojúhelník ABC ($|AB| \neq |AC|$). Na jeho výšce AA_0, kde A_0 leží na BC, zvolíme bod X. Označíme B_1 resp. C_1 průsečíky BX s AC, resp. CX s AB. Pokud je BCC_1B_1 tětivový, ukažte, že X je průsečík výšek trojúhelníka ABC. (Celostátní kolo MO 2007)

Literatura a zdroje

[1] Nathan Altshiller-Court: *College Geometry*, Dover Publication, New York, 2007

[2] *http://www.mathlinks.ro*