Angel Problem

Alexander „Olin“ Slávik

Pravidla hry

Hra *Anděl a ďábel*, o které tato přednáška pojednává, probíhá na nekonečné šachovnici, a jak už její název napovídá, hrají v ní proti sobě anděl a ďábel. Ve svých tazích se střídají.

Anděl (přesněji *anděl síly* p, kde $p \in \mathbb{N}$ je předem daná konstanta) je figurka, která může ve svém tahu skočit na kterékoliv políčko, na které se může dostat šachový král pomocí p svých tahů, pokud mu nic nestojí v cestě[1].

Ďábel, který přímo na šachovnici přítomen není, v každém svém tahu sežere jedno políčko šachovnice – na takové políčko už anděl nemůže nikdy skočit.

Anděl prohraje, pokud nemá kam skočit, a vyhraje, pokud může utíkat donekonečna.

Trocha historie

Hru vymyslel ve 40. letech 20. století David Silverman, do širšího povědomí se dostala v 70. letech. V roce 1982 nastolil John H. Conway otázku označovanou jako *Angel Problem*: existuje takové p, že anděl síly p hru vyhraje? Později (pro větší motivaci) nabídl \$100 za kladnou odpověď, a dokonce \$1000 za důkaz ďáblova jistého vítězství.

Má anděl šanci?

Ďábel je proti andělovi zdánlivě úplný chudák – umí za tah sežrat pouhé jedno políčko, zatímco anděl může skákat až do vzdálenosti p daleko[2]. Hlubší průzkum ovšem ukazuje, že situace je pro síly dobra poněkud komplikovanější.

Tvrzení. *Anděl síly* 1 *prohraje.*

Klíčová slova. Angel Problem, kombinatorické hry

[1] Tedy na kterékoliv políčko ve čtverci o straně $2p+1$, v jehož středu je anděl; ještě jinak řečeno, kterékoliv políčko ve vzdálenosti nejvýše p v metrice ϱ_∞.

[2] Pokud vám to nepřijde jako dostatečný nepoměr, dosaďte si třeba $p = 1000\ldots$

Úmluva. V následujících tvrzeních budeme označovat anděla síly p pouze anděl a uvedené výroky budou platit pro všechna $p \in \mathbb{N}$.

Tvrzení. *Pokud na anděla klademe (pro pevně zvolené $L \in \mathbb{N}$) některou z následujících dodatečných podmínek, prohraje:*

(i) *pokud se někdy dostane na pole s y-ovou souřadnicí Y, už nikdy nesmí skočit na pole s y-ovou souřadnicí menší než $Y - L$,*
(ii) *pokud se někdy dostane na pole vzdálené R od počátku, už nikdy nesmí skočit na pole vzdálené méně než $R - L$ od počátku.*

Speciálně tedy prohraje např. anděl, který musí v každém tahu zvyšovat svou y-ovou souřadnici (tzv. blbec).

Tvrzení. *Existuje ďáblova strategie s následujícími důsledky pro anděla: pro každé pole P herního plánu a pro každou vzdálenost D budou existovat dva okamžiky, přičemž v tom druhém bude anděl k P alespoň o D blíže než v tom prvním.*

Tvrzení. *Anděl si nijak nepohorší tím, když mu uložíme následující dodatečnou podmínku: nesmí skočit na žádné pole, na které mohl skočit v některém ze svých předchozích tahů.*

Svět je zachráněn!

V roce 2006 se objevily čtyři nezávislé důkazy, že dostatečně silný anděl přece jen vyhraje. Nejsilnější z těchto výsledků je:

Věta. *Anděl síly 2 vyhraje.*

Důsledek. *Anděl síly 1 vyhraje na trojrozměrné šachovnici.*

Později se uvedené tvrzení podařilo ještě více zesílit:

Věta. *Figurka, která umí skočit na kterékoliv pole obdélníka 5×3, uprostřed něhož se nachází, vyhraje.*

Literatura a zdroje

[1] John H. Conway: *The Angel Problem*, *http://library.msri.org/books/Book29/files/conway.pdf*
[2] András Mathé: *The Angel of power 2 wins*, *http://amathe.dyn.elte.hu/letolt.php?angel-mathe.pdf*
[3] Johan Wästlund: *A weaker winning angel* *http://www.math.chalmers.se/~wastlund/weakerAngel.pdf*
[4] Martin Kutz: *The Angel Problem, Positional Games, and Digraph Roots* *http://www.mpi-inf.mpg.de/~mkutz/diss/kutzdiss.pdf*
[5] Stijn Vermeeren: *Can the Angel fly into infinity, or does the Devil eat its squares? http://stijnvermeeren.be/download/mathematics/angel_slides.pdf*