Algebraické triky

Štěpán Šimsa

Abstrakt. Příspěvek obsahuje řadu algebraických triků, které se hodí při řešení příkladů nebo jejich částí. Velkým zdrojem triků, které člověk více či méně často použije, bývají nerovnosti a velkým zdrojem na řešení nerovností je zase seriál MKS od Michala Rolínka a Pavla Šaloma, který najdete na našich stránkách[3]. Ten tedy doporučuji přečíst každému, kdo má pocit, že se potřebuje v algebraických manipulacích zlepšit.

Úmluva. Úlohy jsou v tomto příspěvku označeny slovem **Příklad**, pokud patří mezi ty snazší, a slovem **Úloha**, pokud patří mezi ty náročnější.

Poznámka. (Symetrie a cykličnost) Výraz v několika proměnných je symetrický, pokud se nezmění prohozením libovolných dvou z nich. Pak můžeme BÚNO předpokládat, že proměnné jsou v námi vybraném pořadí (např. od největší po nejmenší).

Výraz je cyklický, pokud se nezmění po cyklické záměně (např. x za y, y za z a zároveň z za x). Poté můžeme BÚNO předpokládat například to, že jedna z proměnných je největší. Tyto úvahy často zkrátí sepisování řešení alespoň na polovinu.

Dosazení

Máme-li soustavu rovnic, často stačí jednu proměnnou vyjádřit a dosadit.

Příklad 1. Součin reálných čísel x, y, z je jedna. Určete všechny možné hodnoty výrazu

$$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}.$$

Příklad 2. Pro nenulová reálná čísla a, b, c platí

$$a^2-b^2=bc, \qquad b^2-c^2=ca.$$

Ukažte, že pak platí i $a^2-c^2=ab$.

[3] *http://mks.mff.cuni.cz/archive/29/9.pdf*

Rozklady na součin

Mají-li se v úloze najít všechna prvočísla určitého tvaru, zpravidla se snažíme příslušný výraz rozložit na součin, protože pak je snadné říci, kdy půjde o prvočísla (jen jeden z činitelů je různý od ± 1). Ale umět rozkládat na součin se hodí i jindy.

Příklad 3. Najděte dvě čtyřmístná čísla, jejichž součinem je $4^8 + 6^8 + 9^8$.

Příklad 4. Najděte všechna celá čísla n, pro něž je $n^4 - 3n^2 + 9$ prvočíslo. (MO 61-III-1)

Úloha 5. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho kladných celých čísel a takových, že pro žádné $n \in \mathbb{N}$ není $n^4 + a$ prvočíslo. (IMO 1969)

Úloha 6. Najděte nejmenší trojciferné číslo n, pro nějž má soustava

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 &= n \\ x^2 + y^2 + x + y &= n + 1 \end{aligned}$$

pouze celočíselná řešení.

Substituce $xyz = 1$

Máme-li na proměnné podmínku $xyz = 1$, často pomůže substituce

$$x = \frac{a}{b}, \quad y = \frac{b}{c}, \quad z = \frac{c}{a}.$$

Cvičení. Rozmyslete si, že tuto substituci opravdu můžeme použít, tedy že pro každá x, y, z splňující tuto podmínku existují vhodná a, b, c.

Příklad 7. Opět vyřešte Příklad 1.

Příklad 8. Kladná čísla a, b, c splňují $abc = 1$. Dokažte

$$\frac{1 + a^2c}{c(b + c)} + \frac{1 + b^2a}{a(c + a)} + \frac{1 + c^2b}{b(a + b)} \geq 3.$$

Úloha 9. Pro kladná a, b, c splňující $abc = 1$ dokažte

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c.$$

(MO 52-III-6)

Substituce $x' = x + c$

Ještě jednodušší substituce je pouhý posun všech proměnných o konstantu, často ale vyřeší celou úlohu.

Příklad 10. Najděte všechna reálná x splňující

$$(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 2x - 1)(x^2 - 7x + 12) + 24 = 0.$$

V následujícím příkladu budeme využívat jedno zajímavé tvrzení o polynomech (jinak ale pro naši přednášku nedůležité).

Věta. (Eisensteinovo kritérium) *Mějme polynom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ s celočíselnými koeficienty a prvočíslo p tak, že*

(i) $p \nmid a_n$,
(ii) $p \mid a_i, \forall i \in \{0, \ldots, n-1\}$,
(iii) $p^2 \nmid a_0$.

Potom je polynom $P(x)$ ireducibilní nad $\mathbb{Q}$ (tedy neexistují nekonstantní polynomy s racionálními koeficienty, jejichž součin by byl rovný P).

Příklad 11. Nechť p je prvočíslo. S pomocí Eisensteinova kritéria dokažte, že polynom $P(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1$ je ireducibilní nad $\mathbb{Q}$.

Úloha 12. Jsou dána reálná čísla x, y, z, která splňují

$$x + y + z = 12, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 54.$$

Ukažte, že alespoň jedno z čísel x, y, z je nejvýše rovno třem a alespoň jedno je větší nebo rovno pěti. (MO 60-III-3)

Linearita proměnné

Máme-li výraz, který je v některé proměnné lineární, pak bude nabývat svých extrémů pro její krajní hodnoty. To úlohu mnohdy velmi zjednoduší nebo úplně vyřeší.

Příklad 13. Jsou dána čísla a, b, c z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Ukažte nerovnosti

$$6 \geq 3abc + 4(1-a)(1-b)(1-c) + a + b + c \geq 1.$$

(MKS 28-7-6)

Příklad 14. Nalezněte minimum a maximum výrazu

$$a(1-b) + b(1-c) + c(1-a),$$

v němž a, b, c jsou z intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Příklad 15. Pro $x, y \in \mathbb{R}$ a $z \in \langle -2, 2 \rangle$ ukažte nerovnost

$$x^2 + y^2 \geq xyz.$$

Příklad 16. Nechť $n \geq 2, 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \ldots, n$. Dokažte nerovnost

$$\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i x_{i+1} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

kde $x_{n+1} = x_1$. (Výběrové soustředění 2016)

Homogenita

Definice. (Homogenita) Výraz $V(a, b, c)$ nazveme homogenní stupně α, pokud existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, že pro každé $t > 0$ platí

$$V(ta, tb, tc) = t^{\alpha} V(a, b, c).$$

Máme-li homogenní nerovnost, můžeme si pomoci tím, že si přidáme nějakou podmínku (jejíž splnění můžeme zaručit právě pomocí t v předchozí definici).

Příklad 17. Pro $a, b \geq 0$ a $s \geq r$ dokažte

$$(a^r + b^r)^{\frac{1}{r}} \geq (a^s + b^s)^{\frac{1}{s}}.$$

Příklad 18. Pro $a, b > 0$ ukažte

$$a^4 + 2b^4 \geq a^2 b^2 + 2ab^3.$$

Úloha 19. Dokažte Cauchy-Schwarzovu nerovnost: $n \in \mathbb{N}$, dále $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$ a $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$. Pak

$$(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)(v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2) \geq (u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n)^2.$$

(Ne)rovnost

Máme-li nějakou rovnici nebo soustavu rovnic, můžeme si někdy pomoci tím, že ukážeme, že jedna strana je větší než druhá, a využijeme, že víme, kdy v námi použité nerovnosti nastává rovnost.

Úloha 20. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^4 + y^2 + 4 = 5yz,$$
$$y^4 + z^2 + 4 = 5zx,$$
$$z^4 + x^2 + 4 = 5xy.$$

(MO 61-III-6)

Úloha 21. Určete všechny trojice (a, b, c) kladných reálných čísel, které jsou řešeními soustavy rovnic

$$a\sqrt{b} - c = a,$$
$$b\sqrt{c} - a = b,$$
$$c\sqrt{a} - b = c.$$

(ČPS 2010)

Polynomy

Příklad 22. Mějme reálná čísla x, y, z, pro která platí

$$x + y + z = 0,$$
$$xy + yz + zx = 0.$$

Dokažte, že $x = y = z = 0$.

Příklad 23. Ukažte, že pokud pro nenulová reálná čísla a, b, c platí rovnost

$$\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} = 0,$$

tak se dvě z těchto tří čísel rovnají.

Příklad 24. Jakých hodnot může nabývat výraz

$$\frac{(a+b-c)^2}{(a-c)(b-c)} + \frac{(b+c-a)^2}{(b-a)(c-a)} + \frac{(c+a-b)^2}{(a-b)(c-b)}$$

pro všechny možné trojice po dvou různých reálných čísel a, b, c?

(Výběrové soustředění 2013)

Úloha 25. Nechť a, b, c, d, e, f jsou přirozená čísla. Označme $S = a+b+c+d+e+f$. Platí, že S dělí výrazy $abc + def$ a $ab + bc + ca - de - ef - fd$. Dokažte, že S je složené.

(IMO shortlist 2005)

Algebra? Ne, geometrie!

Úloha 26. Dvojice nekonečných posloupností celých čísel a_1, a_2, ... a b_1, b_2, ... splňuje pro $n \geq 3$ vztah

$$(a_n - a_{n-1})(a_n - a_{n-2}) + (b_n - b_{n-1})(b_n - b_{n-2}) = 0.$$

Ukažte, že existuje přirozené k takové, že $a_k = a_{k+2016}$. (iKS 5. ročník, A5)

Úloha 27. Vyřešte úlohu 12, tentokrát geometricky.

Trikové úpravy

Úloha 28. Celá čísla x, y, z splňují vztah

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = xyz.$$

Dokažte, že výraz $x^3 + y^3 + z^3$ je dělitelný $x + y + z + 6$.

Úloha 29. Nechť existuje $n > 0$ reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$, která pro každé $i = 1, \ldots, n$ splňují

$$x_i = \frac{1}{x_i - x_1} + \frac{1}{x_i - x_2} + \cdots + \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_i - x_{i+1}} + \cdots + \frac{1}{x_i - x_n}.$$

Navíc platí $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 45$. Určete n. (MKS 27-1-8)

Úloha 30. Pro libovolná nezáporná reálná čísla a a b dokažte nerovnost

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+1}} \geq \frac{a+b}{\sqrt{ab+1}}$$

a zjistěte, kdy nastane rovnost. (MO 63-III-6)

Návody

1. Dosaďte $z = \frac{1}{xy}$ a zlomky zjednodušte a sečtěte.

2. Z první rovnice dosaďte za c do druhé a třetí. Nyní má z druhé rovnice plynout třetí. Všimněte si, že druhou rovnici lze vydělit b, a potom ji vytkněte ze třetí rovnice.

3. Přičtěte 6^8, abyste mohli využít vzorečku, a pak ho opět odečtěte a využijte jiného vzorečku. Ověřte čtyřmístnost obou čísel.

4. Přičtěte a odečtěte $9n^2$ a s pomocí dvou vzorečků rozložte na součin.

5. Zvolte $a = 4m^2$ pro $m > 1$ a rozložte na součin.

6. Označte $a = x^2 + y^2, b = x + y$, odvoďte $a = n, b = 1$, Vyřešte kvadratickou rovnici a odvoďte v jakém tvaru musí být n. Výsledek by měl být 113.

7. Tady se fakt nedá nic nového radit :D. Udělejte substituci a upravte (sečtěte zlomky).

8. Udělejte substituci a použijte AG-nerovnost (jde to i rovnou bez substituce, ale po substituci je to lépe vidět).

9. Po substituci nerovnost vynásobte třemi a rozložte ji na součet tří cyklických AG-nerovností.

10. Rozložte kvadratické trojčleny na součin, zvolte $y = x - 1$ a následně $z = y^2$. Vyřešte kubickou rovnici v z natipováním kořenů.

11. Polynom sečtěte na $P(x) = \frac{x^p-1}{x-1}$, uvažte polynom $Q(x) = P(x+1)$ a dokažte, že je ireducibilní. Uvědomte si, že P je pak také nutně ireducibilní.

12. Uvažte $a = x - 4$ atd., tedy $a + b + c = 0$ a $a^2 + b^2 + c^2 = 6$. Ze symetrie $a \geq b \geq c$ a pro spor $c > -1$. Rozeberte, jestli je b záporné nebo nezáporné. Druhá část (důkaz, že $a \geq 1$) opět plyne ze symetrie.

13. Stačí rozebrat osm možností, kdy $a, b, c \in \{0, 1\}$. Díky symetrii výrazu můžete navíc předpokládat $a \geq b \geq c$ a rozebírat jen čtyři možnosti.

15. Díky linearitě v proměnné z stačí rozebrat případy $z = \pm 2$.

16. Využijte linearitu a představte si n kuliček na kružnici, kde některé jsou černé a některé bílé. Co počítá výraz na levé straně?

17. BÚNO předpokládejte $a^r + b^r = 1$. Pak $1 \geq a, b \geq 0$, a tedy $a^r \geq a^s$ a $b^r \geq b^s$.

18. BÚNO předpokládejte $b = 1$ a polynom rozložte na součin tipováním kořenů.

19. Nejprve využijte homogennost v $u_1, \ldots, u_n$ a BÚNO předpokládejte $u_1^2 + \cdots + u_n^2 = 1$ a pak ještě stejnou úvahu zopakujte pro $v_1, \ldots, v_n$. Nakonec využijte odhady $\frac{1}{2}u_i^2 + \frac{1}{2}v_i^2 \geq u_i v_i \geq -\left(\frac{1}{2}u_i^2 + \frac{1}{2}v_i^2\right)$.

20. Využijte odhad $4x^2 \leq x^4 + 4$ a jeho cyklické záměny a získané nerovnosti sečtěte.

21. BÚNO předpokládejte, že a je největší a dokažte postupně $b \leq 4, c \geq 4$ a $c \leq b$.

22. Uvažte polynom třetího stupně s kořeny x, y, z a pomocí Vietových vztahů odvoďte, že je tvaru $t^3 + c = 0$.

23. Vynásobte abc a uvažujte jako polynom v a. Dokažte, že se rovná polynomu $(b-c)(a-b)(a-c)$.

24. Označte výraz ze zadání jako výraz $V(a)$ v neznámé a s parametry b, c. Uvažte polynom $P(a) = V(a)(a-b)(b-c)(c-a)$, ukažte, že je druhého stupně a b i c jsou jeho kořeny (pozor, to není jasné, protože $V(a)$ není polynom!). Odvoďte, že $V(a)$ nezávisí na a a využijte symetrie.

25. Uvažte polynom $P(x) = (x+a)(x+b)(x+c) - (x-d)(x-e)(x-f)$.

26. Uvažujte body v rovině $X_n = (a_n, b_n)$. Rozmyslete si, že trojúhelník X_n, X_{n-1}, X_{n-2} má pravý úhel u vrcholu X_n. Z Pythagorovy věty odvoďte, že vzdálenosti mezi po sobě jdoucími body se nezvětšují, a využijte celočíselnosti.

27. Uvědomte si, že soustava rovnic definuje kružnici v prostoru. Tu rozdělte na šest částí (vždy získáte dva body při průniku kružnice s rovinou danou dvěma osami) a pro každou část si rozmyslete, jakých hodnot v ní nabývají jednotlivé souřadnice.

28. Využijte vzoreček $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.

29. V součtu druhých mocnin nahraďte vždy jedno x_i pomocí vztahu v zadání.

30. Roznásobte, upravte, aby na obou stranách byl rozdíl odmocnin, a netradičním způsobem využijte vztah $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$.

Literatura a zdroje

[1] Michal „Kenny“ Rolínek: *Algebraické legrácky*, Blansko-Obůrka, 2011.
[2] Michal „Kenny“ Rolínek, Pavel Šalom: *Zdolávání nerovností*, *http://mks.mff.cuni.cz/archive/29/9.pdf*
[3] Martina Vaváčková: *Rozklady na součin*, Hojsova Stráž, 2011.