Algebraické legrácky

MICHAL „KENNY“ ROLÍNEK

ABSTRAKT. Sbírka příkladů, jež lze řešit vtipnou algebraickou manipulací.

Každý z následujících příkladů má řešení založené na nějaké vtipné a trikové úpravě. Přijdete na ně?

Příklad 1. Označme $m \circ n = \frac{mn+4}{m+n}$. Určete

$$((((2011 \circ 2010) \circ 2009) \circ \cdots \circ 2) \circ 1) \circ 0.$$

(Náboj 2009)

Příklad 2. Součin reálných čísel x, y, z je 1. Určete všechny možné hodnoty výrazu

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx}.$$

Příklad 3. Nalezněte všechna prvočísla tvaru $n^4 + 4m^4$, kde $m, n \in \mathbb{N}$.

Příklad 4. Najděte všechna reálná x splňující

$$(x^2+3x+2)(x^2-2x-1)(x^2-7x+12)+24=0.$$

Příklad 5. Pro nenulová reálná čísla a, b, c platí

$$a^2-b^2=bc, \qquad b^2-c^2=ca.$$

Ukažte, že pak platí i $a^2-c^2=ab$.

Příklad 6. Nechť existuje $n>0$ reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$, která pro každé $i=1,\ldots,n$ splňují

$$x_i = \frac{1}{x_i-x_1} + \frac{1}{x_i-x_2} + \cdots + \frac{1}{x_i-x_{i-1}} + \frac{1}{x_i-x_{i+1}} + \cdots + \frac{1}{x_i-x_n}.$$

Navíc platí $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=45$. Určete n. (PraSe 27/1/8)

KLÍČOVÁ SLOVA. úprava výrazu, triky, algebra

Příklad 7. Jsou dána reálná čísla x, y, z, která splňují

$$x + y + z = 12, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 54.$$

(i) Ukažte, že výrazy xy, yz, zx jsou nejvýše rovny 25 a alespoň rovny 9.
(ii) Ukažte, že alespoň jedno z čísel x, y, z je nejvýše rovno 3 a alespoň jedno je větší nebo rovno 5. (Celostátní kolo MO 2011)

Příklad 8. Buďte a, b, c nezáporná reálná čísla taková, že

$$(a + b)(b + c)(c + a) = 2.$$

Dokažte, že

$$(a^2 + bc)(b^2 + ca)(c^2 + ab) \leq 1.$$

(Vasile Cirtoaje)

Příklad 9. Nechť a, b, c, d, e, f jsou přirozená čísla. Označme $S = a+b+c+d+e+f$. Platí, že S dělí výrazy $abc + def$ a $ab + bc + ca - de - ef - fd$. Dokažte, že S je složené. (IMO shortlist 2005)

Literatura a zdroje

[1] Vo Quoc Ba Can, Cirtoaje Vasile, Phuong Tran, *Inequalities with beautiful solutions*, GIL, 2010.