AG nerovnost

Marian Poljak

Abstrakt. V příspěvku jsou obsažena základní i pokročilá užití AG nerovnosti.

Účinné používání nerovností patří k základním dovednostem člověka účastnícího se matematických soutěží. Přestože je tento text zaměřen primárně na řešení nerovností, soustavy rovnic jsou s jejich pomocí také často hračka a silné odhady nezřídka vyřeší i nealgebraickou úlohu. Jednou ze (dvou) stěžejních nerovností, je nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (zkráceně AG nerovnost). V této dvojpřednášce se s ní seznámíme a ukážeme si všechny možné nekalé triky, které s ní můžeme provádět.

Věta 1. (AG nerovnost) *Pro libovolná nezáporná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí*

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}.$$

Poznámka 2. Rovnost nastává právě tehdy, když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Příklad 3.

(1) $a^2 + b^2 \geq 2ab$,
(2) $(a + b + c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9$,
(3) $2x^3 + y^3 \geq 3x^2y$.

Cvičení 4. (Základní fígle.) Pro x, y, z kladná dokažte:

(1) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$,
(2) $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$,
(3) $x^2 + \frac{2}{x} \geq 3$,
(4) $\frac{x^3}{yz} + y + z \geq 3x$,
(5) $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3$,
(6) $2(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) \geq x^3 + y^3 + z^3 + 15xyz$,
(7) $\frac{z}{x} + \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z} \geq 2$.

Příklad 5. Nechť a, b jsou kladná reálná čísla taková, že $a > b$. Najděte minimum výrazu

$$a + \frac{1}{b(a - b)}.$$

Příklad 6. Najděte všechna kladná reálná řešení (a, b, c, d) splňující $a+b+c+d = 12$ a $abcd = 27 + ab + ac + ad + bc + bd + cd$.

Sčítání AG nerovností a míchání členů

Jak jste si možná všimli, většina dosud dokazovaných nerovností měla společnou jednu věc – členů na jedné straně nerovnosti bylo hodně, zatímco na druhé straně jeden. To samozřejmě (při letmém pohledu na AG nerovnost) není náhoda. Co kdybychom ale chtěli AG utilizovat i pro boj s následující nerovností?

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2y + y^2z + z^2x$$

Není těžké ověřit, že nerovnost (konkrétně její trojnásobek) můžeme "namíchat" součtem nerovnosti $2x^3 + y^3 \geq 3x^2y$ a jejích cyklických záměn.

Ukažme si, jak na správné namíchání přijít!

Příklad 7. Dokažte, že pro kladná reálná x, y, z platí

$$x^3y + y^3z + z^3x \geq x^2yz + y^2zx + z^2xy.$$

Cvičení 8. (Míchací.) Pro x, y, z kladná dokažte (a určete, kdy nastává rovnost):

(1) $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$,
(2) $x^4 + y^4 + z^4 \geq x^3y + y^3z + z^3x$,
(3) $x^4y + y^4z + z^4x \geq x^2y^2z + y^2z^2x + z^2x^2y$,
(4) $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq x + y + z$,
(5) $x^7 + 1 \geq x^4 + x^3$,
(6) $\frac{x^3}{y} + \frac{y^3}{z} + \frac{z^3}{x} \geq xy + yz + zx$.

Poslední cvičení ukázala, že rozložit nepříjemnou nerovnost na součet několika lehčích nerovností může často vést k řešení. Musíme si však dát pozor na to, aby tyto lehčí nerovnosti platily. Pojďme si techniku "Rozděl a panuj!" ukázat na různorodějších příkladech!

Příklad 9. Dokažte, že pro kladná reálná x, y, z platí

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6 \geq 3(a + b + c).$$

Příklad 10. Dokažte, že pro kladná reálná x, y, z platí

$$(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz.$$

Příklad 11. Pro $a, b, c > 0$ dokažte nerovnost

$$\frac{2}{3}(a + b + c) \geq \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ca} - 1.$$

Poznámka 12. Pomaličku začíná přituhovat a budeme bojovat se složitějšími výrazy. Abychom se v úpravách neztratili, vyzbrojíme se znakem tzv. *cyklické sumy.* Funguje to nějak takto: $\sum_{cyc} a = a+b+c$, $\sum_{cyc} xy^2 = xy^2+yz^2+zx^2$. Například jedno z prvních cvičení lze zapsat následovně:

$$2\left(\sum_{cyc} x\right)\left(\sum_{cyc} x^2\right) \geq \sum_{cyc} x^3 + 15xyz.$$

Lehké odhady na těžké nerovnosti

Asi největší využití AG nerovnosti spočívá v tvorbě odhadů, "mezivýrazů", které vypadají rozumněji než levá a pravá strana a které se mezi ně proto pokoušíme vklínit. Mnohdy je vztah mezi levou a pravou stranou nerovnosti natolik slabý, že i ne moc dobrý odhad úlohu vyřeší. U těžších nerovností jsou silné odhady často nutností (jejich používání vyžaduje notnou dávku praxe). Obojí si ukážeme.

Příklad 13. Pro $a, b, c > 0$ dokažte nerovnost

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^3+b^3+abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

Poznámka 14. (Nenápadná, ale důležitá.) Při dokazování neostrých nerovností má smysl používat pouze takové odhady, u kterých se zachovají případy rovnosti.

Příklad 15. Pro $a, b, c > 0$ dokažte nerovnost

$$(a^5-a^2+3)(b^5-b^2+3)(c^5-c^2+3) \geq (a+b+c)^3.$$

(USAMO, 2004)

AG vs. zlomky

Na úlohy se zlomky je většinou silnou zbraní Cauchyho-Schwarzova nerovnost (druhá ze stěžejních nerovností). Nicméně i AG lze na zlomky použít překvapivě dobře – stačí sečíst zlomek s jeho jmenovatelem (funguje zejména u slabších nerovností). Při řešení nezapomeňme na poznámku o rovnosti!

Příklad 16. Pro $a, b, c > 0$ dokažte nerovnost

$$\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab} \geq a+b+c.$$

Příklad 17. Dokažte, že pro každá $a, b, c > 0$ platí

$$\sum_{cyc} \frac{a^3}{(a+b)(a+c)} \geq \frac{a+b+c}{4}.$$

Příklad 18. Pro a, b, c kladná dokažte

$$\sum_{cyc} \frac{a^3}{b(2c+a)} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

Úlohy na procvičení (triviální až středně obtížné)

Úloha 19. Určete všechna kladná reálná x, y, z splňující $x+y+z=6$ a $xyz=8$.

Úloha 20. Dokažte, že pro každé přirozené $n>1$ platí

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{n+1}\right)^n > \frac{n^n}{n+1}.$$

Úloha 21. Dokažte, že pro $0 \leq a \leq b \leq c$ platí $(a+3b)(b+4c)(c+2a) \geq 60abc$.

Úloha 22. Dokažte, že pro kladná reálná x, y, z platí

$$x^2+y^2+z^2 \geq x\sqrt{y^2+z^2}+y\sqrt{x^2+z^2}.$$

Úloha 23. Ukažte, že pro každou trojici kladných čísel a, b, c splňující $abc=1$ platí

$$\sum_{cyc} \frac{ab}{a^5+b^5+ab} \leq 1.$$

(IMO shortlist, 1996)

Úloha 24. Dokažte, že pro kladná reálná a, b, c splňující $a+b+c=3$ platí

$$a^b b^c c^a \leq 1.$$

Úloha 25. Dokažte, že pro $a, b, c > 0$ splňující $abc=1$ platí

$$\sum_{cyc} \frac{a^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4}.$$

Úloha 26. Na každé straně čtverce o straně 1 zvolíme bod. Tyto body vytvoří čtyřúhelník o stranách a, b, c, d. Dokažte, že platí $2 \leq a^2+b^2+c^2+d^2 \leq 4$ a $2\sqrt{2} \leq a+b+c+d \leq 4$.

Úloha 27. Dokažte, že pro $a, b, c > 0$ platí

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)^2 \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Těžší úlohy

Úloha 28. Pro a, b, c kladná platí $a + b + c = 1$. Dokažte, že

$$\sqrt{a^{1-a}b^{1-b}c^{1-c}} \leq \frac{1}{3}.$$

(Rakousko, 2008)

Úloha 29. Nechť a, b, c jsou kladná reálná a platí $a+b+c \geq 6$. Najděte minimum výrazu

$$\sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} \frac{a}{b^2 + c + 1}.$$

(Uzbekistán NMO)

Úloha 30. Ukažte, že pro každé přirozené n a každou n-tici kladných reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí

$$(1 + x_1)(1 + x_1 + x_2) \cdots (1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \geq \sqrt{(n + 1)^{n+1} x_1 x_2 \ldots x_n}.$$

(35. ročník MKS, finální myšmaš)

Úloha 31. Nechť $a, b, c > 0$ a $a + b + c = 1$. Dokažte, že platí

$$\sum_{cyc} \frac{a^3 + bc}{a^2 + bc} \geq 2.$$

Úloha 32. Nechť $n > 2$ a $a_2, a_3, \ldots, a_n$ jsou kladná reálná čísla splňující podmínku $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Dokažte, že platí

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \cdots (1 + a_n)^n > n^n.$$

(IMO 2, 2012)

Úloha 33. Nechť $a, b, c > 0$ a $abc = 1$. Dokažte, že platí

$$a^4 + b^4 + c^4 + a + b + c + \frac{2a}{b^2 + c^2} + \frac{2b}{a^2 + c^2} + \frac{2c}{a^2 + b^2} \geq 9.$$

Úloha 34. Mějme ostroúhlý trojúhelník ABC a jemu opsanou kružnici se středem O a poloměrem R. Označme D druhý průsečík přímky AO s kružnicí opsanou BOC, E druhý průsečík přímky BO s kružnicí opsanou AOC a F druhý průsečík přímky CO s kružnicí opsanou AOB. Dokažte

$$|OD| \cdot |OE| \cdot |OF| \geq 8R^3.$$

Úloha 35. Nechť $a, b, c > 0$ a $abc = 1$. Dokažte, že platí

$$\frac{a}{2b + c^2} + \frac{b}{2c + a^2} + \frac{c}{2a + b^2} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

Úloha 36. Nechť $a, b, c > 0$ a platí

$$a + b + c = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Dokažte, že platí

$$2(a + b + c) \geq \sqrt[3]{7a^2b + 1} + \sqrt[3]{7b^2c + 1} + \sqrt[3]{7c^2a + 1},$$

a určete, pro které trojice (a, b, c) nastává rovnost.

Úloha 37. Nechť $a, b, c > 0$ a $a + b + c = 1$. Dokažte, že platí

$$\sum_{cyc} \frac{\sqrt{a^2 + abc}}{c + ab} \leq \frac{1}{2\sqrt{abc}}.$$

Literatura a zdroje

[1] Michal Rolínek, Pavel Šalom: *Zdolávání nerovností*, Univerzita J.E. Purkyně, 2012.

[2] Samin Riasat: *Basics of Olympiad Inequalities*.