AG Nerovnost

LUKÁŠ ZAVŘEL

ABSTRAKT. Cílem přednášky je seznámit posluchače se základní, avšak velmi účinnou zbraní na nerovnosti – AG nerovností. Tyto nerovnosti se naučíme používat, sčítat, ale i všelijak jinak upravovat tak, aby se to co nejlépe hodilo našim potřebám.

Tvrzení. *Pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí $x^2 + y^2 \geq 2xy$.*

Důkaz. Snadno spatříme, že nerovnost je ekvivalentní nerovnosti $(x-y)^2 \geq 0$, která jistě platí.

Tvrzení. *Pro jakákoliv kladná čísla a, b platí*

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2.$$

Důkaz. Jistě platí

$$a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Vydělme tuto nerovnost číslem (kladným, znaménko se tedy nezmění!) ab a získáme

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2,$$

což je přesně nerovnost, kterou jsme měli dokázat.

Příklad 1. Pro $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dokažte

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

Tvrzení. (AG nerovnost[1]) *Pro libovolná kladná čísla $x_1, \ldots, x_n$, $n \in \mathbb{N}$, platí*

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

[1] Někdy se jí také říká nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

Příklad 2. Pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ dokažte

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz.$$

Příklad 3. Pro $x, y \in \mathbb{R}^+$ dokažte

$$2x^3 + y^3 \geq 3x^2y.$$

Příklad 4. Pro $x \in \mathbb{R}^+$ dokažte

$$x^2 + \frac{2}{x} \geq 3.$$

Cvičení 5. Pro kladná x, y, z dokažte

(i) $\frac{x^3}{yz} + y + z \geq 3x$,
(ii) $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq 3$,
(iii) $2(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) \geq x^3 + y^3 + z^3 + 15xyz$,
(iv) $x^3(x + 2y) + y^3(y + 2x) \geq 6x^2y^2$.

Sčítání AG nerovností

Příklad 6. Pro $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ dokažte

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2y + y^2z + z^2x.$$

Příklad 7. Pro kladná x, y, z dokažte

$$x^3y + y^3z + z^3x \geq x^2yz + y^2zx + z^2xy.$$

Cvičení 8. Pro kladná x, y, z dokažte

(i) $x^7 + y^7 + z^7 \geq x^5y^2 + y^5z^2 + z^5x^2$,
(ii) $x^4 + y^4 + z^4 \geq x^3y + y^3z + z^3y$,
(iii) $(x + y + z)^2 \geq 3\big(x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}\big)$,
(iv) $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$,
(v) $\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq a + b + c$,
(vi) $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca$.

Příklad 9. Pro kladná a, b, c splňující $abc = 1$ dokažte

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c.$$

(MO 52–A–III–6)

Příklad 10. Pro $x \in \mathbb{R}^+$ ukažte

$$8x^3 + x^2 - 8x + 3 \geq 0.$$

Příklad 11. Pro kladná čísla a, b, c dokažte nerovnost

$$a^3 + b^3 + c^3 + 6 \geq 3(a + b + c).$$

Příklad 12. Ukažte, že pro $a, b, c > 0$ platí

$$\frac{2}{3}(a + b + c) \geq \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{bc} + \sqrt[3]{ca} - 1.$$

Cyklické sumy

Pro snazší zápis cyklických výrazů definujeme cyklickou sumu, kde stačí místo velkého množství výrazů zapsat jen vybrané, a pokud všechny ostatní lze z vybraných získat cyklickou záměnou proměnných, je snadné si domyslet celý výraz.

V následujících příkladech uvažujme výrazy ve třech proměnných a, b, c.

Příklad. Ukážeme několik zápisů pomocí cyklické sumy.

(i) $\sum_{\text{cyc}} a = a + b + c$,
(ii) $\sum_{\text{cyc}} a^2b = a^2b + b^2c + c^2a$,
(iii) $9\sum_{\text{cyc}} a\sqrt{a + bc} = 9(a\sqrt{a + bc} + b\sqrt{b + ca} + c\sqrt{c + ab})$.

Příklad 13. Ukažte, že pro všechny trojice kladných čísel a, b, c platí

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a^3 + b^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

(USAMO 1998)

Příklad 14. Ukažte, že pro kladná čísla a, b, c splňující $abc = 1$ platí

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} \leq 1.$$

(IMO shortlist 1996)

Návod: Použijte odhad $a^5 + b^5 \geq a^2b^2(a + b)$.

AG a zlomky

Příklad 15. Pro kladná čísla a, b, c ukažte nerovnost

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c.$$

Řešení. Podle AG nerovnosti platí $\frac{a^2}{b}+b\geq 2a$. Sečtením tří analogických nerovností získáme to, co jsme měli dokázat.

Cvičení 16. Následující nerovnosti dokažte pro kladná čísla a, b, c.

(i)
$$\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2}\geq a+b+c,$$

(ii)
$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\geq ab+bc+ca.$$

Příklad 17. Pro kladná čísla a, b, c dokažte

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{a^3}{(a+b)(a+c)}\geq\frac{a+b+c}{4}.$$

Příklad 18. Pro $a,b,c>0$ ukažte

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{a^3}{b(2c+a)}\geq\frac{a+b+c}{3}.$$

Příklad 19. Pro kladná čísla a, b, c dokažte nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}}\frac{a^3}{b+2c}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{3}.$$

Literatura

[1] Michal Rolínek, Pavel Šalom: seriál *Nerovnosti*, MKS 29. ročník, 2009/2010