

## Poznámky k bodování a výsledkovým listinám

Nejprve se zaměříme na jednu zvláštnost našeho semináře. Protože opravování úloh je komplexní záležitost, jsou komplexní i body, které obdržíte od opravovatelů. Každé řešení ohodnotíme číslem tvaru  $x + yi$ , kde  $x$  představuje reálné body a  $y$  jsou body imaginární. Jaký je mezi nimi rozdíl? Reálné body jsou „solidní“; jsou to body za správnost řešení, které obvykle dostáváte ve škole, na olympiádách a podobně. Jde o nezáporné celé číslo. Za naprosto správné řešení jich dostanete tolik, kolik činí bodové ohodnocení dané úlohy.

Imaginární body představují druhou, nezávislou stupnici. Vyjadřují míru elegance daného řešení. Hodnota  $y$  je celé číslo od  $-2$  do  $2$ . Kladné imaginární body značí řešení, které je radost číst: obsahuje šikovné triky a originální myšlenky nebo nachází souvislosti mezi zdánlivě vzdálenými pojmy. Naopak záporné imaginární body vyjadřují, že jsi někde použil zbytečně složité formulace, několikrát dokazoval totéž, všechno řešil hrubou silou nebo třeba napsal jednoduchý důkaz na pět stránek.

### Od komplexních bodů k výslednému hodnocení

Každou úlohu tedy hodnotíme komplexním číslem ve tvaru  $x + yi$ . Do výsledků celé série pak započítáme hodnocení pěti úloh, které jsi vyřešil nejlépe (měl jsi z nich nejvíce reálných bodů, v případě rovnosti rozhoduje počet imaginárních bodů). Hodnocení těchto příkladů sečteme a tím dostaneme komplexní číslo, které označíme  $b$ .

S číslem  $b$  se dále pracuje následovně: Nejprve vypočteme *hrubý bodový zisk* – to je reálné číslo, se kterým ve výpočtu všude dále pracujeme namísto komplexního čísla, kterým byly Tvé úlohy ohodnoceny opravovateli. Při zisku  $b$  bodů za sérii je výchozí hodnota hrubého bodového zisku dána vztahem<sup>1</sup>

$$\tilde{h} = \Re(b) + (2 - \sqrt{3}) \Im(b).$$

Jelikož by toto číslo mohlo být teoreticky záporné nebo větší, než je maximální počet bodů za sérii (označíme ho  $s$ , obvykle je  $s = 25$ ), „ořízneme“ výchozí hodnotu do tohoto intervalu:

$$h = \begin{cases} s & \text{pokud } \tilde{h} \geq s, \\ 0 & \text{pokud } \tilde{h} \leq 0, \\ \tilde{h} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Aby byli při bodování úloh mírně zvýhodněni mladší a začínající řešitelé, určuje se u každého řešitele tzv. *koeficient*. Jeho výchozí hodnota se vypočte následovně:

$$\tilde{\kappa} = (r - 1) + \frac{2z}{450},$$

---

<sup>1</sup>Symbole  $\Re(w)$ ,  $\Im(w)$  značí reálnou a imaginární část komplexního čísla  $w$ .

kde  $r$  je ročník<sup>2</sup> (přepočítaný tak, aby odpovídal čtyřletému gymnáziu, studenti a žáci plnící povinnou školní docházku mají  $\frac{1}{2}$ ) a  $z$  je počet bodů, které řešitel získal během předchozích ročníků.<sup>3</sup> Jelikož výsledný koeficient  $\tilde{\kappa}$  je vždy číslo z intervalu  $\langle -\frac{1}{2}, 6 \rangle$ , položíme  $\kappa = \min(\tilde{\kappa}, 6)$ .

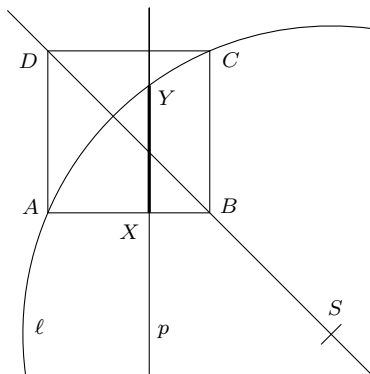
Předpokládejme dále, že  $\kappa < 3$ . Pro další výpočet bude podstatné číslo  $t$  definované jako

$$t = \frac{s}{2} \left( 1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\kappa\pi}{6} \right).$$

Hledaný *výsledný bodový zisk* za sérii (což už je číslo, které se udává ve výsledkové listině) pak dostaneme podle vztahu

$$v = \sqrt{t^2 + (s+t)^2 - (s+t-h)^2} - t.$$

Jak toto číslo interpretovat geometricky? Uvažujme v rovině čtverec  $ABCD$  o straně  $s$ . Na přímkou  $BD$  vyneseme bod  $S$  ve vzdálenosti  $\sqrt{2}t$  od bodu  $B$ , přičemž celá úsečka  $BS$  je vně čtverce. Dále nechť je dána kružnice  $\ell$  o středu  $S$  procházející body  $A$  a  $C$ . Na úsečce  $AB$  najdeme bod  $X$  takový, že  $|AX| = h$ , a povedeme jím kolmici  $p$  ( $p \perp AB$ ). Kružnice  $\ell$  a přímka  $p$  se protnou ve dvou bodech, ten uvnitř čtverce označíme  $Y$ . Výsledný bodový zisk za sérii je  $v = |XY|$ .



V případě, že  $\kappa > 3$ , postupujeme takto: číslo  $t$  se nyní zvolí jako

$$t = \frac{s}{2} \left( 1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{(6-\kappa)\pi}{6} \right)$$

a výsledný bodový zisk je

$$v = s - \left( \sqrt{t^2 + (s+t)^2 - (t+h)^2} - t \right).$$

<sup>2</sup>Pokud máš ve výsledkové listině uvedený čtvrtý (maturitní) ročník, a přitom jsi mladší, je to nejspíše proto, že nám nedošla informace o Tvém ročníku. Napravit to můžeš buď mailem na [mks@mff.cuni.cz](mailto:mks@mff.cuni.cz), nebo přiložením svých údajů k řešení další série.

<sup>3</sup>V dřívějších letech se při výpočtu koeficientu zohledňovalo i zaměření třídy řešitele. V současnosti se však již tento údaj nezapočítává.

Tento vzorec lze interpretovat tak, že kružnice  $\ell$  je obrazem kružnice získané dle postupu uvedeného výše pro koeficient  $6 - \kappa$  v osově souměrnosti podle osy  $AC$ , jinak zůstává postup stejný.

Nakonec zbývá případ  $\kappa = 3$  – tehdy je prostě  $v = h$ . Lze si to představit tak, že střed  $S$  je „v nekonečnu“, tudíž se kružnice změnila na přímku  $AC$ .

### **Další detaily a statistiky úloh**

Kromě výsledného bodového zisku lze ve výsledkové listině najít i další údaje. Je v ní po řadě uvedeno jméno, příjmení, třída, zkratka školy, reálné body za jednotlivé příklady a celkové body za sérii.

Do závěrečného hodnocení se počítají všechny série, takže se vyplatí poslat z každé série byť jen jedinou úlohu. Co se naopak nevyplatí, je poslat řešení pozdě: jak ses mohl již v minulých letech přesvědčit, netolerujeme žádné zpoždění! Tedy pokud pošleš své řešení pozdě, sice Ti ho opravíme, ale body za něj nečekej.