Finální myš-maš

4. jarní série — Termín odeslání: 10. května 2021

V této sérii nejsou úlohy řazeny podle obtížnosti, ale podle témat (v rámci každého tématu je jedna úloha snazší a jedna obtížnější). Pozor, počítají se body za všechny úlohy!

Úloha 1.

(a) V obdélníku $ABCD$ leží E na straně BC a F na straně CD tak, že AEF je rovnostranný trojúhelník. Nechť je M střed úsečky AF. Dokažte, že trojúhelník BCM je rovnostranný. (2 body)

(b) V obdélníku $ABCD$ leží E na straně BC a F na straně CD tak, že $|BE| = |DF|$ a $|\sphericalangle EAF| = 45°$. Dokažte, že obsah trojúhelníku AEF je roven součtu obsahů trojúhelníků ABE a ADF. (3 body)

Úloha 2.

(a) V čtyřúhelníku $ABCD$ jsou úhlopříčky AC, BD kolmé a protínají se v bodě O. Součet poloměrů kružnic vepsaných trojúhelníkům AOB a COD je stejný jako součet poloměrů kružnic vepsaných trojúhelníkům BOC a DOA. Dokažte, že čtyřúhelník $ABCD$ je symetrický podle jedné ze svých úhlopříček. (2 body)

(b) Je dáno prvočíslo $p > 3$. Nechť K značí počet takových permutací $(a_1, \dots, a_p)$ množiny $\{1, \dots, p\}$, že číslo

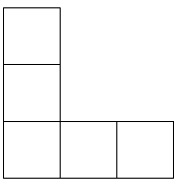
$$a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{p-1}a_p + a_pa_1$$

je násobkem p. Dokažte, že $K + p$ je násobkem p^2. (3 body)

Úloha 3.

(a) Do políček tabulky $n \times n$ jsou vepsána čísla 1 až n^2 (každé právě jednou). Dokažte, že rozdíl čísel v některých dvou políčkách, která spolu sousedí stranou nebo vrcholem, je alespoň $n + 1$. (2 body)

(b) Mějme kostičku ve tvaru rovnoramenného L složeného z pěti čtverečků (jako na obrázku), kterou lze otáčet. Kolik nejméně takových kostiček musíme položit na šachovnici 10×10, aby se už nedala přiložit žádná další?



(3 body)

Úloha 4.

(a) Ve čtverci $ABCD$ s délkou strany 2 leží na stranách AB a CD po řadě body E a F. Označme X průsečík přímek AF a DE a Y průsečík přímek BF a CE. Dokažte, že délka úsečky XY je vždy alespoň 1, ať už jsou body E, F zvolené jakkoli. (2 body)

(b) Řekneme, že konečná množina bodů v rovině je *pospolitá*, pokud pro každé tři její body existuje jednotkový kruh, který tyto body obsahuje. Dokažte, že každou pospolitou množinu lze pokrýt jednotkovým kruhem. (3 body)

Úloha 5.

(a) Sedm orgů se střídá v hlídání trezoru se vzorovým řešením myš-maše. Každý org má sedmihodinovou směnu, která začíná každý den ve stejnou dobu v celou hodinu a během níž trezor hlídá. Směny jsou rozvrženy tak, aby trezor v každém okamžiku hlídal aspoň jeden org. Rozhodněte, zda v každém takovém rozvržení směn existuje org, kterého můžeme propustit a přitom zachovat, že i potom bude trezor hlídán 24 hodin denně. (2 body)

(b) Máme n červených a n modrých karet, na každé z nichž je nějaké číslo od 1 do n (čísla se mohou opakovat). Je vždy možné vybrat několik modrých a několik červených karet tak, aby měly modrá a červená skupinka stejný součet? (3 body)

Úloha 6.

(a) Čísla 1 až 26 rozdělíme do dvojic (a, b), z nichž následně vyrobíme zlomky $\frac{a}{b}$. Určete, kolik nejvíce z těchto zlomků může být celočíselných. (2 body)

(b) Řekněme, že dvě přirozená čísla jsou si *blízká*, je-li jejich největší společný dělitel roven jejich rozdílu. Určete, pro která n lze zvolit n čísel takových, že každá dvě z nich jsou si blízká.

(3 body)

Úloha 7.

(a) V čtyřúhelníku $ABCD$ je M střed AB a N střed CD. Úsečky AN, DM se protínají v K, zatímco BN, CM se protínají v L. Dokažte, že součet obsahů trojúhelníků AMK a CNL je stejný jako součet obsahů BML a DNK. (2 body)

(b) Kružnice α, β se protínají v bodech X a Y. Kružnice γ se dotýká kružnice α v bodě A a kružnice β v bodě B. Dokažte, že osy úhlů $\sphericalangle XAY$ a $\sphericalangle XBY$ se protínají na úsečce XY.

(3 body)