Finální myš-maš

4. JARNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

(a) *Vašek má doma lustr s 25 žárovkami. Jedna z nich je uprostřed lustru, zbylé tvoří pravidelný 24-úhelník na jeho obvodu. Duch Rado se rozhodl Vaška postrašit, a tak některé žárovky zhasl a některé rozsvítil. Vašek má vypínače, pomocí nichž může provádět následující:*

(1) *Buď vybere některé dvě žárovky na obvodu, které mezi sebou mají lichý počet žárovek, a změní stav těchto dvou žárovek a také stav žárovky uprostřed.*
(2) *Nebo vezme tři žárovky na obvodu, které tvoří rovnostranný trojúhelník, a změní jejich stav a také stav žárovky uprostřed.*

Dokažte, že ať původně Rado žárovky nastavil jakkoliv, může Vašek dosáhnout toho, aby byly všechny žárovky na lustru rozsvícené. *(Magdaléna Mišinová)*

(b) *Upír Marian má rakev tvaru lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD. Budiž E průsečíkem jeho úhlopříček, dále jako G označme průsečík výšek trojúhelníku BCE a jako H označme průsečík výšek trojúhelníku ADE. Dokažte, že přímka procházející středem úsečky GH a bodem E je kolmá na přímku AB.* *(Magdaléna Mišinová)*

ŘEŠENÍ:

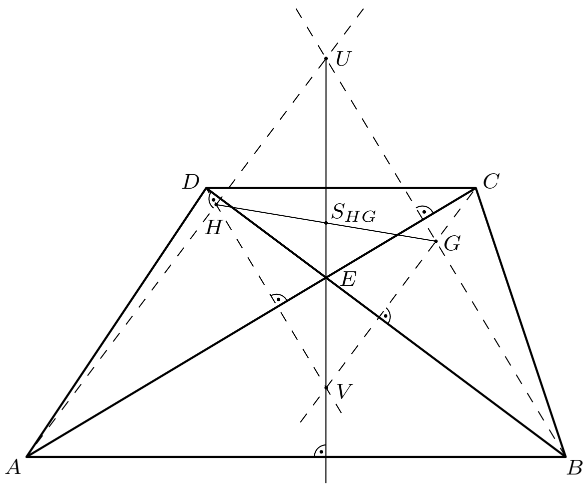
(a) Obvodových žárovek je 24, takže pokud zvolíme nějakou trojici žárovek A, B, C takovou, že jsou každé dvě od sebe odděleny sedmi žárovkami, pak budou A, B, C tvořit rovnostranný trojúhelník. Akcí (2) můžeme změnit stav A, B, C i středové žárovky. Protože mezi B a C je sedm žárovek, můžeme použít akci (1) a opětovně přepnout B, C a žárovku ve středu lustru. Celkem jsme jednou změnili stav A, zatímco B, C a středovou žárovku jsme přepnuli dvakrát, a tedy jsme je vrátili do původního stavu, v jakém byly před akcí (2). Přitom ke každé obvodové žárovce je možné najít dvě další, s nimiž tato žárovka tvoří rovnostranný trojúhelník, a na nich lze provést zmíněný postup. Díky tomu jsme schopni změnit stav libovolné obvodové žárovky, aniž bychom ovlivnili zbytek lustru.

Pokud je středová žárovka na začátku zhaslá, měl by ji Vašek nejdříve rozsvítit. To udělá třeba tak, že zvolí nějaké dvě žárovky oddělené od sebe jednou žárovkou a na nich provede akci (1). Pak vždy vybere žárovku na obvodu lustru, která ještě nesvítí, a zmíněným použitím akce (2) a (1) ji rozsvítí, aniž by ovlivnil zbylé žárovky. Takto může Vašek rozsvítit veškeré žárovky na obvodu lustru, a protože na začátku zařídil, aby svítila i žárovka prostřední, povedlo se mu rozsvítit celý lustr.

(b) Označme po řadě ortocentra trojúhelníků ABE a CDE jako U a V. Pak na přímce EU leží výška na stranu AB trojúhelníku ABE, a tudíž je $EU \perp AB$. Obdobně na přímce EV leží výška na stranu CD trojúhelníku CDE, takže $EV \perp CD$. Protože $ABCD$ je lichoběžník, platí $EV \perp AB$. Přímky EU a EV jsou proto totožné, neboť jsou obě kolmé na AB a prochází stejným bodem E.

H je ortocentrum ADE a U je ortocentrum ABE, takže přímka AH odpovídá výšce trojúhelníku ADE vedené z vrcholu A, přímka AU odpovídá výšce trojúhelníku ABE vedené z vrcholu A, přičemž tyto výšky splývají, neboť $E \in BD$. Proto A, H a U leží na stejné přímce, která je kolmá na BD. Obdobně trojice vrcholů (V, H, D), (V, G, C), (U, G, B) leží vždy na téže přímce a platí $HV \perp AC$, $VG \perp BD$, $GU \perp AC$ a $UH \perp BD$. Z toho plyne, že $HV \parallel GU$ a $VG \parallel UH$, takže $HVGU$ je rovnoběžník.

V rovnoběžnících se půlí úhlopříčky, tudíž S_{HG}, střed úsečky HG, leží na úsečce UV. Již ale víme, že na UV leží E a že $UV \perp AB$. Tedy přímka daná body S_{HG} a E splývá s přímkou UV, jež je kolmá na AB, čímž je tvrzení dokázáno.



Poznámky:
V úloze (a) lze lustr rozsvítit různými způsoby, a proto se příchozí řešení ubírala různými směry. Skoro všechny navržené postupy ale byly správné. Stejně tak důkazy úlohy (b). *(Matěj Gajdoš)*

Úloha 2.

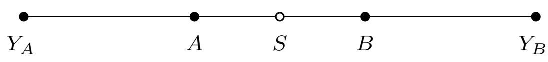
(a) *Žabák Dláža se nachází ve vnitřním bodě úsečky AB různém od jejího středu. Když říkáme, že Dláža přeskočí nějaký bod X, znamená to, že se z bodu D přesune do bodu D', který leží na polopřímce opačné k XD a splňuje $|XD'| = \frac{1}{2}|XD|$. Dláža si každou minutu vybere jeden z bodů A, B a přeskočí jej. Rozhodněte, zdali se dovede v konečném čase dostat do středu úsečky AB.*

(Magdaléna Mišinová)

(b) *V trojúhelníku ABC jsou D, E, F paty výšek po řadě z vrcholů A, B, C. Označme kružnici opsanou AEF jako Γ. Kružnice ω_1 se dotýká Γ v bodě E a prochází bodem D, analogicky se kružnice ω_2 dotýká Γ v bodě F a prochází bodem D. Druhým průsečíkem ω_1 s ω_2 je bod P různý od D. Dokažte, že body B, C, P leží na jedné přímce.* *(Matěj Doležálek)*

Řešení:
(a) Nechť je S střed úsečky AB. Ukážeme, že pokud Dláža v S nezačínal, pak se tam nikdy nedostane.

BÚNO si představme úsečku AB jako vodorovnou o délce 1, přičemž A je nalevo od B. Vzhledem k tomu, že v S Dláža nezačíná, musel by se tam dostat skokem z jistého bodu Y_A. Pokud by skákal přes A, muselo by se toto Y_A nacházet nalevo od A ve vzdálenosti 1, jelikož bod S leží napravo od A ve vzdálenosti $\frac{1}{2}$. Obdobně pokud by skákal přes B, musel by vycházet z bodu Y_B, který leží napravo od B ve vzdálenosti 1.



Tvrdíme, že Dláža se neumí dostat do S; k tomu stačí ukázat, že se nikdy nedostane do Y_A a ani do Y_B. Na začátku Dláža určitě stojí ve vnitřním bodě úsečky Y_AY_B, stačí proto ukázat, že skokem z vnitřku této úsečky opět vždy skončí v jejím vnitřku. Nechť se BÚNO jedná o skok přes A a nechť Dláža skáče z nějakého bodu D do bodu D'. Od krajních bodů Y_A a Y_B je bod A vzdálen 1 a 2, takže určitě $|AD| < 2$. To pak znamená $|AD'| < \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. Přitom ale všechny body ve vzdálenosti od A ostře menší než 1 leží uvnitř Y_AY_B, takže D' skutečně je opět vnitřní bod Y_AY_B.

Tím je dokázáno, že se Dláža nikdy nedostane do Y_A či Y_B, takže se nemůže dostat ani do S.

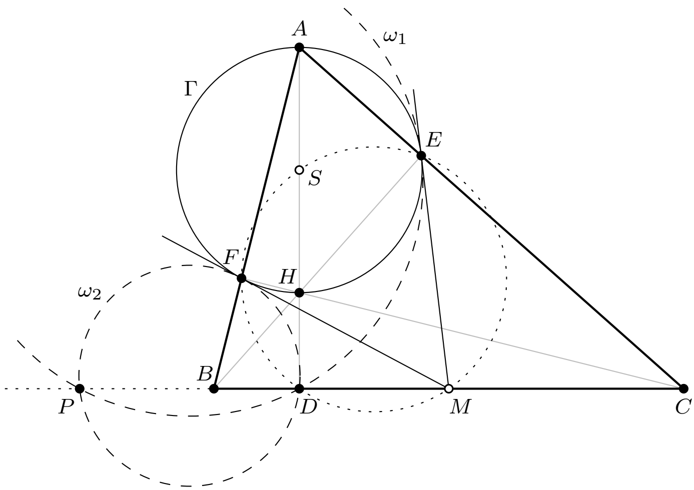
Alternativní řešení:
Úsečku AB si tentokrát představme na číselné ose BÚNO tak, že $A = -1$ a $B = 1$, a tedy $S = 0$.

Uvažme Dlážův skok z D přes X do D'. Jelikož X je vždy A nebo B, jedná se o celé číslo. Pokud by i D' mělo být celé, znamená to, že $|XD'|$ je celé číslo, takže i $|XD| = 2 \cdot |XD'|$ je celé, tudíž i samotný bod D je celé číslo. Jinými slovy: aby Dláža doskočil do celého čísla, musí už skok začínat v celém čísle.

My však víme, že Dláža začíná kdesi na otevřeném intervalu $(-1, 1)$, avšak ne v 0. To už znamená, že začíná v bodě, který není celočíselný, takže se už nikdy nedovede dostat do jakéhokoliv celočíselného bodu, a tedy ani do S.

(b) V řešení využijeme mocnost, chordály a potenční střed.[1] Přímka DP bude chordálou kružnic ω_1 a ω_2. Jelikož bod D už leží na přímce BC, zadání po nás chce jenom dokázat, že zmíněná chordála je totožná s přímkou BC. Toho docílíme tím, že ukážeme, že střed M strany BC je potenčním středem kružnic Γ, ω_1, ω_2.

Potenční střed je z definice průsečíkem tří chordál. Zajímejme se tedy o chordálu Γ s ω_1 a chordálu Γ s ω_2. Jelikož se obě dvojice kružnic dotýkají, chordály jsou v tomto případě jednoduše jejich tečny v bodech dotyku. Tudíž aby M byl náš potenční střed, stačí dokázat, že ME a MF jsou tečny ke kružnici Γ.



Označme jako H kolmiště v ABC a jako S střed úsečky AH. Díky pravým úhlům $|\sphericalangle AEH| = |\sphericalangle AFH| = 90^\circ$ je kružnice Γ Tháletovou kružnicí nad průměrem AH, takže S je její střed. Aby tedy ME, MF byly tečny ke Γ, musíme ukázat, že $|\sphericalangle SEM| = |\sphericalangle SFM| = 90^\circ$.

[1]Pokud se s těmito pojmy nekamarádíš, jejich shrnutí lze najít třeba v tomto příspěvku: *https://prase.cz//library/MocnostHR/MocnostHR.pdf*.

K tomu využijeme Feuerbachovu kružnici.[2] Na té leží středy stran, paty výšek i středy úseček spojujících vrcholy s kolmištěm, v našem obrázku tedy body D, E, F, M i S. Vidíme však, že S leží na výšce z vrcholu A, takže $|\sphericalangle SDM| = 90°$. Tedy SM je průměrem Feuerbachovy kružnice, což už implikuje $|\sphericalangle SEM| = |\sphericalangle SFM| = 90°$, jak jsme chtěli.

Potom jsou tedy ME i MF tečnami ke Γ, takže jde o její chordály s ω_1, ω_2, tudíž je bod M potenčním středem našich tří kružnici, pročež musí přímka PD, jsouc chordálou ω_1 s ω_2, taktéž procházet bodem M. Toto už značí, že B, C, P leží na jedné přímce.

Poznamenejme, že využíváme $D \neq M$ (kdyby tyto body splynuly, neurčí nám chordálu ω_1, ω_2 jednoznačně). To však můžeme předpokládat, protože $D = M$ by znamenalo, že trojúhelník ABC by byl rovnoramenný se základnou BC, načež by ω_1, ω_2 by zdegenerovaly do přímek – to lze vidět třeba z toho, že ED by měla být tečnou k ω_1 v bodě E, přesto však prochází jejím dalším bodem D, což pro nedegenerovanou kružnici nemůže nastat (obdobně totéž pro ω_2).

Poznámky:
Řešení části (a) se sešlo mnoho. Nadchla mne řešení využívající celočíselnosti po vhodném nabúnování úsečky AB na číselnou osu, pročež jsem jim zpravidla uděloval $+i$. Naopak jsem občas bod strhl u těch řešení, která si představila zpětný chod Dlážova skákání ze středu, a pouze pozorováním několika prvních hodnot bez řádného důkazu prohlásila, že tyto skoky nutně Dlážu vzdalují dál a dál od krajů úsečky.

V části (b) se sešlo méně řešení, nicméně většina postupovala správně a pomocí mocnosti podobně jako vzorové řešení.

K úspěchu se šlo dobrat i bez použití mocnosti – lze vyúhlit, že středy ω_1, ω_2 leží na jedné kružnici s S, D, a z toho následně vyvodit, že jejich spojnice je rovnoběžná s SD, načež již řešení úlohy snadno vyplývá. *(Matěj Doležálek)*

Úloha 3.

(a) *Najděte všechny dvojice prvočísel p, q takové, že $3^p + 4^q$ je druhou mocninou přirozeného čísla.* *(Natália Bátorová)*

(b) *Jsou dána prvočísla p_1, p_2. Další členy posloupnosti $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou definovány tak, že p_n je největší prvočíselný dělitel čísla $p_{n-1} + p_{n-2} + 2022$. Dokažte, že ať už jsou p_1, p_2 zvolena jakkoliv, umíme najít reálné číslo C takové, že $p_n \leq C$ pro všechna n.* *(Magdaléna Mišinová)*

Řešení:
(a) Začněme tím, že si vztah vyjádříme pomocí rovnice

$$3^p + 4^q = n^2,$$

kde n je přirozené číslo. Nyní se na tuto rovnici podíváme modulo 4:

$$3^p + 4^q \equiv 3^p \equiv n^2 \pmod 4.$$

Dále se zaměříme na zbytky. Všimněme si, že n^2 musí být vždy liché, je-li tomu tak, dostaneme zbytek 1. Pak si uvědomíme, že 3^p má zbytek 1 právě tehdy, když p je sudé. Jediné sudé prvočíslo je 2, tudíž $p = 2$.

Získáváme $3^2 + 4^q = 9 + 4^q = n^2$, tedy

$$4^q = 2^{2q} = n^2 - 9 = (n+3)(n-3) = a \cdot b.$$

To znamená, že a a b jsou nějaké mocniny dvou, pro které platí, že jejich rozdíl je 6. Všimněme si, že a musí být vždy alespoň dvakrát větší než b, a proto b je nejvýše 4, jinak by rozdíl byl již moc

[2] Pokud se s Feuerbachovou kružnicí nekamarádíš, její shrnutí lze najít třeba v tomto příspěvku: *https://prase.cz//library/FeuerbachEulerHR/FeuerbachEulerHR.pdf*.

velký. Pak prostým vyzkoušením všech mocnin dvojky od 1 do 4 zjistíme, že rovnice je splněna právě tehdy, když $a = 8$ a $b = 2$, z toho dostáváme, že q se musí rovnat 2.

Získáme jediné řešení, a to $p = q = 2$. Nyní jen ověříme, že získaná dvojice prvočísel skutečně je řešením, a opravdu: $3^2 + 4^2 = 5^2$.

(b) Začněme definicí funkce $\mathrm{Max}(n) := \max(p_{n-1}, p_{n-2})$ a posloupnosti a_n předpisem $a_n = p_{n-1} + p_{n-2} + 2022$. Následně ukážeme, že p_n je nejvýše $\mathrm{Max}(n) + 2024$.

Nechť a_n je liché, pak p_{n-1} nebo p_{n-2} musí být 2, tedy a_n bude nejvýše

$$\mathrm{Max}(n) + 2 + 2022 = \max(p_{n-1}, p_{n-2}) + 2024.$$

Protože p_n dělí daný součet, nebude větší.

Nechť a_n je sudé, pak platí následující:

$$2p_n \leq a_n \leq 2\,\mathrm{Max}(n) + 2022 \leq 2(\mathrm{Max}(n) + 2024).$$

První nerovnost platí ze sudosti a_n, druhá z toho, že $\mathrm{Max}(n)$ je horní odhad na prvočísla v předpisu a_n.

Nyní musíme ukázat, že pro p_1 a p_2 umíme najít 2024 po sobě jdoucích čísel, která jsou složená neboli tvoří jakousi bariéru, přes kterou neumíme přeskočit z prvočísla na prvočíslo. Všimněme si, že $a \cdot 2025! + i$ je dělitelné i, pro $2 \leq i \leq 2025$.

A nakonec nastavíme a, aby platilo $\mathrm{Max}(3) < a \cdot 2025! + i$. Stačí položit $a = \mathrm{Max}(3)$, pak $C = \mathrm{Max}(3) \cdot 2025! + 2$.

Poznámky:

Přišla spousta správných řešení. Většina řešitelů postupovala obdobně. Nemám co k tomu dodat, než popřát krásné prázdniny. *(Vojta „Dláža“ Gaďurek)*

Úloha 4.

(a) *Daník rozmístil čísla* 1, 2, . . . , 8 *do vrcholů krychle. Potom na každou hranu napsal součet čísel ve vrcholech, jež spojuje. Rozhodněte, zdali mohl čísla do vrcholů rozmístit tak, aby byly součty na hranách navzájem různé.* *(Marian Poljak)*

(b) *Na Matfyzu studuje n matematiků, n fyziků a n informatiků. Každý Matfyzák má alespoň $n + 1$ kamarádů*[3] *mezi Matfyzáky z jiného oboru než svého. Dokažte, že můžeme zvolit jednoho matematika, jednoho fyzika a jednoho informatika, kteří jsou navzájem kamarádi.*

(Marian Poljak)

Řešení:

(a) Čísla do vrcholů rozmístit nelze. Pojďme to dokázat sporem.

Mějme takové rozložení čísel, které splňuje požadavek v zadání. Krychle má celkem 12 hran. Možné součty (bez opakování) jsou $3, 4, \ldots, 15$. Je jich tedy celkem 13. To znamená, že právě jeden z těchto součtů se nebude vyskytovat na žádné hraně, kdežto každý ze zbylých součtů na nějaké hraně bude.

Uvědomme si, že každý roh krychle má 3 vrcholy, se kterými sdílí hranu, přičemž žádné dva z nich nesdílí hranu spolu.

Jak teď dál? Inu, pojďme se podívat na nějaké podezřelé součty a na to, jak by musela krychle vypadat, kdyby na ní byly. Které že jsou ty podezřelé? Ty, jež lze získat pouze jedním způsobem. Konkrétně jsou to:

(1) součet 3 – získaný jako $1 + 2$,
(2) součet 4 – získaný jako $1 + 3$,
(3) součet 14 – získaný jako $6 + 8$,
(4) součet 15 – získaný jako $7 + 8$.

[3] Kamarádství je symetrické.

Tyto „podezřelé“ součty pak můžeme rozdělit do dvou dvojiček – jedné s číslem 1 a druhé s číslem 8. Víme, že alespoň jedna z těchto dvojiček musí být zastoupena oběma součty (druhá pak alespoň jedním).

(i) Nechť je oběma součty zastoupena dvojice s 1. Pak má na krychli vrchol 1 sousedy 2 a 3. Jelikož ty ale spolu nesousedí, součet 5 lze získat pouze jako $1 + 4$. Máme tedy i třetího souseda čísla 1, a to 4. Pak ale všechny možnosti, jak získat součet 6 jsou nemožné, neboť nesousedí žádná ze dvojic čísel $(1, 5)$ a $(2, 4)$. Součet 6 musí být tedy ten jediný nevyskytující se součet.

(ii) Nechť je oběma součty zastoupena dvojice s 8. Pak obdobným způsobem jako výše získáme, že sousedé 8 jsou 7, 6 a 5 a nijak neumíme získat součet 12. Ten pak musí být ten jediný nevyskytující se.

Ale ouha, v obou případech nám vychází, že jediný nevyskytující se součet není mezi našimi podezřelými součty, tedy se na krychli vyskytují všechny 4 součty a nutně platí obě možnosti zároveň. Pak ale platí, že na krychli nebude ani součet 6, ani 12, tudíž už nemohou být všechny součty různé a dostáváme spor.

(b) I na tuto úlohu pojďme sporem. Nechť taková trojice matfyzáků neexistuje. Vyberme si matfyzáka, který má největší počet kamarádů z jednoho oboru (tedy takového, který má větší ze svých dvou počtů kamarádů co největší). BÚNO nechť je to matematik Milan a má největší počet kamarádů roven x, přičemž ti kamarádi jsou z fyziky. Pak všichni ostatní matfyzáci mají v každém oboru, co není jejich, nanejvýš x kamarádů. Milan má celkem alespoň $n + 1$ kamarádů, tedy mezi informatiky má alespoň $n + 1 - x$ kamarádů.

Pojďme se podívat na Milanovu kamarádku z informatiky Irenu a její kamarády fyziky (taková jistě existuje, protože každý matfyzák se nutně kamarádí alespoň s jedním člověkem z každého oboru mimo ten svůj). Víme, že se nekamarádí s žádným Milanovým kamarádem fyzikem, protože to by existovala trojice ze zadání, a ta z předpokladu neexistuje. Mezi fyziky může mít tedy nanejvýš $n - x$ kamarádů (jelikož těch Milanových je tam x). Irena má však alespoň $n + 1$ kamarádů. To znamená, že mezi matematiky má alespoň $x + 1$ kamarádů. Víme ale, že může mít nanejvýš x, dostáváme se tak do sporu.

Tedy ano, vždy lze zvolit jednoho matematika, jednoho fyzika a jednoho informatika, co jsou navzájem kamarádi.

Poznámky:

Všichni řešitelé se zvládli s částí (a) poprat skvěle. Mnozí si práci ušetřili tak, že sečetli možné hodnoty součtů a od vzniklého čísla odečetli trojnásobek součtu $1+2+\cdots+8$, čímž získali konkrétní hodnotu, která na žádné hraně nebude. Pak rozebírali méně možností.

Do části (b) se pustilo méně odvážlivců, přičemž většina správných řešení se ubírala podobnou cestou jako to vzorové. Někteří se pokoušeli o indukci, kdy odebírali studenty ze všech oborů, ale nijak nezaručili, že podmínka ze zadání o počtu kamarádů bude stále platit. Za taková řešení jsem bohužel žádné body udělit nemohla. *(Adéla Karolína „Áďa“ Žáčková)*

Úloha 5.

(a) *Je dáno přirozené číslo n. Najděte n-prvkovou množinu S přirozených čísel takovou, že její prvky jsou po dvou nesoudělné a pro každou neprázdnou podmnožinu $A \subseteq S$ je aritmetický průměr prvků A celé číslo.* *(Zdeněk Pezlar)*

(b) *V PraSestánu se nachází n měst, z nichž některá jsou spojena obousměrnou leteckou linkou společnosti PraSér, přičemž se lze letecky dopravit mezi libovolnými dvěma městy. PraSér má ve městě M pobočku, právě pokud z něj vede ostře více linek, než je aritmetický průměr počtů linek vedoucích ze všech měst spojených leteckou linkou s M. Určete, kolik nejvíce poboček může PraSér pro dané n mít.* *(Radek Olšák)*

Řešení:

(a) Vyhovuje množina $S = \{i \cdot n! + 1;\ i \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}\}$.

Dokažme, že má po dvou nesoudělné prvky. Pro spor předpokládejme, že jsou dva soudělné nějakým prvočíslem. Tedy že pro $i > j$ a prvočíslo p platí

$$p \mid i \cdot n! + 1,$$
$$p \mid j \cdot n! + 1.$$

Pak p musí dělit i rozdíl:

$$p \mid (i - j) \cdot n!.$$

Naše p tedy dělí $i - j$ nebo $n!$. Ovšem $i, j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, takže platí $i - j < n$ a $i - j \mid n!$. Z toho plyne, že prvočíslo p každopádně dělí $n!$, pak ale dělí taky $i \cdot n!$ a nemůže dělit $i \cdot n! + 1$, což je spor. Žádné dva prvky proto nejsou soudělné.

Dále dokažme, že má každá neprázdná podmnožina $A \subseteq S$ celočíselný průměr. Všechny prvky S totiž dávají zbytek 1 po dělení čísly $1, 2, \ldots, n$. Přesněji, pokud máme k-prvkovou podmnožinu $A = \{a_1 \cdot n! + 1, a_2 \cdot n! + 1, \ldots, a_k \cdot n! + 1\}$, pak je její aritmetický průměr roven

$$\frac{a_1 \cdot n! + 1 + \cdots + a_k \cdot n! + 1}{k} = \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)n! + k}{k} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \cdot \frac{n!}{k} + 1,$$

a $k \mid n!$, protože $k \le n$, takže výsledný průměr je opravdu celé číslo.

(b) Může mít nejvýše $n - 2$ poboček.

Nejprve ukážeme, že PraSér může mít aspoň $n - 2$ poboček. Tolik jich bude, když bude v PraSestánu linka mezi každou dvojicí měst kromě jedné.[4] Pak bude pobočka v každém z $n - 2$ měst, která jsou spojena $n - 1$ linkami se všemi městy, jelikož průměrný počet linek ze všech měst je určitě menší než $n - 1$, protože některá města mají $n - 1$ a některá $n - 2$ linek.

Nyní dokážeme, že poboček nemůže být víc než $n - 2$. Nejprve si všimněme, že z každého města M s pobočkou musí vést linka do města, ze kterého vede méně linek než z M. Aby byl průměr počtů linek z měst spojených s M menší (než počet linek vedoucích z M), musel by být počet linek menší aspoň u jednoho z nich. Tak nahlédneme, že ve městě, ze kterého vede nejméně linek, není pobočka. Z toho plyne, že poboček nemůže být n.

Pro spor tedy předpokládejme, že je jich $n - 1$.

Z předchozí úvahy vidíme, že když je měst s nejmenším počtem linek víc, není pobočka v žádném z nich. Čili, když je více než jedno, je už poboček méně než $n - 1$, takže takové město musí být jen jedno. Nazvěme ho A. Ve všech ostatních městech jsou pobočky. Označme jako *sídla* ta města, v nichž se nachází pobočka. Zaměřme se na sídla s nejmenším počtem linek, nechť jich je k. Jak víme, každé musí být spojeno s městem s ještě méně linkami, což je jedině A. Z města A tedy vede aspoň k linek. Budeme chtít ukázat, že jelikož z A vede hodně linek a ze sídel jich vede ještě více, musí z našich k sídel vést příliš mnoho linek i do ostatních sídel (tedy sídel s vyšším počtem linek).

Nechť tedy z každého z našich k sídel vede ℓ linek, kde $\ell \ge k + 1$. Uvažme jedno z nich, označme je B. Ze sídla B vede jedna linka do A, odkud vede k linek, zbytek vede do měst, odkud jich vede víc, přičemž nejvýše $k - 1$ linek může vést do zbylých $k - 1$ sídel s nejméně linkami (ℓ linkami). Tím jsme ale spotřebovali nejvýše k linek, takže jich ještě aspoň $\ell - k$ vede do sídel s alespoň $\ell + 1$ linkami. Pro p, aritmetický průměr počtů linek z měst spojených s B, můžeme tedy napsat

$$p \ge \frac{k + (k - 1)\ell + (\ell - k)(\ell + 1)}{\ell} = \frac{k + \ell^2 - k}{\ell} = \ell.$$

Průměr není menší než počet linek z B, to znamená, že v B nemůže být pobočka, což je kýžený spor s předpokladem, že máme $n - 1$ poboček.

[4] Pro $n = 2$ by se pak nedalo dopravit mezi libovolnými dvěma městy, ovšem tam je aspoň $n - 2 = 0$ poboček určitě.

Poznámky:

V podúloze (a) řešitelé za účelem nesoudělnosti vymysleli i šílenější množiny, například množinu $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, kde $s_1 = 1$ a $s_{i+1} = s_1 \cdot s_2 \cdots s_i \cdot n! + 1$, anebo $s_1 = n! + 1$ a $s_{i+1} = s_i! + 1$. Předpisem $s_{i+1} = s_i \cdot n! + 1$, který se taky vyskytoval, ale nesoudělnost zaručena není.

V podúloze (b) si někteří správně všimli, že v případě $n = 1$ bude asi těžko $n - 2$ poboček. Chyba je bohužel u orgů, kteří měli zadat $n \geq 2$, protože pro jedno město není průměr měst s ním spojených vůbec definovaný. *(Matouš Šafránek)*

Úloha 6.

(a) *Natka našla přirozené číslo $a > 1$ zapsané v desítkové soustavě bez přebytečných nul na začátku. Poté jej napsala dvakrát za sebou a vzniklé číslo s dvojnásobným počtem cifer označila jako b. S překvapením zjistila, že b je násobkem a^2. Zjistěte, jakých hodnot může nabývat zlomek $\frac{b}{a^2}$.* *(Matěj Doležálek)*

(b) *Michal dostal čtverec papíru $ABCD$ a přehnul ho podle přímky ℓ tak, aby se vrchol A přesunul na bod A' na úsečce BC. Označme E průsečík přímky ℓ se stranou AB a F průsečík ℓ se stranou CD. Vrchol D se přehnutím přesunul do bodu D'. Průsečík $A'D'$ a CD označme jako H. Ukažte, že součet obvodů trojúhelníků EBA' a $D'FH$ je roven obvodu trojúhelníku $A'CH$.* *(Magdaléna Mišinová)*

Řešení:

(a) Číslo a můžeme jednoznačně zapsat jakou součet $a = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot 10^i$, kde a_i jsou číslice a n je počet číslic a. Stejně tak číslo b můžeme pomocí stejných číslic zapsat jako

$$b = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot 10^i + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot 10^{n+i} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot 10^i \cdot (10^n + 1) = (10^n + 1) \cdot a.$$

Označíme-li $k = \frac{b}{a^2}$ hledaný zlomek (který má být ze zadání celým číslem), pak můžeme upravit

$$k = \frac{b}{a^2} = \frac{(10^n + 1) \cdot a}{a^2} = \frac{10^n + 1}{a}.$$

Takže platí $k \cdot a = 10^n + 1$.

Ale protože n je počet cifer a, můžeme odhadnout $1 \cdot 10^{n-1} \leq a < 1 \cdot 10^n$, tj.

$$k \cdot 10^{n-1} \leq ka = 10^n + 1 < k \cdot 10^n.$$

Z první nerovnosti dostáváme $k \leq 11$ a z druhé $k > 1$. Vyřadíme ještě případ $k = 11$: platí $11 \cdot 10^{n-1} = 10^n + 10^{n-1}$, takže musí také platit $10^{n-1} \leq 1$, ale to platí pouze v případě, že $n = 1$, takže máme $11 \cdot a = 10 + 1$, jinými slovy $a = 1$, což ale zadání zakazuje.

Takže jsme odhadli $2 \leq k \leq 10$. Z rovnosti $k \cdot a = 10^n + 1$ vidíme, že $10^n + 1$ je násobkem k. Zřejmě $10^n + 1$ není dělitelné 2 ani 5; ciferný součet je 2, tedy není dělitelné ani 3 – těmito čísly tedy nemůže být dělitelné ani k. Jediné vyhovující k, které není dělitelné 2, 3 ani 5, je 7. Jinými slovy, jediná možná celočíselná hodnota zlomku $\frac{b}{a^2}$ je 7.

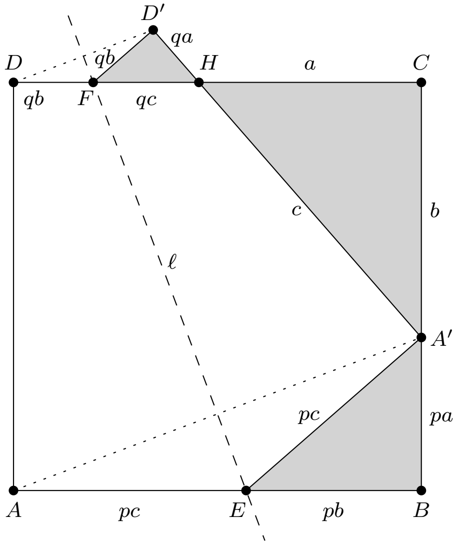
Na závěr ověříme, že existuje nějaké a, že $k = 7$. Takovým a je např. $\frac{10^3+1}{7} = 143$ – skutečně platí, že $\frac{143143}{143^2} = 7$.

(b) Obvod trojúhelníku XYZ značíme jako o_{XYZ}.

Protože úhel $\sphericalangle EA'D'$ je přehnutý úhel $\sphericalangle EAD$ a úhel $\sphericalangle A'D'F$ je přehnutý úhel $\sphericalangle ADF$, jsou všechny tyto úhly pravé. Úhly $\sphericalangle A'HC$ a $D'HF$ jsou vrcholové a mají proto stejnou velikost; úhly $\sphericalangle BA'E$ a $\sphericalangle CAH'$ dají dohromady $90\,^\circ$. Z toho vyplývá, že trojúhelníky $\triangle EBA'$, $\triangle A'CH$ a

$\triangle FD'H$ jsou podobné podle věty uu (jsou pravoúhlé a ukázali jsme vždy stejnou velikost jednoho zbývajícího úhlu).

Označme $|CH| = a$, $|A'C| = b$ a $|A'H| = c$. Z podobnosti trojúhelníků $\triangle EBA'$, $\triangle A'CH$ a $\triangle FD'H$ pak existují kladná čísla p, q taková, že $|A'B| = pa$, $|BE| = pb$ a $|A'E| = pc$, analogicky $|D'H| = qa$, $|D'F| = qb$ a $|FH| = qc$.



Přehnutím $A'E$ dle ℓ dostáváme $|AE| = |A'E| = pc$, zároveň přehnutím $A'D'$ máme $|AD| = |A'D'| = |A'H| + |D'H| = c + qa$, konečně přehnutím $D'F$ získáme $|DF| = |D'F| = qb$. Z rovnosti délek stran čtverce $ABCD$ můžeme odvodit

$$|AB| = |BC| \implies pc + pb = pa + b,$$
$$|CD| = |AD| \implies a + qc + qb = c + qa,$$

tedy úpravou $b = p(c + b - a)$ a $c - a = q(c + b - a)$. Sečtením rovnic máme

$$c + b - a = (p + q)(c + b - a),$$

z trojúhelníkové nerovnosti platí $c + b > a$, tj. $c + b - a \neq 0$, a proto je $p + q = 1$.

Ale poměr jakýchkoli délek v podobných trojúhelnících je roven jejich koeficientu podobnosti, tj. máme

$$o_{A'CH} = (p + q)o_{A'CH} = o_{EBA'} + o_{HD'F},$$

jak jsme chtěli ukázat.

Poznámky:

Podúlohu (a) vyřešila drtivá většina jejích řešitelů správně. Za co jsem ale strhával bod, bylo buď připuštění případu $a = 1$ (řešení $(a, b) = (1, 11)$ splňuje téměř všechny podmínky úlohy až na $a > 1$); nebo opomenutí případu $b/a^2 = 11$, které typicky vzniklo nedbalými odhady ($\frac{10^n+1}{10^n-1}$ je ostře menší než 11 až na jeden případ, a to když $n = 1$).

Vzhledem k tomu, že podúlohu (b) řešilo méně řešitelů, takřka každé řešení bylo originální. Jako vzorové jsem zvolil to dle *Dominika Rigasze*, které podle mě bylo nejelegantnější; častým postupem bylo též úhlení (opravdu pozoruhodné je pozorování, že A je připsištěm trojúhelníku $\triangle A'CH$); ale našla se i řešení pomocí goniometrie nebo dokreslování dalších užitečných bodů (jako např. průmět A na úsečku $A'H$ nebo A' orotované o 90° okolo vrcholu A).

Zadání úlohy (b) nespecifikovalo, zda se počítá i s krajními případy, kdy některé z bodů A', D' splynou s vrcholy čtverce; v takovém případě je buď úloha degenerovaná, nebo není dobře definovaná. Okomentování krajních případů jsem ale v řešení nepožadoval a jeho absenci bodově nepenalizoval. *(Daniel Perout)*

Úloha 7.

(a) *Jsou dána reálná čísla a, b, c, d a kvadratické funkce f, g splňující*

$$f(a) = 2, \qquad f(b) = 3, \qquad f(c) = 7, \qquad f(d) = 10,$$
$$g(a) = 16, \qquad g(b) = 15, \qquad g(c) = 11.$$

Určete všechny možné hodnoty $g(d)$. *(Magdaléna Mišinová)*

(b) *Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{R}$, jež pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ splňují*

$$f(x)^2 \cdot f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 64x.$$

(Natália Bátorová)

Řešení:

(a) Podívejme se na kvadratickou funkci $h(x) = f(x) + g(x)$. Všimněme si, že

$$h(a) = h(b) = h(c) = 18.$$

Funkce $h(x) - 18$ má tedy tři kořeny, a, b a c. Tato funkce je kvadratická, tedy pokud má tři kořeny, tak už je identicky nulová: platí $h - 18 = 0$ pro každé x. Proto platí i

$$18 = h(d) = f(d) + g(d) = 10 + g(d),$$

jediná možná hodnota $g(d)$ je proto 8.

Pro úplnost uveďme příklad vyhovující dvojice funkcí a čtveřice čísel: např. pro $f(x) = x$ a $g(x) = 18 - x$ funguje $a = 2$, $b = 3$, $c = 7$ a $d = 10$. Jiná možnost je

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + 2$$

a $g(x) = 18 - f(x)$ pro $a = 0$, $b = 3$, $c = 5$ a $d = 6$.

(b) V celém řešení pracujme s x různými od $0, 1$ a -1. Nejprve dokážeme, že funkce f pro čísla z definičního oboru nenabývá hodnoty 0. Pokud by bylo $f(t) = 0$ pro nějaké t, pak

$$0 = f(t)^2 f\left(\frac{1-t}{1+t}\right) = 64t,$$

tedy $t = 0$, což je spor, jelikož 0 neleží v definičním oboru funkce f. Označme $g : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ funkci danou předpisem $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Všimněme si, že pro x z definičního oboru funkce $g(x)$ nenabývá hodnot 0, 1 ani -1 pro žádné reálné x. Klíčové pozorování je, že

$$g(g(x)) = \frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{1 + \frac{1-x}{1+x}} = x.$$

Tyto úpravy jsou korektní, jelikož $g(x)$ není nikdy rovné -1.

Vraťme se k naší úloze. Máme dáno

$$f(x)^2 f(g(x)) = 64x$$

pro každé $x \notin \{-1, 0, 1\}$. Speciálně si zafixujme libovolné $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ a do této rovnosti dosadíme $x = t$ a $x = g(t)$. Už víme, že $g(t)$ leží v oboru hodnot f, tedy obdržíme

$$\begin{aligned} f(t)^2 f(g(t)) &= 64t, \\ f(g(t))^2 f(t) &= 64g(t). \end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme $f(g(t))$ (jelikož $f(t) \neq 0$) a dosadíme do druhé, získáme

$$f(t)^3 = \frac{64t^2}{g(t)} = \frac{64t^2(t+1)}{1-t}.$$

Toto platí pro každé $t \notin \{0, 1, -1\}$, proto jediné možné řešení je

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{64x^2(x+1)}{1-x}}.$$

Dosazením do původní rovnice ověříme, že tato funkce skutečně rovnici vyhovuje (jak laskavý čtenář dosvědčí). Tím pádem je jejím jediným řešením.

Poznámky:

V části (a) většinou nebyl problém, jediný kámen úrazu bývala nedostatečná argumentace. V části (b) bylo třeba si dávat pozor na více věcí – hlavně na diskuzi oboru hodnot funkce f. Chválím všechny, kteří si s těmito překážkami bez problému poradili. Pro ostatní platí, dávejte pozor, abyste nedělili nulou, hlavně ve funkcionálních rovnicích. A dělejte zkoušku! *(Zdeněk Pezlar)*