Finální myš-maš

4. jarní série | Vzorové řešení

Úloha 1.

(a) *Michal namaloval nedegenerovaný trojúhelník ABC s délkami stran $a \le b \le c$. Všiml si, že tři štětce, které použil, mají přesně délky jednotlivých výšek v trojúhelníku ABC. Když se však z těchto štětců pokusil složit nedegenerovaný trojúhelník, zjistil, že to nejde. Dokažte, že pak už musí platit nerovnost $b^2 > ac$.* *(Matěj Doležálek)*

(b) *Malíř Dláža namaloval pravidelný $(2n+1)$-úhelník. Malířky Klátra a Klárka hrají hru, při níž se střídají v tazích a Klátra začíná. Ve svém tahu namalují dosud nenamalovanou úhlopříčku $(2n+1)$-úhelníku, která protne sudý počet již namalovaných úhlopříček ve vnitřních bodech. Malířka, která nemůže táhnout, prohrává. Zjistěte v závislosti na n, kdo má vyhrávající strategii.* *(Josef Minařík)*

Řešení:

(a) Označme délky výšek našeho trojúhelníka v_a, v_b, v_c. Ze vzorce pro obsah trojúhelníka máme

$$S = \frac{1}{2}av_a = \frac{1}{2}bv_b = \frac{1}{2}cv_c,$$

což nám dává

$$v_c \le v_b \le v_a.$$

Jestliže z výšek nelze postavit nedegenerovaný trojúhelník, musí porušovat trojúhelníkovou nerovnost. Jediná nerovnost, která by mohla být porušena, je ta pro nejdelší výšku, tedy

$$v_a \ge v_b + v_c.$$

Dosaďme vztah pro obsah do předchozí nerovnosti

$$\begin{aligned} \frac{2S}{a} &\ge \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c}, \\ \frac{1}{a} &\ge \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \\ bc &\ge ac + ab, \\ b(c-a) &\ge ac. \end{aligned}$$

Teď už jsme ale téměř hotovi, protože podle trojúhelníkové nerovnosti v ABC platí

$$\begin{aligned} a + b &> c, \\ b &> c - a, \end{aligned}$$

a proto

$$b^2 > b(c-a) \ge ac.$$

(b) Ukážeme, že nezávisle na tom, jak Klátra a Klárka hrají, bude na konci hry zbývat sudý počet nenamalovaných úhlopříček. Pro spor tedy předpokládejme, že je nenamalovaných úhlopříček lichý počet a už není možné táhnout.

V této situaci každou nenamalovanou úhlopříčku protíná lichý počet těch již namalovaných. Nechť XY je libovolná nenamalovaná úhlopříčka. XY dělí mnohoúhelník na dvě části, označíme-li počty vrcholů v jednotlivých částech jako a a b, platí $a + b = 2n - 1$. Součet $a + b$ je lichý, což znamená, že právě jedno z čísel a a b je sudé, takže součin ab je také sudý. Úhlopříčku XY tedy protíná sudý počet úhlopříček, z nichž je lichý počet namalovaných. Počet nenamalovaných úhlopříček protínajících XY proto musí být lichý.

Úhlopříčku XY jsme mohli zvolit libovolně, takže každá nenamalovaná úhlopříčka protíná lichý počet nenamalovaných úhlopříček. Teď už si jen stačí vzpomenout na třetí úlohu první jarní série! Uvažme počet protnutí nenamalované úhlopříčky se zbylými nenamalovanými úhlopříčkami a sečtěme tyto počty. Musí nám vyjít dvojnásobek počtu dvojic protínajících se úhlopříček (tj. sudé číslo), ale určili jsme, že sčítáme lichý počet lichých čísel, což sudé být nemůže, čímž dostáváme spor.

Dokázali jsme, že na konci hry bude zbývat sudý počet nenamalovaných úhlopříček. Celkový počet úhlopříček v $(2n+1)$-úhelníku je $(2n+1)(n-1)$, takže je sudý právě tehdy, když je n liché. Pro sudé n tedy vyhraje Klátra a pro liché n Klárka. Přitom vůbec nezáleží na tom, jak Klátra a Klárka hrají.

Poznámky:

První úlohu řešili téměř všichni stejně, ale našlo se i několik řešení, která nerovnost dokázala s pomocí trochy goniometrie.

Alternativní řešení druhé úlohy se dívá na paritu počtu možných tahů v každé pozici. Tato parita se totiž každým tahem změní, takže dojdeme ke stejnému závěru jako ve vzorovém řešení.

(Josef Minařík)

Úloha 2.

(a) *Dokažte, že pro každé přirozené číslo n má n^2 více dělitelů dávajících zbytek 1 po dělení čtyřmi než dělitelů dávajících zbytek 3 po dělení čtyřmi.* *(Josef Minařík)*

(b) *Nechť $n \geq 2$ a uvažujme kladná reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ splňující*

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Ukažte, že platí $\max(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq 4\min(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. *(Pavel Hudec)*

Řešení:

(a) Postupujme matematickou indukcí dle počtu rozdílných prvočísel dělících n. Je-li tento počet nulový, tj. není-li n dělitelné žádným prvočíslem, pak $n = 1$, a proto má n^2 jediného dělitele, kterým je číslo 1, tedy tvrzení ze zadání platí.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro přirozené číslo n, a ukažme, že pak platí i pro přirozené číslo $x = n \cdot p^a$, kde p je prvočíslo nesoudělné s n. Označíme-li počty dělitelů čísla n^2 dávajících po dělení čtyřmi zbytek 1 jako j a počet dělitelů dávajících zbytek 3 jako t, můžeme indukční předpoklad zapsat ve tvaru $j > t$. Umocněním x získáme $x^2 = n^2 \cdot p^{2a}$, z čehož vidíme, že dělitelé čísla x^2 jsou právě dělitelé čísla n^2 vynásobení nějakou (nezápornou) mocninou prvočísla p.

Nyní rozebereme několik případů v závislosti na tom, jaký dává p zbytek po dělení čtyřmi.

(1) Nechť je $p \equiv 1 \pmod 4$. Vynásobíme-li libovolného dělitele čísla n^2 nějakou mocninou prvočísla p, nezmění se jeho zbytek po dělení čtyřmi, proto je počet dělitelů čísla $n^2 \cdot p^{2a}$, kteří dávají zbytek 1, roven $j \cdot (2a+1)$. Počet dělitelů, kteří dávají zbytek 3, bude $t \cdot (2a+1)$, aplikací indukčního předpokladu dostáváme $j \cdot (2a+1) > t \cdot (2a+1)$, čímž jsme v tomto případě hotovi.

(2) V případě $p = 2$ má číslo $x^2 = n^2 \cdot p^{2a}$ stejný počet dělitelů dávajících zbytek 1 a 3 jako číslo n^2, protože pro libovolné kladné a je p^{2a} sudé číslo, tedy přenásobením p^{2a} už nedostaneme číslo se zbytkem 1 nebo 3.

(3) Nakonec nechť $p \equiv 3 \pmod 4$, pak sudé mocniny prvočísla p dávají zbytek 1 a liché zbytek 3. Uvažme složené číslo xy dávající zbytek 1 mod 4, pak každý dělitel xy je tvaru $x'y'$, kde x' je liché, $x' \mid x$, $y' \mid y$ a $x' \equiv y' \pmod 4$. Abychom získali zbytek 1, stačí nám spárovat činitele se stejným zbytkem modulo 4, tj. j dělitelů n se sudými mocninami a t dělitelů n s lichými mocninami. Tudíž počet dělitelů čísla $x^2 = n^2 \cdot p^{2a}$ se zbytkem 1 je $j \cdot (a+1) + t \cdot a$ a symetricky těch, které dávají zbytek tři, je $t \cdot (a+1) + j \cdot a$. Platí

$$(j \cdot (a+1) + t \cdot a) - t \cdot (a+1) + j \cdot a = j - t.$$

Z indukčního předpokladu potom vyvodíme, že jde o rovnost kladných čísel, a proto má x^2 více dělitelů dávajících zbytek 1 než zbytek 3.

Platí základní i indukční krok, čímž je indukce dokázána a podúloha hotova.

(b) Označme $m = \min(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a $M = \max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Chceme ukázat, že potom platí $M \leq 4m$. Postupujme sporem: předpokládejme, že platí $M > 4m$. BÚNO nechť $m = a_{n-1}$, $M = a_n$. Potom označme

$$V = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right),$$

úpravou

$$V = \left(M + m + \sum_{i=1}^{n-2} a_i\right)\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{a_i}\right).$$

Roznásobením závorek získáme

$$V = 2 + \frac{M}{m} + \frac{m}{M} + \sum_{i=1}^{n-2}\left(\frac{M}{a_i} + \frac{m}{a_i} + \frac{a_i}{M} + \frac{a_i}{m}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n-2} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{a_i}\right).$$

Výraz $\left(\sum_{i=1}^{n-2} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{a_i}\right)$ lze odhadnout zespodu Cauchy-Schwarzovou nerovností, dostáváme

$$\left(\sum_{i=1}^{n-2} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{a_i}\right) \geq (n-2)^2.$$

Nyní odhadněme zdola součet $\frac{M}{m} + \frac{m}{M}$. Nejprve ukážeme, že funkce $f(x) = x + \frac{1}{x}$ je na intervalu $(1, \infty)$ rostoucí. Uvažme libovolné $y > x > 1$, potom platí

$$(x - y)\left(1 - \frac{1}{xy}\right) < 0,$$

jednoduchou úpravou dostaneme

$$f(x) = x + \frac{1}{x} < y + \frac{1}{y} = f(y),$$

což znamená, že funkce f je skutečně rostoucí.

Z monotonie funkce $x + \frac{1}{x}$ vidíme, že výraz $\frac{M}{m} + \frac{m}{M}$ bude minimální, když bude minimální $\frac{M}{m}$, tedy (z předpokladu) v hraničním případě $\frac{M}{m} = 4$. Dosazením dostáváme

$$\frac{M}{m} + \frac{m}{M} > \frac{17}{4}.$$

Zatím tedy máme

$$V > \frac{25}{4} + (n-2)^2 + \sum_{i=1}^{n-2} \left(\frac{M}{a_i} + \frac{a_i}{M} + \frac{m}{a_i} + \frac{a_i}{m} \right).$$

Zbývá nám už jen zdola omezit součet napravo. Pro všechna i, kde $1 \le i \le n-2$, dokážeme nerovnost $\frac{M}{a_i} + \frac{a_i}{M} + \frac{m}{a_i} + \frac{a_i}{m} \ge 5$: tu získáme pomocí

$$\frac{M}{a_i} + \frac{a_i}{M} + \frac{m}{a_i} + \frac{a_i}{m} = \left(\frac{M}{a_i} + \frac{a_i}{m} \right) + \left(\frac{a_i}{M} + \frac{m}{a_i} \right) \ge 2\sqrt{\frac{M}{m}} + 2\sqrt{\frac{m}{M}} \ge$$
$$\ge 2 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 5,$$

kde první nerovnost je dvojí použití AG nerovnosti. Druhá nerovnost plyne z rostoucnosti funkce $x + \frac{1}{x}$ pro $x > 1$: z předpokladu máme $M > 4m$, úpravou $\frac{M}{m} > 4$, tudíž platí $\sqrt{\frac{M}{m}} > 2$, a proto musí být $\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}} \ge 2 + \frac{1}{2}$.

Dostáváme tedy

$$\sum_{i=1}^{n-2} \left(\frac{M}{a_i} + \frac{a_i}{M} + \frac{m}{a_i} + \frac{a_i}{m} \right) \ge 5(n-2).$$

V kombinaci s předešlými odhady získáme

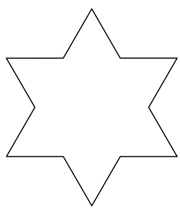
$$V > \frac{25}{4} + (n-2)^2 + 5(n-2) = n^2 - 4n + 5n + \frac{25}{4} + 4 - 10 = n^2 + n - \frac{1}{4} = \left(n - \frac{1}{2} \right)^2,$$

čímž jsme se dostali do sporu, a proto nerovnost $M \le 4m$ opravdu platí. Jinými slovy jsme právě dokázali $\max(a_1, a_2, \ldots, a_n) \le 4 \min(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Poznámky:
Většina řešitelů řešila pouze podúlohu (a). Velká část přijatých řešení správně určila, jak se mění zbytek po dělení čtyřmi při součinu více čísel. Indukcí dokazovalo tuto úlohu minimum řešitelů, častější způsob řešení byl pomocí párování prvočísel. Podúlohu (b) měla správně vypracovanou cca čtvrtina přijatých řešení. *(Terka Kučerová)*

Úloha 3.

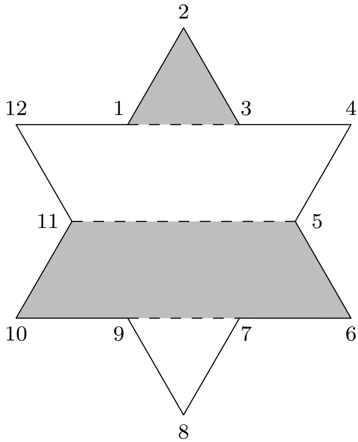
(a) *Rozdělte pravidelnou šesticípou hvězdu třemi rovnými řezy na čtyři části, ze kterých je možné složit konvexní mnohoúhelník. Šesticípá hvězda je tvořena šestiúhelníkem, nad jehož stranami jsou rovnostranné trojúhelníky.* *(Josef Minařík)*



(b) *Mějme ne nutně konvexní osmiúhelník $ABCDEFGH$ se všemi stranami stejně dlouhými takový, že $ACEG$ je rovnoběžník, body B, D leží uvnitř $ACEG$ a body F, H venku. Dokažte, že body B, D, F a H leží na jedné kružnici.* *(Radek Olšák)*

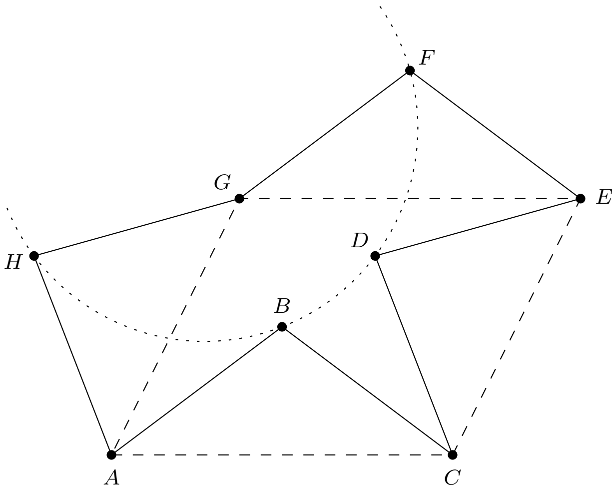
Řešení:

(a) Nejprve si očíslujeme vrcholy postupně od 1 do 12, kde jedna 1 je vrchol původního šestiúhelníku. Vedeme následující řezy mezi body 1 a 3, 5 a 11, 7 a 9. Získáme tak dva rovnostranné trojúhelníky a dva „hady“ tvořené pěti rovnostrannými trojúhelníky v řadě. Nyní jen vše dáme za sebe a vytvoříme „hada“ tvořeného dvanácti rovnostrannými trojúhelníky.



(b) (podle Daniely Strnadové)

Dokážeme, že $\sphericalangle DBH + \sphericalangle DFH = \sphericalangle BDF + \sphericalangle BHF$. Součet úhlů v čtyřúhelníku je 360°, proto $\sphericalangle DBH + \sphericalangle DFH = \sphericalangle BDF + \sphericalangle BHF = 180°$, a čtyřúhelník $BDFH$ bude tedy tětivový, což chceme ukázat.



Prvně si vyjádřeme úhly pomocí jiných, se kterými se nám bude lépe pracovat:

$$\sphericalangle DBH = 360° - \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABH - \sphericalangle CBD,$$
$$\sphericalangle BDF = 360° - \sphericalangle CDE - \sphericalangle BDC - \sphericalangle EDF.$$

U vyjádření úhlu DFH si musíme dát pozor na to, že vnitřní úhel osmiúhelníku u vrcholu G může, ale i nemusí být konvexní. Chceme-li tedy vyjádřit úhel DFH pomocí GFH, budeme ho v konvexním případě odečítat a v nekonvexním přičítat, tedy

$$\sphericalangle DFH = \sphericalangle EFG \mp \sphericalangle GFH - \sphericalangle EFD.$$

Analogickou úvahu provedeme i při vyjadřování úhlu BHF, tedy

$$\sphericalangle BHF = \sphericalangle AHG \mp \sphericalangle GHF - \sphericalangle AHB.$$

Oba úhly $\sphericalangle GFH$, $\sphericalangle GHF$ přičítáme, pokud je úhel u G nekonvexní, a odečítáme, pokud je konvexní. Znaménko u nich je proto stejné.

Dosazením všech čtyř rovností do $\sphericalangle DBH + \sphericalangle DFH = \sphericalangle BDF + \sphericalangle BHF$ zjistíme, že chceme dokázat

$$\begin{aligned} 360^\circ - \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABH - \sphericalangle CBD + \sphericalangle EFG \mp \sphericalangle GHF - \sphericalangle EFD = \\ = 360^\circ - \sphericalangle CDE - \sphericalangle BDC - \sphericalangle EDF + \sphericalangle AHG \mp \sphericalangle GFH - \sphericalangle AHB. \end{aligned}$$

Nyní si všimneme, že trojúhelníky ABH, CBD, GHF a EFD jsou rovnoramenné. Platí tedy

$$\begin{aligned} \sphericalangle ABH &= \sphericalangle AHB, \\ \sphericalangle CBD &= \sphericalangle BDC, \\ \sphericalangle GFH &= \sphericalangle GHF, \\ \sphericalangle EDF &= \sphericalangle EFD. \end{aligned}$$

Odečtením těchto shodných úhlů v dokazované rovnosti dostaneme

$$-\sphericalangle ABC + \sphericalangle EFG = -\sphericalangle CDE + \sphericalangle AHG.$$

Trojúhelníky ACB a GEF jsou shodné, protože jejich ramena mají stejnou délku a jejich základny jsou protější strany rovnoběžníku. Proto platí $-\sphericalangle ABC + \sphericalangle EFG = 0^\circ$. Analogicky ukážeme $-\sphericalangle CDE + \sphericalangle AHG = 0^\circ$.

Všechny úpravy byly ekvivalentní, platí tedy dokazovaná rovnost

$$\sphericalangle DBH + \sphericalangle DFH = \sphericalangle BDF + \sphericalangle BHF.$$

Poznámky:

V části (a) se sešlo vícero různých rozřezání hvězdy, způsob uvedený ve vzorovém řešení je jen jedním z mnoha. V části (b) mohly různé konfigurace obrázku vést k trochu jiným podobám úhlení, které však v řešení nečinily podstatný rozdíl. *(Vojta „Dláža“ Gaďurek)*

Úloha 4.

(a) *Budiž P polynom s celočíselnými koeficienty splňující $P(-2) = P(2) = 2$. Ukažte, že P nemá celočíselný kořen.* *(Lenka Kopfová)*

(b) *Budiž P polynom s celočíselnými koeficienty, jehož každý komplexní kořen je celé číslo a který splňuje $P(0) = 1$, $P(5) = 3456$. Jaký nejmenší stupeň může mít P?* *(Radek Olšák)*

Řešení:

(a) Pro spor předpokládejme, že existuje celé číslo z splňující $P(z) = 0$. Pro každá $a, b \in \mathbb{Z}$ platí

$$a - b \mid P(a) - P(b),$$

tedy $z - 2 \mid -2$ a $z + 2 \mid -2$, obě čísla jsou tedy děliteli -2. Čísla $z + 2$ a $z - 2$ proto patří do množiny $\{-2, -1, 1, 2\}$ a zároveň jejich rozdíl je $z + 2 - (z - 2) = 4$, nutně tedy $z - 2 = -2$ a $z + 2 = 2$, pročež $z = 0$.

Protože nula je kořen P, existuje celočíselný polynom Q splňující $P(x) = x \cdot Q(x)$. Potom

$$\begin{aligned} 2 &= P(2) = 2 \cdot Q(2), \\ 2 &= P(-2) = (-2) \cdot Q(-2), \end{aligned}$$

můžeme tak určit $Q(2) = 1$ a $Q(-2) = -1$. Z výše zmíněné dělitelnosti ale dostáváme

$$2 - (-2) \mid Q(2) - Q(-2),$$

což můžeme upravit na $4 \mid 2$, a to je spor. Polynom P tedy nemá celočíselný kořen.

(b) Polynom zřejmě není konstantní, existují proto přirozené číslo n, celá čísla $z_1, \ldots, z_n$ (kořeny) a číslo $a_n \neq 0$ (vedoucí koeficient) taková, že

$$P(x) = a_n (x - z_1) \cdots (x - z_n).$$

Dosadíme-li $x = 0$, dostaneme $1 = P(0) = a_n (-z_1) \cdots (-z_n)$, všechny kořeny i vedoucí koeficient pak budou rovny buď 1, nebo -1. Pro $x = 5$ budou všechny závorky rovny buď čtyřem, nebo šesti. Pokud by stupeň P byl nejvýše 4, pak

$$P(5) \leq 6^4 = 1296 < 3456.$$

Naopak pokud položíme $P(x) = (x-1)(x-1)(x+1)(x+1)(x+1)$, platí $P(0) = 1$ a $P(5) = 4^2 6^3 = 3456$. Nejmenší možný stupeň polynomu P je tedy pět.

Poznámky:

Většina řešení postupovala stejně jako vzorové. K drobnému zmatení docházelo v části (b): mezi komplexní čísla počítáme i reálná čísla, a proto polynom $P(x) = 691x + 1$ nevyhovuje zadání, neboť $-\frac{1}{691}$ sice je kořen $P(x)$, ale není celé číslo. *(Hedvika Ranošová)*

Úloha 5.

(a) *Najděte všechny trojice reálných čísel (x, y, z), jež splňují soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} xy &= z - x - y, \\ yz &= x - y - z, \\ zx &= y - z - x. \end{aligned}$$

(Václav Janáček)

(b) *Daník našel v lese n-tici kartiček s přirozenými čísly $x_1, \ldots, x_n$, jejichž součet je $2n - 1$. Tyto kartičky potom rozdělil na dvě hromádky A a B se součty po řadě S_A a S_B. V závislosti na hodnotách čísel $x_1, \ldots, x_n$ určete, jaké nejvyšší hodnoty mohl dosáhnout výraz $S_A \cdot S_B$.*

(Matěj Doležálek)

Řešení:

(a) Odečtením druhé rovnice od první dostáváme

$$y(x-z) = xy - yz = 2(z-x),$$

což můžeme upravit na tvar

$$(y+2)(x-z) = 0,$$

tedy nutně $y = -2$ nebo $x = z$. Protože soustava rovnic ze zadání je symetrická, mohli bychom podobně dostat také to, že platí $x = -2$ nebo $y = z$, a taktéž $z = -2$ nebo $x = y$. Máme dohromady osm možností, jak mohou tyto tři volby dopadnout. Zkusíme si je rozebrat na dva případy.

Pokud alespoň dvakrát ze tří voleb nastane rovnost proměnných (třeba $x = y$ a $y = z$), pak už nutně $x = y = z$. To můžeme dosadit do první rovnice a dostat tak $x^2 = -x$. Po úpravě obdržíme $x(x+1) = 0$, takže $x = 0$ nebo $x = -1$. Dostáváme tedy dvě řešení $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ a $(x, y, z) = (-1, -1, -1)$.

Zbývá možnost, kdy alespoň dvakrát ze tří voleb nastane rovnost proměnné s -2. BÚNO nechť $x = y = -2$. Dosazením do první rovnice ze zadání dostáváme

$$4 = (-2)(-2) = z - (-2) - (-2) = z + 4,$$

takže $z = 0$. Dostáváme tak řešení $(x, y, z) = (-2, -2, 0)$, analogicky z $y = z = -2$ a $z = x = -2$ vzejdou řešení $(-2, 0, -2)$ a $(0, -2, -2)$.

Celkově jsme tedy dostali pět různých řešení $(0, 0, 0)$, $(-1, -1, -1)$, $(-2, -2, 0)$, $(-2, 0, -2)$ a $(0, -2, -2)$. O tom, že tato řešení skutečně splňují zadání, se přesvědčíme zkouškou.

(b) Nejprve dokážeme, že čím blíž budou S_A, S_B k polovině jejich součtu, tím většího součinu dosáhneme. K tomu označme $k = \frac{2n-1}{2}$. Pak platí, že $S_A = k + a$ a $S_B = k - a$ pro nějaké vhodné reálné číslo a. Z toho

$$S_A \cdot S_B = (k+a)(k-a) = k^2 - a^2,$$

takže $S_A \cdot S_B$ je skutečně tím větší, čím blíž je S_A k číslu k. Jelikož S_A, S_B jsou přirozená čísla, tak bychom se nejblíže k $\frac{2n-1}{2}$ mohli dostat, pokud by $S_A = n$ a $S_B = n-1$ (nebo naopak). Dále proto dokážeme, že tohoto rozdělení lze vždy dosáhnout, ať už jsou hodnoty na kartách jakékoli. Budeme tedy chtít říct, že z n-tice přirozených čísel se součtem $2n-1$ umíme vždy vybrat podmnožinu se součtem n. Ukážeme dva různé způsoby, jak toto dokázat.

(1) BÚNO předpokládejme $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$. Nejprve ukážeme, že na alespoň $x_1 - 1$ kartičkách musí být jednička. Označme počet jedniček jako J. Odložme stranou kartičku x_1 a daných J jedniček, potom nám zbude $n - J - 1$ kartiček, z nichž každá musí mít hodnotu alespoň 2. Umíme tudíž celkový součet na kartičkách, který je roven $2n-1$, zdola odhadnout jako $x_1 + J + 2(n - J - 1)$. Úpravou nerovnosti

$$2n - 1 \geq x_1 + J + 2(n - J - 1)$$

pak dostáváme $J \geq x_1 - 1$.

Představme si nyní, že si postupně odebíráme kartičky v pořadí podle jejich hodnot, od x_1 k těm s nižší hodnotou. Zastavme se ve chvíli, kdy bychom si měli vzít kartičku, kterou přestřelíme cílový součet n. Nechť má tato kartička, kterou si už nevezmeme, hodnotu x_i. V tento okamžik musí být součet dosud vybraných kartiček určitě alespoň $n - x_i + 1$, jinak bychom totiž mohli vzít x_i a nepřestřelit. Pokud je x_i jednička a jejím vzetím bychom přestřelili n, tak to znamená, že součet dosud vybraných karet musí být přesně n, tudíž máme vyhráno. Pokud je $x_i > 1$, víme, že existuje ještě alespoň $x_1 - 1 \geq x_i - 1$ jedniček, z nichž jsme si žádnou dosud nevzali. Můžeme si jich tak vzít ten správný počet, abychom dostali celkový součet n.

(2) Nejprve si uvědomíme, že součet libovolné neprázdné podmnožiny kartiček je alespoň 1 a nanejvýš $2n-1$. Jediné číslo v tomto rozsahu, které je násobkem n, je samotné n. Vyplatí se nám tedy na hodnoty kartiček koukat modulo n a snažit se najít podmnožinu se součtem $0 \pmod{n}$. Budeme uvažovat tzv. *prefixové součty* posloupnosti $x_1, \dots, x_n$, což jsou hodnoty
$$S_i = x_1 + x_2 + \dots + x_i$$
pro $i = 1, \dots, n$. Takovýchto součtů máme právě n. Pokud se mezi nimi nachází zbytek $S_i \equiv 0 \pmod{n}$, tak už jsme vyhráli, protože prvních i kartiček dá součet n. Pokud zde naopak zbytek 0 chybí, tak máme jen $n-1$ možných zbytků v n-tici čísel S_i, tudíž se nějaký zbytek musí zopakovat. Nastane tak $S_i \equiv S_j \pmod{n}$ pro nějaká $i < j$, načež budou kartičky $x_{i+1}, \dots, x_j$ dávat součet $S_j - S_i \equiv 0 \pmod{n}$.

Oběma způsoby jsme tak dokázali, že umíme vybrat podmnožinu kartiček se součtem n, zbylé kartičky pak budou mít součet $n-1$. Součin těchto hodnot je n^2-n a výše jsme již ukázali, že toto je maximální hodnota výrazu $S_A \cdot S_B$, které můžeme dosáhnout.

POZNÁMKY:
Většina došlých řešení podúlohy (a) byla správná. Daná soustava totiž šla vyřešit skoro jakkoliv: sečtení/odečtení dvou rovnic, vyjádření např. proměnné z z první rovnice a dosazení do zbylých, přičtení jedničky na obě strany a rozklad na součin – to všechno jsou způsoby, jimiž se soustava dala vyřešit. Některá řešení byla sice trochu více rozebírací, ale většinou zdárně vedla k cíli. Častým kamenem úrazu bylo opomenutí zkoušky po nalezení řešení. Takovýto nedostatek je opravdu jednoduchou cestou, jak v olympiádě smutně ztratit bod – přitom často stačí i jen zmínit, že zkouška funguje či že úpravy byly ekvivalentní. *(Lenka Kopfová)*

Úloha 6.

(a) *Najděte všechny dvojice přirozených čísel m, n takové, že m^3-n je násobkem m^2-n, zatímco n^3-m je násobkem n^2-m.* *(Marian Poljak)*

(b) *Nechť L je množina všech lichých přirozených čísel. Najděte všechny funkce f z L do L takové, že pro všechny dvojice $x, y \in L$ je $xy+1$ násobkem $f(x)+f(y)$.* *(Matěj Doležálek)*

ŘEŠENÍ:
(a) Upravíme první dělitelnost ze zadání:
$$m^2 - n \mid m^3 - n,$$
$$m^2 - n \mid m^3 - n - m(m^2-n) = mn - n.$$

Z upravené dělitelnosti jsou vidět dvě možnosti: $mn-n=0$, nebo $|m^2-n| \le |mn-n|$, ale zároveň jsou čísla m a n přirozená. Proto v prvním případě platí $m=1$, z čehož nutně $m \le n$. V druhém $mn-n=(m-1)n \ge 0$, takže musí platit
$$m^2 - n \le |m^2-n| \le |mn-n| = mn-n,$$
$$m^2 \le mn,$$
$$m \le n.$$

Mohli jsme dělit číslem m, neboť je přirozené. V obou případech jsme došli k nerovnosti $m \le n$. Zadání je v proměnných m a n symetrické, zcela obdobně proto dokážeme $n \le m$, z čehož plyne $m=n$.

Nalezené řešení ověříme zkouškou:
$$m^2 - m = m(m-1) \mid m(m-1)(m+1) = m^3 - m,$$
tudíž $m=n$ opravdu vyhovuje zadání.

(b) Dokážeme, že jediná vyhovující funkce je $f(x) = 1$ pro všechna $x \in L$.

Nejprve do vztahu ze zadání za (x, y) dosadíme $(1, 1)$. Dostaneme $2f(1) \mid 2$. Protože $f(1) \in L$, už nutně $f(1) = 1$.

Nyní za (x, y) dosadíme postupně $(3, 1)$ a $(3, 3)$. Dostáváme $f(3) + 1 \mid 4$ a $2f(3) \mid 10$. Z první dělitelnosti zjistíme, že $f(3)$ je 1 nebo 3, z druhé pak, že $f(3)$ je 1 nebo 5. Tedy oběma dělitelnostem vyhovuje pouze $f(3) = 1$.

Postupným dosazením 1 a 3 za y dostaneme

$$f(x) + 1 \mid x + 1,$$
$$f(x) + 1 \mid 3x + 1,$$

z čehož vyplývá

$$f(x) + 1 \mid 3(x + 1) - (3x + 1) = 2.$$

Protože $f(x) \in L$, dostáváme $f(x) = 1$ pro všechna $x \in L$, jak jsme chtěli.

Zbývá ověřit, že tato funkce zadání opravdu vyhovuje. Pro všechna x a y z L platí $f(x)+f(y) = 2$ a zároveň je číslo $xy + 1$ sudé. Zadání je tím skutečně splněno.

Poznámky:
V první podúloze bylo nejčastější chybou opomenutí případu, kdy $mn - n = 0$. V druhé podúloze poměrně hodně řešitelů zapomnělo udělat zkoušku, což je důležitá část řešení. Proto jsem za to strhávala jeden bod. *(Magdaléna Mišinová)*

Úloha 7.

(a) *Je dána 2022-prvková množina M reálných čísel taková, že pro libovolná $a, b \in M$ je $a^2 + b\sqrt{2}$ racionální číslo. Dokažte, že pro každé $a \in M$ je rovněž $a\sqrt{2}$ racionální.* *(Magdaléna Mišinová)*

(b) *Kladná reálná čísla a, b, c splňují $abc = 1$. Dokažte, že platí*

$$\frac{1}{\sqrt{a + \frac{1}{b} + \frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{b + \frac{1}{c} + \frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{c + \frac{1}{a} + \frac{1}{2}}} \geq \sqrt{2}.$$

(Filip Čermák)

Řešení:

(a) Využijeme toho, že racionální čísla jsou uzavřená na sčítání, odčítání, násobení a dělení nenulovým číslem.

Zvolme dva různé prvky $a, b \in M$. Pak postupně dostaneme

$$a^2 + a\sqrt{2} \in \mathbb{Q}, \qquad (1)$$
$$b^2 + a\sqrt{2} \in \mathbb{Q}, \qquad (2)$$
$$a^2 + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}, \qquad (3)$$
$$(1) - (2): \quad a^2 - b^2 \in \mathbb{Q}, \qquad (4)$$
$$(1) - (3): \quad (a - b)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}, \qquad (5)$$
$$\frac{2 \cdot (4)}{(5)}: \quad \frac{2(a^2 - b^2)}{(a - b)\sqrt{2}} = \frac{2(a + b)}{\sqrt{2}} = (a + b)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}, \qquad (6)$$
$$\frac{(5) + (6)}{2}: \quad a\sqrt{2} \in \mathbb{Q}. \qquad (7)$$

Jelikož jsme prvky a a b volili libovolně, platí poslední vztah pro každé $a \in M$.

(b) (podle Michala Janíka)
Využijeme klasickou substituci

$$a = \frac{x}{y}, \quad b = \frac{y}{z}, \quad c = \frac{z}{x},$$

kterou můžeme použít právě díky $abc = 1$. Pak dostaneme pro kladná reálná čísla x, y, z bez další podmínky cyklickou[1] nerovnost tvaru

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{\sqrt{a + \frac{1}{b} + \frac{1}{2}}} = \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{1}{2}}} = \sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{y}{x + z + \frac{y}{2}}} \geq \sqrt{2},$$

z čehož po vydělení konstanty $\sqrt{2}$ dostáváme nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{y}{2x + 2z + y}} \geq 1.$$

Všimněme si, že nerovnost je homogenní, BÚNO tedy můžeme uvažovat, že platí $x + y + z = \frac{1}{2}$ (potom nutně $0 < x, y, z < \frac{1}{2}$). Nerovnost se tím zjednoduší na

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{y}{1 - y}} \geq 1.$$

Nyní dokažme, že pro $0 < x < \frac{1}{2}$ platí

$$\sqrt{\frac{x}{1 - x}} \geq 2x.$$

Jelikož jsou výrazy na obou stranách kladné, stačí dokázat, že $\dfrac{x}{1 - x} \geq 4x^2$. To lze ekvivalentně upravit na $1 \geq 4x(1 - x)$ a dále na

$$(2x - 1)^2 \geq 0.$$

Všechny úpravy byly díky kladnosti uvažovaných výrazů ekvivalentní, takže nerovnost platí, a dokonce vidíme, že rovnost by mohla nastat leda pro $x = \frac{1}{2}$.

V původní cyklické nerovnosti pak obdržíme

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{y}{1 - y}} \geq \sum_{\text{cyc}} 2y = 1,$$

přičemž rovnost nenastává, jelikož x, y, z jsou menší než $\frac{1}{2}$. Tím jsme hotovi.

Poznámky:
Došlá řešení úlohy (a) byla zpravidla přímočará. Úlohu (b) mnoho lidí nevyřešilo, ačkoliv několik řešení bylo hezkých. V jednom řešení se ukázalo, že úlohu lze „umlátit“ i roznásobením, umocněním a pár snadnými odhady. *(„madam Verča“ Hladíková)*

[1] V zápisu cyklických sum zkracujeme $V(x, y, z) + V(y, z, x) + V(z, x, y)$ jako $\sum_{\text{cyc}} V(x, y, z)$.