Finální myš-maš

4. JARNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

(a) *Michal a Samo byli na IMO v Japonsku a sledovali tam turnaj zápasníků sumo. Účastnilo se $n \geq 2$ zápasníků a zápasil každý s každým. Michal bohužel přišel pozdě, a tak neviděl jednotlivé zápasy, věděl pouze, kolikrát který zápasník vyhrál. Samo mu nechce prozradit, jak jednotlivé zápasy dopadly. Michal si ale o každém zápase může tipnout, kdo vyhrál, načež mu Samo poví, jestli si tipnul správně. Dokažte, že se Michal dokáže postupně zeptat na všechny zápasy a u více než poloviny správně uhodnout vítěze.*

(b) *José vybírá ve čtvercové mřížce 2023×2024 dva mřížové body A a B. Řekneme, že dva mřížové body X a Y jsou* propojené*, pokud jeden umíme zobrazit na druhý složením několika středových souměrností se středem v A nebo v B. Množinu mřížových bodů nazveme* veselou*, pokud jsou každé dva body v ní propojené a nelze k ní žádný mřížový bod přidat, aby to stále byla pravda. Nakonec José vybral body A a B tak, aby existovalo co nejméně veselých množin. Kolik jich je?*

ŘEŠENÍ:

(a) Michal si v každém kroku vybere libovolného zápasníka a podívá se na počet jeho výher a proher. Následně si u všech jeho zápasů tipne ten četnější výsledek. Takto si určitě tipnul alespoň polovinu ze zápasů tohoto zápasníka správně. Nyní zná výsledky těchto zápasů, a proto u každého zápasníka opět může dopočítat počty výher a proher v zápasech, které si ještě netipnul.

Původní turnaj tedy redukoval na turnaj s o jedna menším počtem lidí, a tak si zase může někoho vybrat, tipnout si u všech jeho zápasů (které si ještě netipl) ten častější výsledek a určitě se zase v alespoň polovině případů trefí.

Takto postupuje, dokud mu nezbývají dva lidé, pak ovšem zná výsledek posledního zápasu, tudíž vítěze uhodne správně. Výsledky zápasů byly tipovány po skupinkách, přičemž v každé skupince se trefil v alespoň polovině případů a v poslední dokonce ve více než polovině. Celkově se tedy také trefil ve více než polovině případů.

(b) Zkusme se podívat, kam všude se umíme dostat z libovolného bodu X pomocí středových souměrností podle A a B. Určitě nemá smysl použít dvakrát po sobě souměrnost podle stejného bodu, protože to nás nikam neposune. Do všech bodů ve stejné veselé množině se tedy umíme dostat střídáním souměrností (B), A, B, A, $B\ldots$

Následně si rozmyslíme, že náš bod X se po složení souměrnosti podle A a souměrnosti podle B nás dostane do bodu $X + 2(B - A)$, neboli posune se o dvojnásobek vektoru jdoucího z A do B (sčítáním a odčítáním bodů zde rozumíme příslušné operace na vektorech, které začínají v počátku a končí v příslušném bodě). To proto, že když uděláme souměrnost podle A, posune nás to do bodu $2A - X$(jde o bod, do kterého se dostaneme tak, že si stoupneme do bodu A a posuneme se o úsečku XA, vektorově zapsáno $A + (A - X) = 2A - X$). Tedy složením souměrností dle A a B se z X dostaneme do $2B - (2A - X) = X + 2(B - A)$. Ze stejného důvodu skládání v opačném pořadí nás bude posouvat o dvojnásobek opačného vektoru (posouvat na druhou stranu).

Tedy pokud použijeme sudý počet symetrií, budeme se posouvat o dvojnásobek tohoto vektoru, a ze stejného důvodu při použití lichého počtu symetrií se budeme posouvat o sudé násobky stejného vektoru, ovšem z jiné počáteční pozice. Klíčové pozorování je, že protože některá souřadnice vždy skáče alespoň o 2 (pokud by obě skákaly o 0, pak A je B a každá veselá množina má maximálně dva prvky, tudíž by jich bylo minimálně $2023 \cdot 1012$), můžeme se tímto skákáním dostat do maximálně $\frac{2024}{2} = 1012$ bodů uvnitř tabulky. Ještě můžeme použít lichý počet překlopení, čímž se dostaneme na druhou pomyslnou přímku, na které se ovšem také dostaneme do maximálně 1012 bodů tabulky.

Celkově tedy každá veselá množina má maximálně 2024 prvků. A v jednom případě to umíme ještě zesílit, totiž v případě, že X leží na přímce AB. Pak totiž každý propojený bod s X musí také ležet na AB, avšak zároveň na ní existují alespoň dvě veselé množiny. To proto, že například z bodu A se neumíme skákáním o vektor $2(B-A)$ ani o vektor $2(A-B)$ dostat do B, tedy A a B leží v různých veselých množinách.

A nyní to už jen spočítat: Dvě veselé množiny obsahující postupně A a B se rozkládají dohromady na maximálně 2024 bodech tabulky, a zbylé veselé množiny si musí rozdělit zbylých alespoň $2024 \cdot 2022$ bodů tabulky, a protože každá obsahuje maximálně 2024 prvků, musí takových být alespoň 2022, celkem tedy máme alespoň 2024 množin.

Nakonec ještě ukážeme, že 2024 je dosažitelné: Umístíme-li A a B do středu tabulky (tedy v kratším rozměru budou ležet přesně v polovině, v delším zabírat dvě prostřední políčka), pak jakýkoliv bod můžeme díky předchozím úvahám posouvat o 2 ve směru delšího rozměru tabulky, tedy tímto trefíme 1012 bodů, načež překlopením na druhou stranu od AB umíme vygenerovat dalších 1012. Opět bude výjimka přímka AB, na které leží 2 veselé množiny s velikostí pouze 1012. Celkem jsme tedy opravdu získali 2024 veselých množin.

Poznámky:

V části (a) postupovala velká většina jako vzorové řešení s drobnými obměnami (při lichém počtu tipneme víc než polovinu, indukcí, lehkým rozebíráním případů) a vysloužila si plné dva body. Některá řešení si nejdříve rozhodla, jak budou tipovat, a poté se neohlížela na průběžné výsledky tipů, což ale v některých případech selže.

V druhé části se řešení sešlo podstatně méně. Přestože však byla řešení na první pohled odlišná, využívala velmi podobné myšlenky řešení vzorovému. *(Vítek Hanika)*

Úloha 2.

(a) *Pomozte Vaškovi nalézt polyomino složené z dvaceti čtverečků, které lze rozdělit na pět shodných polyomin, ale nelze jej rozdělit na deset shodných polyomin.*

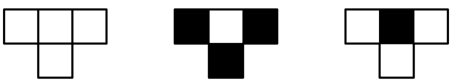
(b) *Je dáno prvočíslo p. Rozhodněte, zda může dělitelnost $n+p+1 \mid n^3+np+1$ být splněna pro přesně 2024 přirozených čísel n.*

Řešení:

(a)

Úmluva. Polyominům složeným ze čtyř čtverečků budeme říkat *tetromina*[1] a polyominům ze dvou čtverečků klasicky *domina*.

Vaškovo polyomino má dvacet čtverečků. Rozdělením na pět částí vzniknou tetromina, rozdělením na deset částí domina. Všimněme si, že pokud by každé z tetromin bylo možné rozdělit na dvě domina, celé Vaškovo polyomino by bylo možné rozdělit na domina. Proto musíme Vaškovo polyomino složit z tetromin, která nelze rozdělit na dvě domina. Pokud vyzkoušíme všechna tetromina, zjistíme, že tuto vlastnost má jenom „T“ tetromino.



[1]Toto označení se standardně používá, polyomina o třech čtverečcích jsou *triomina*, o pěti čtverečcích pak *pentomina*.

Nyní víme, že Vaškovo polyomino se musí skládat z pěti „T“ tetromin. Konstrukcí je zde možných hodně. Dokážeme, že fungují všechny, tedy že žádné takové polyomino nejde rozdělit na deset domin.

Obarvíme si Vaškovo polyomino jako šachovnici. Všimněme si, že každé „T“ tetromino nezávisle na umístění vždy obsahuje buď tři černá pole a jedno bílé nebo tři bílá pole a jedno černé. Když tedy Vaškovo polyomino rozdělíme na pět tetromin, každé z nich bude obsahovat lichý počet černých polí. Celkový počet černých polí ve Vaškově polyominu tedy bude součet pěti lichých čísel, takže bude vždycky lichý.

Pokud bychom Vaškovo polyomino pokryté šachovnicí rozdělili na deset domin, každé z domin bude obsahovat právě jeden černý čtvereček. To by ale černých čtverečků v polyominu muselo být přesně deset. My ale víme, že černých čtverečků je lichý počet, tudíž jich nemůže být deset. Proto žádné polyomino složené z pěti „T“ tetromin není možné rozdělit na deset domin.

(b) Nejprve dělitelnost upravíme tak, abychom se na pravé straně zbavili n. To lze udělat například odečtením vhodného násobku $n+p+1$ od pravé strany. Dostáváme

$$
\begin{aligned}
&n+p+1 \mid n^3+np+1-(n^2-np-n+p^2+3p+1)(n+p+1),\\
&n+p+1 \mid -p^3-4p^2-4p,\\
&n+p+1 \mid p(p+2)^2.
\end{aligned}
$$

Chceme zjistit, pro kolik různých $n \in \mathbb{N}$ je dělitelnost splněna. Snadno si všimneme, že takových n je právě tolik, kolik má číslo $p(p+2)^2$ dělitelů větších než $p+1$.

Nejprve zvlášť vyřešíme případ $p=2$. V tomto případě $p(p+2)^2=32$ a dělitelé 32 větší než $p+1=3$ jsou pouze čísla $4, 8, 16, 32$. Dělitelnost je tedy splněna pro přesně čtyři různá n a $4 \neq 2024$.

Pro zbytek výpočtu tedy předpokládejme, že p je liché. Když je p liché, $p \nmid (p+2)^2$. Pokud by totiž $p \mid (p+2)^2 = p^2+4p+4$, muselo by $p \mid 4$. Proto každý dělitel $p(p+2)^2$ obsahuje prvočíslo p v nejvýše první mocnině.

Označme D množinu dělitelů čísla $(p+2)^2$ a definujme si množinu $pD = \{pd \mid d \in D\}$ jako množinu čísel braných z D a násobených p. Všimněme si, že D obsahuje všechny dělitele $p(p+2)^2$, které nejsou násobky p (p nedělí žádný prvek D, protože nedělí $(p+2)^2$, zároveň každý dělitel $p(p+2)^2$, který není násobek p, musí dělit $(p+2)^2$). Množina pD pak obsahuje všechny dělitele $p(p+2)^2$, které jsou násobky p (každý dělitel obsahuje p v nejvýše první mocnině). Nakonec všechny dělitele $p(p+2)^2$ tedy získáme jako sjednocení disjunktních množin $D \cup pD$. Množiny jsou disjunktní, protože dělitel nemůže zároveň být a nebýt násobkem p,

Když nyní máme všechny dělitele $(p+2)^2$, zbývá zjistit, kolik z nich je větších než $p+1$. Vezměme dělitele z množiny D. Protože jsou to všichni dělitelé čísla $(p+2)^2$, můžeme je jednoznačně napárovat do dvojic $\left(d, \frac{(p+2)^2}{d}\right)$. Protože $(p+2)^2$ je druhou mocninou přirozeného čísla, máme navíc jednoho dělitele $p+2$, který je ve dvojici sám se sebou, toho prozatím vynechme. Počet vzniklých dvojic (bez $p+2$) označme k. Platí, že v každé dvojici je jeden dělitel větší a druhý menší než $\sqrt{(p+2)^2} = p+2$. Toto plyne z faktu, že $d \cdot \frac{(p+2)^2}{d} = (p+2)^2$. Snadno tedy spočítáme, že D obsahuje celkem $2k+1$ dělitelů, z nichž je právě $k+1$ větších než $p+1$.

Zbývá spočítat počet dělitelů větších než $p+1$ v množině pD. Zde je jediný dělitel menší než $p+1$ a sice p. Ostatní dělitelé jsou $\geq 2p$ a jelikož $p > 1$, tak jsou také větší než $p+1$. Množina pD má stejně prvků jako D a to $2k+1$. Proto počet dělitelů větších než $p+1$ v pD je $2k$.

Spočítali jsme tedy, že počet n, pro která je dělitelnost splněna, je roven $k+1+2k = 3k+1$, kde $k \in \mathbb{N}_0$ je nějaká konstanta závisející na p. Toto číslo dává po dělení třemi zbytek 1, zatímco $2024 \equiv 2 \pmod{3}$. Proto $3k+1 \neq 2024$. Proto dělitelnost nikdy nemůže být splněna pro přesně 2024 čísel n.

Poznámky:
První úlohu vyřešili skoro všichni. Nováčky a zapomnětlivce bych upozornil, že nestačí pouze uvést nebo nakreslit ono polyomino, je třeba alespoň krátce zdůvodnit, že splňuje požadavky ze zadání. Za konstrukci byl jeden bod, za důkaz druhý bod.

Druhá úloha byla obtížnější, troufli si na ni jenom někteří. Dost řešení bylo správně. Někteří při upravování nerovnosti došli k výrazu $n + p + 1 \mid (n-1)^2(n+1)$. Tato úprava, ač vypadala slibně, vedla spíše do pekel. *(Ondra Trinkewitz)*

Úloha 3.

(a) *Mezi rameny úhlu XOY jsou vepsány kružnice α a β. Kružnice α se dotýká polopřímek OX a OY po řadě v bodech A_1 a A_2 a kružnice β se OX a OY dotýká po řadě v bodech B_1 a B_2. Dokažte, že čtyřúhelníku $A_1A_2B_2B_1$ lze vepsat kružnici právě tehdy, pokud se α dotýká β.*

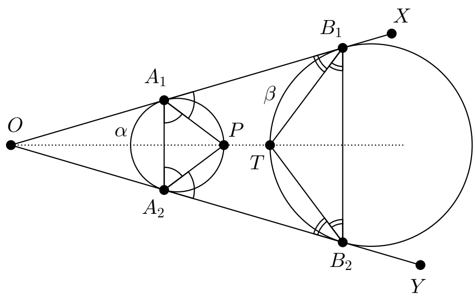
(b) *Je dán trojúhelník ABC, jehož obvod má délku 1. Kružnice ω se dotýká strany BC a také polopřímek opačných k polopřímkám BA, CA po řadě v bodech P, Q. Přímka procházející středy stran AB, AC protíná kružnici opsanou trojúhelníku APQ v bodech X, Y. Určete $|XY|$.*

Řešení:
(a) BÚNO je kružnice α blíž k O než kružnice β (když jsou kružnice totožné, tak ze čtyřúhelníku $A_1A_2B_2B_1$ dostaneme úsečku, které jistě nemůžeme vepsat kružnici). Využijeme toho, že střed kružnice vepsané existuje právě tehdy, když se všechny osy úhlů protínají v jednom bodě. Označme si tedy druhý průsečík osy úhlu $\sphericalangle A_2A_1B1$ a kružnice α jako bod P. Ukážeme si, že bod P leží i na ose $\sphericalangle A_1A_2B_2$.

Jelikož je OA_1 tečna k α, bude z úsekových úhlů platit $|\sphericalangle PA_1B_1| = |\sphericalangle A_1A_2P|$. Ještě ale víme, že A_1P je osa úhlu, takže platí, že $|\sphericalangle A_2A_1P| = |\sphericalangle PA_1B_1| = |\sphericalangle A_1A_2P|$. Takže trojúhelník A_1PA_2 je rovnoramenný a ze symetrie platí, že A_2P je osa $\sphericalangle A_1A_2B_2$ a bod P leží na ose $\sphericalangle XOY$.

Bod T si definujeme jako průsečík osy úhlu $\sphericalangle A_1B_1B_2$ a kružnice β. Obdobným postupem jako pro bod P dostaneme, že T leží i na osách $\sphericalangle XOY$ a $\sphericalangle B_1B_2A_2$.

Střed kružnice vepsané (a tedy i kružnice vepsaná) bude existovat právě tehdy, když se všechny osy úhlů protnou, což nastane právě tehdy, když $P = T$, tedy když se kružnice dotýkají.



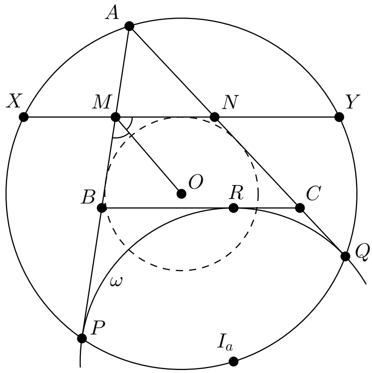
(b)

Řešení podle Jakuba Trčky:
Označme si středy úseček AB a AC postupně M a N. Kružnice ω je připsaná straně BC trojúhelníku ABC, její střed si označíme I_a, všimněme si, že jelikož $|\sphericalangle API_a| = |\sphericalangle AQI_a| = 90°$, bude I_a ležet na kružnici opsané APQ a AI_a bude její průměr.

Dále si označíme O střed kružnice opsané APQ. Když budeme nyní stejnolehlit kružnici ω se středem v A a koeficientem $\frac{1}{2}$, tak se nám zobrazí na kružnici připsanou straně MN trojúhelníku AMN (BC se zobrazí na MN, jelikož je to střední příčka). Dále se I_a zobrazí na O, takže je to střed kružnice připsané a musí ležet na ose vnějšího úhlu $\sphericalangle AMN$. To nám ve spojení s tím, že O je střed kružnice opsané APQ, dává, že úsečky AP a XY jsou osově souměrné podle MO, tedy $|XY| = |AP|$. Spočítáme si tedy tuto délku. Víme, že tečny z bodu ke kružnici jsou stejně dlouhé, tedy $|AP| = |AQ|$. Dále když si dokreslíme R jako bod dotyku BC a ω, bude platit, že $|BP| = |BR|$ a $|CQ| = |CR|$. Platí tedy, že

$$|XY| = |AP| = \frac{|AP| + |AQ|}{2} = \frac{|AB| + |BP| + |AC| + |CQ|}{2} = \\ = \frac{|AB| + |BR| + |RC| + |AC|}{2} = \frac{|AB| + |BC| + |AC|}{2} = \frac{1}{2}.$$

Platí tak, že $|XY| = \frac{1}{2}$.



Poznámky:
V podúloze (a) řada řešitelů využívala podmínku o součtu délek stran pro důkaz existence vepsané kružnice, z toho se ale pak hůř dokazovala ekvivalence. Řešení (b) dorazilo méně a postupy byly často velmi různé. Nejhezčí řešení měl *Jakub Trčka*, který si vysloužil $+i$. *(Káťa Danilina)*

Úloha 4.

(a) *Je dáno přirozené číslo n. Dokažte, že pro každé reálné x platí*

$$x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - \cdots + x^2 - x + 1 > \frac{1}{2}.$$

(b) *Jsou dána $x, y \in \mathbb{R}$. Dokažte, že lze zvolit $a, b \in \mathbb{Z}$ taková, že*

$$\left(x + a + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2 \leq \frac{1}{3}.$$

Řešení:

(a) Zadanou nerovnost nejprve ekvivalentně upravíme:

$$x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - \cdots + x^2 - x + 1 > \frac{1}{2},$$
$$x^{2n-1} \cdot (x-1) + x^{2n-3} \cdot (x-1) + \cdots + x \cdot (x-1) > -\frac{1}{2},$$
$$x \cdot (x-1) \cdot \left(x^{2n-2} + x^{2n-4} + \cdots + x^2 + 1\right) > -\frac{1}{2}.$$

Nyní si uvědomíme, že poslední závorka je kladná pro libovolné x (jakožto součet druhých mocnin a jedničky) a že $x \cdot (x-1) \geq 0$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus (0,1)$. Pro tato x je proto levá strana nezáporná a nerovnost tedy platí.

Pro $x \in (0,1)$ si původní nerovnost upravíme jinak. Všimneme si, že levá strana je vlastně geometrická posloupnost s počátečním členem 1 a kvocientem $-x$. Jelikož $x \neq -1$, můžeme použít vzorec pro součet této posloupnosti a získáme

$$x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - \cdots + x^2 - x + 1 = \frac{1 + x^{2n+1}}{1+x} > \frac{1+0}{1+1} = \frac{1}{2},$$

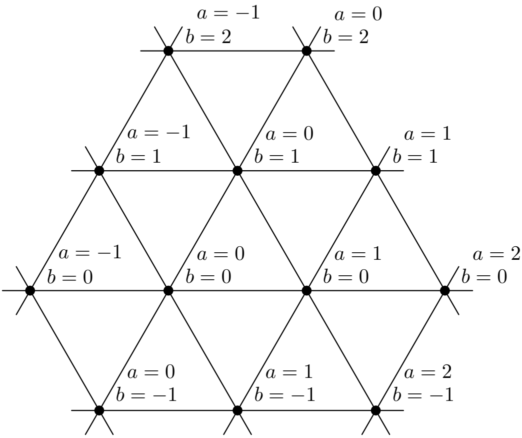
kde v poslední nerovnosti jsme užili faktu, že $0 < x < 1$. Tím je důkaz hotov.

(b) Úlohu budeme interpretovat geometricky. Zamysleme se nejprve nad následující nerovností:

$$\sqrt{\left(x - \left(a + \frac{b}{2}\right)\right)^2 + \left(y - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)\right)^2} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ukážeme-li, že pro každé x, $y \in \mathbb{R}$ existují a, $b \in \mathbb{Z}$ taková, že tato nerovnost platí, pak již nutně existují a', b' splňující nerovnost ze zadání (vezmeme $a' = -a$ a $b' = -b$). Chceme tedy ukázat, že když uvážíme libovolný bod $[x; y]$ v rovině, pak dokážeme zvolit bod (dále nazývejme „kotvící“) $\left[a + \frac{b}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}b\right]$ takový, že eukleidovská vzdálenost těchto dvou bodů bude nejvýše $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Rozmysleme si tedy, jak budou tyto kotvící body v rovině rozmístěny.

Nejprve si všimněme, že máme-li kotvící body $A = \left[a + \frac{b}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}b\right]$, $B = \left[a + 1 + \frac{b}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}b\right]$ a $C = \left[a + \frac{b+1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}(b+1)\right]$, pak $|AB| = |BC| = |CA| = 1$, neboli že tvoří rovnostranný trojúhelník. Na základě tohoto pozorování bychom mohli mít domněnku, že kotvící body budou v rovině rozmístěny následovně:

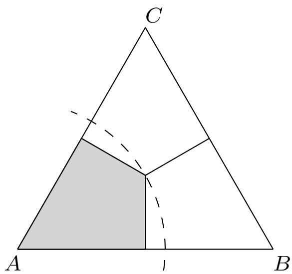


Budou tedy tvořit trojúhelníčkovou síť pokrývající celou rovinu. Pojďme si tedy tuto naši domněnku formálně dokázat!

Na začátek si představme, že máme nějaký konkrétní kotvící bod $A_0 = \left[a + \frac{b}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}b\right]$. Nyní, když b zvýšíme o 1, dostaneme jiný kotvící bod $A_1 = \left[a + \frac{b+1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}(b+1)\right]$. Všimněme si, že jsme vlastně bod A_0 posunuli o vektor $v_b = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Obdobně, navýšíme-li nikoli b, ale a o 1, dostaneme kotvící bod $A_2 = \left[a + 1 + \frac{b}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}b\right]$, tedy jsme vlastně bod A_0 posunuli o vektor $v_a = (1; 0)$.

Kotvící body (a tedy i trojúhelník složený z tří z nich), tedy umíme v rovině posouvat o vektor v_a nebo v_b, resp. o vektor $-v_a$ nebo $-v_b$. Začneme-li proto s trojúhelníkem ABC, kde $A = [0;0]$, $B = [1;0]$ a $C = \left[\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, pak opakovaným posouváním o vektor v_a (resp. $-v_a$) vytvoříme „pás" trojúhelníčků, jejichž jedna strana leží na ose x. Následně tento pás posuneme o vektor v_b, čímž dostaneme nový pás, který svou spodní stranou přiléhá k původnímu. Opakovaným posouváním o vektor v_b (resp. $-v_b$) pak těmito pásy pokryjeme celou rovinu, čímž dostaneme kýženou síť rovnostranných trojúhelníčků o délce strany 1 s vrcholy v kotvících bodech. Libovolný bod $[x, y]$ pak leží uvnitř (či na obvodu) některého z těchto trojúhelníčků. Stačí tedy ukázat, že libovolný bod v jednom takovém trojúhelníčku $\triangle ABC$ je vždy od některého z jeho vrcholů vzdálen nanejvýš $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Zde si uvědomme, že máme-li dva body v rovině K, L, pak body blíže ke K nežli k L jsou právě body ležící v polorovině určené osou úsečky KL a bodem K. Užitím této skutečnosti na náš $\triangle ABC$ si jej rozdělíme na 3 shodné čtyřúhelníky, které mají společný vrchol ve středu $\triangle ABC$. Chceme tedy ověřit, že libovolný bod v jednom tomto čtyřúhelníčku je od příslušného vrcholu trojúhelníku vzdálen nanejvýš $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Je patrné, že ekvivalentně toto stačí ověřit pro bod nejdále od uvažovaného vrcholu, což je vždy zřejmě střed trojúhelníku $\triangle ABC$. Ten je ovšem od každého z vrchol vzdálen právě $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Tím je důkaz hotov.



Poznámky:

U podúlohy (a) jste nás potěšili hojným počtem došlých řešení. Velká část z nich postupovala v podobném duchu jako vzorové (které jest silně inspirováno řešením *Jakuba Trčky*) – důkaz si rozdělila na několik případů a hojně využívala vzorec pro součet geometrické posloupnosti. Bohužel také často zapomínala ověřit podmínky užití tohoto vzorce nebo se dopouštěla jiných menších chyb. Nakonec jsem se rozhodl za tyto chyby body strhávat jen tehdy, když by jejich ošetření vyžadovalo podstatnější doplnění došlého řešení.

U podúlohy (b) se nám sešlo řešení méně, ale i tak mezi nimi nechyběla řešení velmi důvtipná a elegantní :).

(Josef „José" Soural)

Úloha 5.

(a) *Přirozená čísla jsou rozdělena do konečně mnoha aritmetických posloupností tak, že každé číslo je právě v jedné z těchto posloupností. Dokažte, že pro jednu z posloupností platí, že její první člen je dělitelný její diferencí.*

(b) *Rozhodněte, zda existuje 2023 nekonečných rostoucích aritmetických posloupností přirozených čísel splňujících následující tři podmínky:*

(1) *Existuje nejvýše konečně mnoho přirozených čísel, která nejsou v žádné z nich.*
(2) *Neexistuje číslo, které by bylo ve dvou z nich.*
(3) *V každé z nich je alespoň jedno provočíslo větší než 2023.*

Řešení:

(a) Jelikož posloupností je konečně mnoho, pak máme i konečně mnoho různých diferencí. Tudíž existuje přirozené číslo, jež je dělitelné každou z nich. Nazvěme toto číslo k. Víme, že k musí ležet v nějaké (dokonce v právě jedné) posloupnosti, její diferenci označme d. Pak každý prvek této posloupnosti se dá vyjádřit jako $k + a \cdot d$ pro nějaké celé a. Jelikož k i $a \cdot d$ jsou dělitelné d, pak jsou nutně všechny prvky, tedy i ten první, dělitelné d.

(b) Analogicky jako v bodu (a) ukážeme, že alespoň jedna posloupnost musí mít svůj první člen dělitelný svojí diferencí. Můžeme využít to, že čísel, která jsou dělitelná všemi diferencemi je nekonečně mnoho, tedy alespoň jedno z nich musí v nějaké posloupnosti ležet. První člen této posloupnosti je pak jediným členem, který může být prvočíslo. Aby byla splněna třetí podmínka, musí být toto číslo prvočíslo. Pojmenujme jej p. Rozmyslete si, že pokud mají dvě posloupnosti nesoudělné diference, pak nutně sdílí alespoň jeden prvek, což dle zadání nemohou. Tedy toto prvočíslo musí dělit všechny diference (neboť je rovno jedné z nich).

Nyní si rozmysleme, že prvky každé posloupnosti musí patřit do jiné zbytkové třídy po dělení p. Pokud je ale p větší než 2023, existuje více zbytkových tříd než posloupností. Pak určitě zbude nekonečně mnoho prvků nepokrytých, a tedy taková množina posloupností neexistuje.

Poznámky:

Přišla velká spousta správných řešení, ale i mnoho špatných. Většina chyb spočívala v tom, že diference v první úloze nemusely být stejné. *(Vojta „Dláža" Gaďurek)*

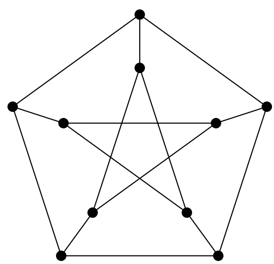
Úloha 6.

(a) *Na PraSečím jarním výletě se sešlo deset lidí. Každý z nich má na tomto výletě právě tři kamarády*[2]*. Mohlo se stát, že se každý výletník s kterýmkoliv jiným výletníkem buď kamarádí, nebo mají společného kamaráda?*

(b) *Je dán trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu A. Patu výšky z vrcholu A označíme P. Na stranách AB a AC leží postupně body E a F tak, že $|\sphericalangle BPE| = |\sphericalangle CPF| = 45°$. Středy úseček PE a PF postupně označíme M a N. Dokažte, že průsečík přímek BM a CN leží na ose úhlu BAC.*

Řešení:

(a) Ano, stát se to mohlo. Vezměme si například následující graf, kde vrcholy reprezentují lidi a hrany kamarádství:



Všimněme si, že graf je pro všechny vrcholy symetrický (tedy pokud bychom do horního vrcholu umístili libovolný vrchol, bude graf vypadat stejně jako nyní). Stačí tedy ověřit, zda podmínku splňuje libovolný jeden vrchol, pak ji budou splňovat všechny.

Jistě má každý vrchol stupeň tři, tedy i každý člověk má právě tři kamarády. Zaměřme se například na již zmíněný horní vrchol. Ten sousedí se dvěma vrcholy ve vnějším pětiúhelníku, se

[2]Kamarádství je vzájemné.

zbylými dvěma pak má společného kamaráda. Sousedí s horním vrcholem z hvězdy, ten sousedí se spodními vrcholy hvězdy, tedy mají společného kamaráda. Boční vrcholy hvězdy sousedí s bočními vrcholy pětiúhelníku, které sousedí s naším horním, tedy mají opět společného kamaráda.

Opravdu taková situace tedy může nastat.

Poznámka. Graf, který používáme v řešení, se nazývá Petersenův graf a má v kombinatorice a teorii grafů spoustu zajímavých vlastností.

(b) Série, které korespondují tyto úložky, se nazývá kamarádi, tudíž by se asi hodilo využít nějaká tvrzení o kamarádech v geometrii. Víme, že pokud se tři přímky protínají v jednom bodě, jejich izogonály se protínají v jeho kamarádovi, a naopak. Jelikož o našich přímkách nic moc nevíme, zkusíme se podívat na to, jak vypadají jejich izogonály a jestli by se náhodou o nich nedokazovalo snáze, že se protínají v jednom bodě.

Jelikož izogonálou osy úhlu je ona sama, stačí nám dokázat, že se s ní izogonály přímek CN a BM protínají v jednom bodě. Všimněme si, že CN a BM jsou těžnice v trojúhelnících BPE a CPF. O nich je známo, že jejich izogonálami jsou symediány, přímky, které procházejí stejným vrcholem, jako ony těžnice, a průsečíkem tečen ke kružnici opsané oněm trojúhelníkům, vedeným zbylými dvěma vrcholy. O těch se tedy budeme pokoušet něco zjistit.

Nechť D je pata osy úhlu $\sphericalangle BAC$ na stranu BC. Dokažme nyní, že $AEPDF$ je tětivový pětiúhelník.

Jelikož $|\sphericalangle EAF| = |\sphericalangle EPF| = 90°$, pak je $AEPF$ tětivový čtyřúhelník, označme kružnici jemu opsanou ω. Nyní stačí například dokázat, že $|\sphericalangle PDA| = |\sphericalangle PFA|$, pak podle věty o obvodovém úhlu bude na kružnici ω ležet i bod D.

Označme si úhel $|\sphericalangle ABC| = \beta$, pak

$$\begin{aligned}|\sphericalangle PDA| &= 180° - |\sphericalangle APD| - |\sphericalangle PAD| = 90° - |\sphericalangle PAD| = 90° - (|\sphericalangle BAD| - |\sphericalangle BAP|) = \\ &= 90° - 45° + 90° - \beta = 135° - \beta, \\ |\sphericalangle PFA| &= 180° - |\sphericalangle PAF| - |\sphericalangle APF| = 180° - \beta - 45° = 135° - \beta.\end{aligned}$$

Tedy se opravdu jedná o tětivový pětiúhelník. Zároveň vzhledem k tomu, že $|\sphericalangle APD| = 90°$ a $|\sphericalangle EAF| = 90°$, jsou EF a AD průměry kružnice ω. Označme jejich průsečík jako S, to bude střed naší kružnice.

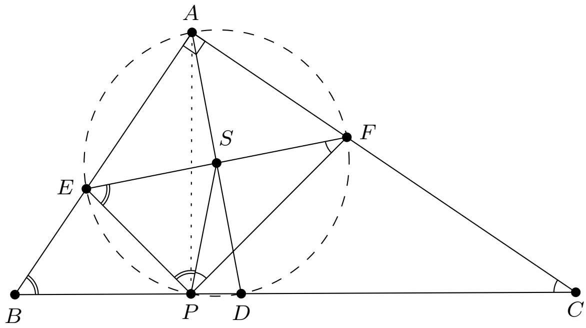
Dokážeme, že v bodě S se protínají tečny ke kružnicím opsaným trojúhelníku PCF z bodů P a F a trojúhelníku PBE z bodů P a E. Všimněme si, že pak máme vyhráno, neboť S leží na průměru AD kružnice ω, což je zároveň osa úhlu u vrcholu A v trojúhelníku ABC.

Dokažme tedy, že FS a SP jsou tečny ke kružnici opsané trojúhelníku PCF:

$$|\sphericalangle SPF| = |\sphericalangle SFP| = |\sphericalangle EFP| = |\sphericalangle EAP| = 90° - \beta = |\sphericalangle BCA|,$$

kde první rovnost plyne z toho, že S je střed kružnice ω a druhá z toho, že EF je její průměr.

Tedy podle věty o obvodovém a úsekovém úhlu platí, že SF a SP jsou tečny ke kružnici opsané trojúhelníku PCF, tedy CS je v něm symediána. Obdobně dokážeme i to, že BS je symediána v trojúhelníku PBE. Pak se tedy s osou úhlu BAC protínají v jednom bodě, a tedy i průsečík přímek BM a CN leží na ose úhlu BAC.



Poznámky:
Naprostá většina řešitelů měla správné řešení části (a). Mnozí konstruovali stromečky, někteří pouze vypisovali seznam sousedů, tak či tak, za správnou konstrukci jsem udělovala dva body. Bohužel se ale někteří místo toho pokoušeli dokázat, že taková situace nikdy nenastane.

Do části (b) se pustilo jen několik odvážlivců a překvapivě hodně z nich se vyhýbalo kamarádům jako čert kříži. Několikrát jsem se setkala s řešeními pomocí dvojpoměrů, nebo spirální podobnosti. I tak se však řešením, podobným tomu vzorovému, ubírala největší skupinka řešitelů.

(Adéla Karolína „Áďa“ Žáčková)

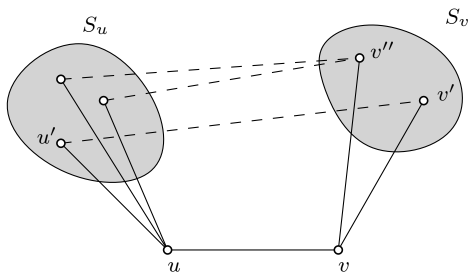
Úloha 7.

(a) *Rozhodněte, zda lze čísla* $1, 2, \ldots, 20$ *spárovat tak, aby každá dvojice dávala v součtu prvočíslo a aby těchto deset prvočísel bylo navzájem různých.*

(b) *Na Matfyzu studuje* n *matfyzáků, navíc někteří matfyzáci jsou navzájem kamarádi. Anička si všimla, že pokud se nějací dva matfyzáci kamarádí, pak nemají žádného společného kamaráda. Naopak pokud se nějací dva matfyzáci nekamarádí, pak mají právě dva společné kamarády. Dokažte, že všichni matfyzáci mají stejný počet kamarádů.*

Řešení:
(a) Nejvyšší možný součet dvojice čísel je $20 + 19 = 39$ a nejmenší $1 + 2 = 3$, můžeme tak získat pouze prvočísla 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31 a 37. Jelikož každé číslo od 1 do 20 použijeme právě jednou, součet deseti prvočísel musí být roven součtu hodnot 1, 2, ..., 20. Protože $1 + 2 + \cdots + 20 = \frac{20\cdot 21}{2} = 210$ a součet 10 největších prvočísel, která umíme vytvořit, je $5+7+11+13+17+19+23+29+31+37 = 192$, není možné čísla spárovat tak, aby součet každé dvojice byl prvočíslo a zároveň bylo vzniklých 10 prvočísel navzájem různých.

(b) Uvážíme graf takový, že každému vrcholu odpovídá jeden matfyzák a dva vrcholy jsou spojeny hranou právě tehdy, když se odpovídající dva matfyzáci kamarádí. Ukážeme, že každé dva sousední vrcholy mají stejný stupeň. Pro spor předpokládejme, že existuje sousední dvojice vrcholů u a v, které mají různý stupeň. Tyto dva vrcholy nemají žádného společného souseda. Označíme S_u jako množinu všech sousedních vrcholů u kromě v a S_v jako množinu všech sousedních vrcholů v kromě u. Množiny S_u a S_v mají prázdný průnik, a jelikož nejsou stejně velké, tak BÚNO $|S_u| > |S_v|$. Libovolný vrchol $u' \in S_u$ nesousedí s v, tudíž u' a v mají právě dva společné sousedy – jeden z nich je u a druhý $v' \in S_v$. Protože $|S_u| > |S_v|$, potom z Dirichletova principu existuje vrchol $v'' \in S_v$, do kterého vedou z S_u alespoň dvě hrany, čímž dostáváme spor, jelikož takový vrchol v'' nesousedí s u ale má s ním víc než dva společné sousedy.



Jelikož libovolné dva sousední vrcholy mají stejný stupeň a libovolné dva nesousední vrcholy u a v mají společného souseda w, který musí mít stejný stupeň jako u a v, tak libovolné dva vrcholy v grafu musí mít stejný stupeň a všichni matfyzáci tak mají stejný počet kamarádů.

Poznámky:
S první úlohou si valná většina řešitelů hravě poradila. Někteří řešitelé zvolili jiný a trochu zdlouhavější postup, kdy ukázali, že z čísel 1, 2, ..., 20 není možné složit 10 různých prvočísel z 11, která vůbec teoreticky složit můžeme. Nelze složit zároveň 3 a 5, volba které z nich složíme pak omezí různé způsoby jako složit vyšší prvočísla a v obou případech nakonec najdeme prvočíslo, které ze zbývajících čísel složit nelze. Druhou úlohu řešilo jen pár odvážlivců, část řešitelů zvolila obdobný postup jako vzorák, někteří řešitelé zvolili jinou cestu. Ukázali konstrukci pro 4 matfyzáky, a pak s různou mírou mávání ne příliš úspěšně ukazovali, že nemůže existovat řešení pro žádné jiné n.

(Klárka Grinerová)