Projektivní geometrie III

3. seriálová série — Termín odeslání: 6. dubna 2020

Úlohy této série jsou řazeny podle témat, nikoliv podle obtížnosti.

Úloha 1. (5 bodů)
Mějme kružnice Ω a ω takové, že jsou kružnicí opsanou, resp. vepsanou nějakého trojúhelníka. Na Ω zvolme bod A. Tečny z A k ω protnou Ω v bodech BC. Platí[1], že BC se dotýká ω v D. Dokažte, že zobrazení z A na Ω do D na ω je projektivní.

Úloha 2. (5 bodů)
Mějme trojúhelník ABC s kružnicí opsanou ω. Na ose úhlu u A zvolme bod P. Označme B_1, C_1 druhé průsečíky postupně PB, PC s kružnicí ω. Na AB zvol bod X tak, že $|\sphericalangle XB_1B| = 90°$. Analogicky na AC zvol Y tak, že $|\sphericalangle YC_1C| = 90°$. Dokažte, že přímka XY prochází pevným bodem nezávisle na pozici P.

Úloha 3. (5 bodů)
Uvažme trojúhelníky ABC, DEF sdílící kružnici opsanou Ω i vepsanou ω. Přímka BC se dotýká ω v K, přímka EF se ω dotýká v L. Označme $M = DK \cap \Omega$ a $N = AL \cap \Omega$. Dokažte, že přímky AM, DN, BC prochází jedním bodem.

[1] Tohle není třeba dokazovat, plyne to z věty, které se říká *Ponceletovo porisma*. Pokud Tě o ní zajímá více, přečti si 3. díl seriálu *Geometrie trojúhelníka*: *https://prase.cz/archive/36/uvod3s.pdf*.