

# Metrické prostory III – Metrická všehočůť

Milý příteli,

vítáme Tě u posledního dílu letošního seriálu metrických prostorů. V tomto dílu budeme hlavně řešit příklady, ačkoliv se najde i několik tvrzení a vět.

Jak jsme slibovali minule, hlavně si ukážeme, že spojité funkce na kompaktech nabývají nejmenších a největších hodnot a co všechno z toho plyne. Speciálně zjistíme, že takové funkce lze přirozeně měřit, a prozkoumáme vzniklý nový metrický prostor. Směle do toho!

## Maxima a suprema

Než se dostaneme k větě o nabývání extrémů pro spojité funkce, budeme si muset trochu zobecnit pojmy maxima a minima tak, aby se nám dobře pracovalo s nekonečnými množinami. Ujasněme si, co že je to maximum množiny:

**Definice 1.** Nechť  $A \subset \mathbb{R}$  je množina. Číslo  $m \in A$  nazveme *maximem* množiny  $A$ , pokud  $a \leq m \forall a \in A$ . Nazveme ho *minimem* množiny  $A$ , pokud  $a \geq m \forall a \in A$ .

Maxima jsou Ti pravděpodobně dobře známá. Bohužel maxima mají jeden zásadní problém:

**Příklad 2.** Existují množiny  $A \subseteq \mathbb{R}$ , které nemají maximum.

*Řešení.* Například otevřený interval  $(0, 1)$ . Jednička není maximem, protože neleží v množině, pro cokoliv menší než 1 zase bude existovat nějaký maličko větší prvek, který leží v  $(0, 1)$  – pro  $x < 1$  například aritmetický průměr  $\frac{x+1}{2} \in (0, 1)$ .

Na střední škole je tento nedostatek maxima snadně přehlížen, protože platí následující:

**Cvičení 1.** Každá konečná množina  $A \subset \mathbb{R}$  má maximum.

Jsou dva důvody, proč množina  $A \subseteq \mathbb{R}$  nemusí mít maximum – může se stát, že prvky  $A$  jsou libovolně velké, nebo že prvky  $A$  jsou sice shora omezené, ale žádná taková mez neleží v  $A$ . Pokud jsou prvky  $A$  libovolně velké, nemá moc smysl snažit se maximum zobecnit. Ve druhém případě se ale o to můžeme pokusit – naší snahou je říct, že třeba otevřený interval v příkladu 2 sice maximum nemá, ale stejně je pro něj hodnota 1 speciální – je to jakési „zobecněné maximum“ intervalu  $(0, 1)$ . Odrazme se od omezenosti:

**Definice 3.** Mějme množinu  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Číslo  $s \in \mathbb{R}$  nazveme *horní mezí* množiny  $A$ , pokud všechny prvky  $A$  jsou menší než  $s$ , tj.  $\forall a \in A : a \leq s$ . Obdobně *dolní mez* je číslo takové, že všechny prvky  $A$  jsou větší než toto číslo.

Horní mez pro shora omezenou množinu  $A$  z definice existuje. Na druhou stranu ale není určena jednoznačně. Libovolné číslo větší než nějaká horní mez je totiž také horní mez. Jde prostě o nějakou hodnotu, která shora ohraničuje, jak velké prvky dané množiny vůbec mohou být. Platí však pěkné pozorování, že maximum je jednoduše horní mez, která je zároveň prvkem množiny. Naše zobecněné maximum také bude jistá speciální horní mez množiny.

**Pohádka 4.** V PraSestánu se staví nová školka. Bude tam docházet nekonečno dětí a každé z nich má nějaké pořadové číslo. Stavbyvedoucí si všiml, že  $n$ -té dítě je vysoké přesně  $2 - \frac{1}{n}$  metru. Jak vysoké musí postavit dveře, aby se do nich každé dítě vešlo, ale zároveň byly co nejnižší možné?

Odpověď je 2 metry. Zdůvodnění je prosté: Každé dítě je určitě velké nejvýše 2 metry, tedy všechny dveřmi projdou. Zároveň pokud by stavbyvedoucí postavil dveře nižší než 2 metry, pak některé dítě dveřmi neprojde. Všimněme si, že kdyby měla množina výšek dětí maximum (tedy některé dítě bylo vyšší než všechny ostatní), pak by stačilo postavit dveře do výšky tohoto nejvyššího dítěte. Ale i přesto, že žádné maximum neexistuje, tak lze zvolit výšku dveří, která vyhovuje podmínkám. Dokonce ať by výšky jednotlivých dětí vypadaly jakkoliv, pokud by byly shora omezené, tak výška dveří vyhovující požadavkům půjde vždy zvolit. Této výšce se říká *supremum* výšek jednotlivých dětí a jde o jakési „vylepšené“ maximum, protože v reálných číslech existuje vždy, zatímco maximum jen někdy.

**Definice 5.** Necht  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Reálné číslo  $s$  nazveme *supremem* množiny  $A$ , pokud zároveň platí:

- (1)  $s$  je horní mezí množiny  $A$ ;
- (2) kdykoliv  $s'$  je horní mezí  $A$ , pak již  $s \leq s'$ .

Supremum můžeme chápat jako nejmenší z horních mezí. Vlastnost (2) se často používá jinak: Lze také říct, že pokud je  $s' < s$ , pak musí existovat  $a \in A$  takové, že  $s' < a$ . Neboli „*supremum je taková horní mez  $s$ , že kdykoliv se posuneme jakkoliv málo pod  $s$ , tak už budeme pod nějakým prvkem v  $A$ .*“

Tento mezistupeň mezi maximem na jedné straně a obecnou horní mezí na straně druhé kombinuje hezké vlastnosti obou těchto polů. Tak například stejně jako pro maximum platí jednoznačnost suprema:

**Tvrzení 6.** Každá neprázdná podmnožina  $\mathbb{R}$  má nejvýše jedno supremum.

*Důkaz.* Předpokládejme, že  $s_1$  a  $s_2$  jsou suprema množiny  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Podle vlastnosti (1) z definice suprema je  $s_1$  horní mezí  $A$ , takže podle vlastnosti (2) pro supremum  $s_2$  musí  $s_2 \leq s_1$ . Obdobně  $s_2$  je horní mezí  $A$ , tedy dle vlastnosti (2) pro supremum  $s_1$  musí  $s_1 \leq s_2$ . Tato suprema jsou si proto již rovna.  $\square$

Supremum množiny  $A$  značíme  $\sup A$ . Ukažme nyní, že se vážně jedná o zobecnění maxima:

**Tvrzení 7.** Maximum  $m$  množiny  $A$  je zároveň i jejím supremem.

*Důkaz.* Z definice maxima máme ihned, že  $m$  je horní mezí  $A$ . Pro libovolnou horní mez  $s$  množiny  $A$  musí speciálně  $m \leq s$ , protože  $m$  leží v  $A$ . Tedy  $m$  je nejmenší horní mezí  $A$ , a tedy supremem  $A$ .  $\square$

**Cvičení 2.** Dokaž, že množina  $A = \{1 - 1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$  má supremum 1.

Analogicky, jako jsme zobecnili maximum na supremum, se dá zobecnit minimum.

**Definice 8.** Necht  $A \subseteq \mathbb{R}$ . Reálné číslo  $d$  nazveme *infimem* množiny  $A$ , pokud zároveň platí:

- (1)  $d$  je dolní mezí množiny  $A$ ;
- (2) kdykoliv  $d'$  je dolní mezí  $A$ , pak již  $d \geq d'$ .

Je sice užitečné umět mluvit jak o supremech, tak o infimech, ale jedno se dá na druhé snadno převést, takže v tomto dílu seriálu budeme typicky mluvit o maximech a supremech. Konkrétně si můžeš rozmyslet, že pro množinu  $A \subseteq \mathbb{R}$  platí  $\inf A = -\sup(-A)$ , pokud  $\sup(-A)$  existuje, kde  $-A = \{-x \mid x \in A\}$  jsou jednoduše opačné hodnoty čísel z  $A$ . Tímto vztahem suprema a infima se dá například velmi snadno ukázat, že infimum existuje nejvýše jedno nebo že minimum  $A$  je automaticky infimem  $A$ . Dále proto budeme pracovat hlavně se supremy.

Užitečná vlastnost suprema  $A$  je, že ačkoliv nemusí ležet přímo v  $A$ , vždy leží na hranici  $A$ .

**Tvrzení 9.** Necht'  $A \subseteq \mathbb{R}$  má supremum. Pak existuje posloupnost  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  prvků z  $A$  splňující  $\lim x_n = \sup A$ .

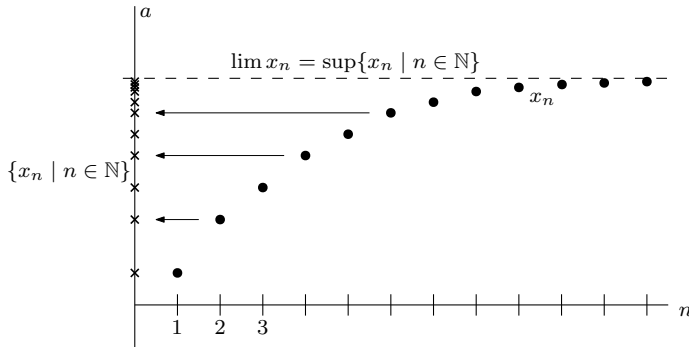
*Důkaz.* Pro každé  $n$  přirozené se podíváme na hodnotu  $\sup A - 1/n$ . To už není horní mez  $A$ , takže nalezneme  $x_n \in A$  takové, že  $x_n > \sup A - 1/n$ . Tím vytvoříme posloupnost  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  čísel z  $A$ , pro kterou platí nerovnosti

$$\sup A - \frac{1}{n} < x_n \leq \sup A < \sup A + \frac{1}{n},$$

kde využíváme, že supremum je horní mezí  $A$ . Platí proto  $|x_n - \sup A| < 1/n$ , a protože pravá strana konverguje k nule, musí i levá strana konvergovat k nule, neboli  $\lim x_n = \sup A$ .  $\square$

**Cvičení 3.** Umiš zařadit, aby v tvrzení 9 byla posloupnost rostoucí?

**Cvičení 4.** (Vztah suprema a limity) Necht'  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  je neklesající posloupnost reálných čísel. Dokaž, že  $\lim x_n = \sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , pokud alespoň jedno z nich existuje.



Zatím jsme si jen ukázali, že supremum je o něco obecnější pojem než maximum ve smyslu, že každá množina s maximem má i supremum, a že existují množiny bez maxima se supremem. Není zatím jasné, jestli jsme si nějak moc pomohli – mohlo by se stát, že stále většina shora omezených reálných množin  $A$  nemá ani maximum, ani supremum. Naštěstí tomu tak vůbec není, jak praví následující důležitá věta.

**Věta 10.** (Vlastnost suprema množiny reálných čísel) Necht'  $A$  je libovolná neprázdná shora omezená podmnožina reálných čísel. Pak existuje reálné supremum množiny  $A$ .

Tuto větu dokazovat nebudeme. Opírá se totiž přímo o podstatu reálných čísel – je možné reálná čísla definovat tak, že na rozdíl od racionálních čísel splňují vlastnost suprema. Toto je pak jedno z možných alternativních zavedení reálných čísel vedle úplnosti  $\mathbb{R}$ , kterou jsme diskutovali kolem věty 6 v druhém dílu seriálu. Úplnost a vlastnost suprema mají velmi těsný vztah, stejně jako jsou obecněji úzce provázané limitní přechody a suprema.

**Cvičení 5.** Ukaž, že existuje  $A$  omezená podmnožina racionálních čísel  $\mathbb{Q}$  taková, že  $A$  nemá racionální supremum.

**Cvičení 6.** Necht'  $A$  je množina a  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$  jsou funkce. Předpokládejme, že existují reálná  $\sup_{x \in A} f(x)$  a  $\sup_{x \in A} g(x)$ , kde  $\sup_{x \in A} f(x) = \sup f(A)$  (tj. supremum obrazu množiny  $A$ ). Dokaž, že platí

$$\sup_{x \in A} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x).$$

**Úloha 1.** Najdi supremum množiny  $\{\sin n \mid n \in \mathbb{N}\}$ .

Možná Ti v definici suprema přijde omezující podmínka, že množina musí být shora omezená. Někdy se tento problém řeší tím, že si k množině  $\mathbb{R}$  přidáme ještě prvek  $\infty$ , který je větší než všechna reálná čísla. Tím nám odpadne podmínka na omezenost shora. A pokud přidáme ještě prvek  $-\infty$  (který je menší než všechna reálná čísla i  $\infty$ ), odpadne nám i podmínka na neprázdnost (supremum prázdné množiny bude  $-\infty$ ). V tomto rozšířeném  $\mathbb{R}$  tedy úplně každá množina má supremum i infimum. To je pěkná vlastnost a strukturám, které ji splňují, se říká *úplné svazy*. Všimni si, že pojmy supremum a maximum se dívají jen na to, které prvky jsou větší než jiné a nijak nepracují s operacemi, které  $\mathbb{R}$  má, jako je násobení, sčítání a dělení. Rozšířením  $\mathbb{R}$  o nekonečna sice získáme suprema všech množin, ale zase ztratíme definovanost našich operací, protože třeba  $\infty - \infty$  nejde moc dobře dodefinovat.

## Nabývání extrémů

Při práci s funkcemi se velmi hodí, když funkce  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  na svém definičním oboru nabývá extrémů (tedy maxima či minima). Nicméně ne všechny funkce nabývají svého maxima: Například  $f(x) = x$  na  $\mathbb{R}$  svého maxima ani minima nenabývá, neboť  $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$  je neomezená.

Stejně tak se může stát, že  $f$  má na svém definičním oboru supremum, ale této hodnoty nenabývá, tedy se nejedná o maximum – například klasická hyperbola  $f(x) = 1/x$  na  $(-\infty, 0)$  má supremum 0, neboť pro hodně záporná  $x$  je  $1/x$  malé, ale stále záporné číslo, nicméně nikdy není  $1/x = 0$ .

Jeden ze způsobů, jak zaručit, že funkce nabývá svého maxima, je omezit se na spojitě funkce na kompaktním definičním oboru. Všimni si, že ve znění věty není o supremech ani zmínka. Použijí se totiž až v důkazu věty a hrají tam důležitou roli – bez vlastnosti suprema  $\mathbb{R}$ , případně úplnosti  $\mathbb{R}$ , by důkaz takto neprošel.

**Věta 11.** (O nabývání maxima) *Nechť  $(K, \rho)$  je neprázdný kompaktní metrický prostor a funkce  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá. Pak existuje bod  $x^* \in K$ , v němž  $f$  nabývá maxima, tzn. pro libovolné  $x \in K$  platí  $f(x) \leq f(x^*)$ .*

*Důkaz.* Zkusíme nejdřív najít maximální hodnotu  $f$  na  $K$ , a až pak samotný bod  $x^*$ , ve kterém  $f$  této hodnoty nabývá. Přirozeným kandidátem na maximální hodnotu  $f$  je supremum množiny

$$f(K) = \{f(x) \mid x \in K\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Nejdřív si rozmysleme, proč by tato množina měla supremum mít. Protože je to podmnožina reálných čísel, víme, že supremum  $f(K)$  bude existovat, pokud bude  $f(K)$  shora omezená.

Na konci minulého dílu seriálu jsme si dokázali větu o spojitém obrazu kompaktu – ta nám v tomto případě říká, že  $f(K)$  je kompaktní v  $\mathbb{R}$ , neboť  $K$  je kompaktní a  $f$  je spojitá funkce. Pokud je ale  $f(K) \subseteq \mathbb{R}$  kompaktní, pak víme, že již musí být omezená. Tudíž má v reálných číslech opravdu supremum, označme ho  $s = \sup f(K)$ .

Nyní zkusme najít bod  $x^*$ . Protože  $s$  je supremum  $f(K)$ , můžeme díky tvrzení 9 najít posloupnost  $(y_n)_{n=1}^{\infty}$  bodů z  $f(K)$ , která k  $s$  konverguje. Navíc ke každému  $y_n$  existuje nějaké  $x_n \in K$  takové, že  $f(x_n) = y_n$  (jinak by  $y_n \notin f(K)$ ).

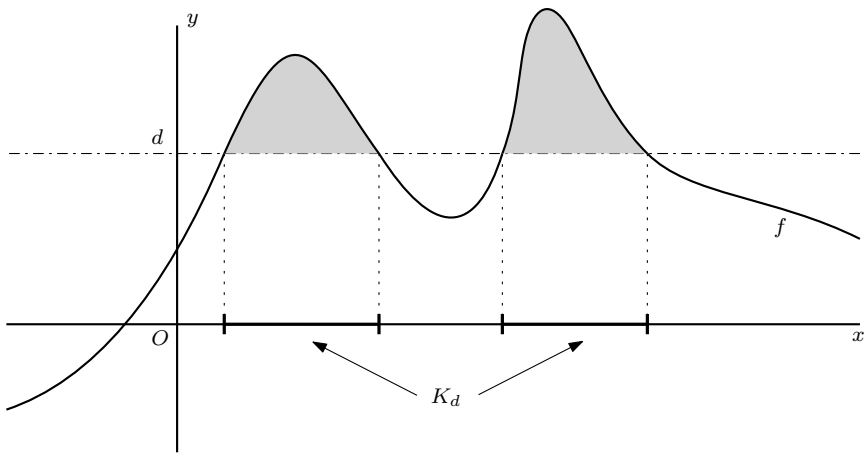
Máme tak novou posloupnost  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  bodů z  $K$ , která nám bohužel zatím k ničemu nekonverguje, ačkoliv  $\lim f(x_n) = s$ . To snadno vyřešíme kompaktností  $K$ : Prostě vybereme podposloupnost  $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$  mající limitu  $x^* \in K$ . Pro podposloupnost stále platí  $\lim f(x_{n_k}) = s$ . Zároveň ale ze spojitosti  $f$  a Heineovy věty nyní musí platit  $\lim f(x_{n_k}) = f(x^*)$ .

Jednoznačnost limity nám tím pádem říká, že  $f(x^*) = s$ . A protože  $s$  je supremem množiny  $f(K)$ , musí pro každý bod  $x \in K$  platit  $f(x) \leq s = f(x^*)$ .  $\square$

Větu ještě trochu zesílíme – běžně se totiž stává, že  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá, ale počáteční volba metrického prostoru  $M$  není kompaktní. Nabývání maxima ale stejně půjde použít za předpokladu, že množina „potenciálních bodů maxima“ je kompaktní. Tím myslíme, že pokud například v nějakém bodě  $x_0$  platí  $f(x_0) = 1$ , pak nemá smysl hledat maximum v bodech  $x$ , v nichž  $f(x) < 1$ .

**Důsledek 12.** (Silnější nabývání maxima) *Nechť  $(M, \rho)$  je metrický prostor a funkce  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá. Nechť existuje číslo  $d \in \mathbb{R}$  takové, že množina  $K_d = \{x \in M \mid f(x) \geq d\}$  je neprázdná a kompaktní. Pak  $f$  na  $M$  nabývá svého maxima a všechny takové body nabývání leží v  $K_d$ .*

*Důkaz.* Funkce  $f$  je na kompaktu  $K_d$  spojitá, takže zde nabývá svého maxima, řekněme v bodě  $x^* \in K_d$ . Pak pro libovolný bod  $x \in M \setminus K_d$  platí  $f(x^*) \geq d > f(x)$  z definice  $K_d$ . Tedy žádný bod mimo  $K_d$  nemůže být bodem maxima  $f$ . To navíc ukazuje, že  $x^*$  je nejen bodem maxima na  $K_d$ , ale dokonce na celém  $M$ .  $\square$



Analogicky spojitě funkce na kompaktech nabývají svých minimálních hodnot, tedy dohromady svých *extrémů*, tj. maxim i minim. Důsledek o silnějším nabývání minima pak vyžaduje omezení se na neprázdnou a kompaktní množinu

$$K_d = \{x \in M \mid f(x) \leq d\}$$

potenciálních bodů minima.

**Cvičení 7.** Najdi funkci  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  takovou, že

- (1)  $(M, \rho)$  je metrický prostor,  $f$  je spojitá a  $f$  nenabývá svého maxima;
- (2)  $(M, \rho)$  je kompaktní metrický prostor,  $f$  není spojitá a  $f$  nenabývá svého maxima.

Jako první využití nabývání extrémů si ukážeme jakousi alternativu Banachovy věty o kontrakci. Zeslabíme požadavek na kontrakci, ale za cenu zesílení předpokladu na metrický prostor – v Banachově větě jsme požadovali pouze úplnost, teď budeme potřebovat kompaktnost.

**Tvrzení 13.** (Pevný bod neexpanzivního zobrazení) *Nechť  $(K, \rho)$  je kompaktní metrický prostor a  $f : K \rightarrow K$  splňuje pro každou dvojici různých bodů  $x, y \in K$*

$$\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y).$$

*Pak má  $f$  na množině  $K$  právě jeden pevný bod.*

*Důkaz.* Definujme zobrazení  $u : K \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$  jako  $u(x) = \rho(f(x), x)$ . Ukážeme, že  $u$  je spojitý, a tím budeme víceméně hotovi.

Buď tedy  $x \in K$  libovolný bod a  $\varepsilon > 0$ . Zvolme  $\delta = \varepsilon/2$ . Pak pro  $y \in U_\delta(x)$  platí

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(x, y) < \delta = \varepsilon/2$$

díky předpokladu na zobrazení  $f$  (přitom pro  $x \neq y$  je první nerovnost ostrá, zatímco pro  $x = y$  jsou obě strany nulové). Díky trojúhelníkové nerovnosti následně platí

$$\begin{aligned} u(x) - u(y) &= \rho(f(x), x) - \rho(f(y), y) \leq \rho(f(x), f(y)) + \rho(f(y), y) + \rho(y, x) - \rho(f(y), y) = \\ &= \rho(f(x), f(y)) + \rho(y, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Stejně tak

$$u(y) - u(x) \leq \rho(f(y), f(x)) + \rho(f(x), x) + \rho(x, y) - \rho(f(x), x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

takže celkem  $|u(x) - u(y)| < \varepsilon$  a  $u$  je opravdu spojitá funkce.

Protože  $u : K \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$  je spojitá a  $K$  je kompaktní, musí existovat bod  $x^* \in K$ , v němž  $u$  nabývá svého minima. Toto  $x^*$  musí být pevným bodem  $f$  – kdyby tomu tak nebylo, tj.  $f(x^*) \neq x^*$ , pak by pro tyto různé body z vlastnosti  $f$  platilo

$$u(f(x^*)) = \rho(f(f(x^*)), f(x^*)) < \rho(f(x^*), x^*) = u(x^*),$$

takže by  $x^*$  nemohl být bodem minima  $u$ , neboť v bodě  $f(x^*)$  by  $u$  bylo menší. Tedy  $f(x^*) = x^*$  a našli jsme pevný bod  $f$  (a zároveň to znamená, že  $u$  nabývá v minimu hodnoty 0).

Nakonec dokážeme jednoznačnost – nechtě je  $\bar{x} \in K$  pevným bodem zobrazení  $f$ , a pro spor navíc platí  $x^* \neq \bar{x}$ . Protože jsou pevné body různé, platí z vlastnosti  $f$

$$\rho(x^*, \bar{x}) = \rho(f(x^*), f(\bar{x})) < \rho(x^*, \bar{x}),$$

což je kvůli ostré nerovnosti spor. Tedy  $f$  má právě jeden pevný bod na  $K$ . □

**Cvičení 8.** Ukaž, že funkce  $f : (1, \infty) \rightarrow (1, \infty)$  daná jako  $f(x) = x + 1/x$  splňuje pro každá  $x, y \in (1, \infty)$  vztah  $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ , ale  $f$  není kontrakcí.

Dalším pěkným využitím věty o nabývání extrémů je existence nejbližšího bodu množiny k danému bodu v prostoru.

**Příklad 14.** Nechtě  $F$  je neprázdna uzavřená podmnožina v  $\mathbb{R}^n$  a  $a \in M$ . Pak existuje  $p \in F$  mající v  $F$  nejmenší vzdálenost od  $a$ .

*Řešení.* Definujme funkci  $f(x) = \rho(a, x)$  pro  $x \in F$ . Budeme chtít využít věty o nabývání extrémů, takže se bude hodit ukázat spojitost  $f$  a omezit se na nějaký kompaktní. Podívejme se nejdřív na spojitost. Všimneme si, že pro  $x, y \in F$  trojúhelníková nerovnost dává

$$\rho(x, a) - \rho(y, a) \leq \rho(x, y) + \rho(y, a) - \rho(y, a) = \rho(x, y)$$

a stejně tak

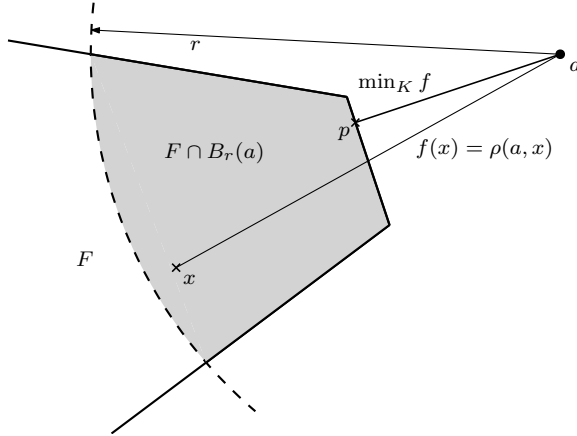
$$\rho(y, a) - \rho(x, a) \leq \rho(y, x) + \rho(x, a) - \rho(x, a) = \rho(x, y),$$

takže  $|f(x) - f(y)| \leq \rho(x, y)$ . Jak jsme již několikrát viděli, z takového odhadu již plyne spojitost  $f$  – pro  $x \in F$  a  $\varepsilon > 0$  libovolné stačí zvolit  $\delta = \varepsilon$ .

Nyní se omezíme na kompaktní. Zvolíme poloměr  $r > 0$  dost velký tak, aby  $K = F \cap B_r(a)$  byla neprázdna množina. Protože protínáme uzavřenou  $F$  s uzavřenou koulí, je výsledná množina  $K$  již uzavřená i omezená, a tedy podle Heineovy-Borelovy věty kompaktní. Navíc minimum  $f$  na  $K$  se

bude shodovat s minimem  $f$  na  $F$ , protože pro body  $x \in F \setminus B_r(a)$  je vzdálenost  $x$  od  $a$  větší než  $r$ , takže v nich minimum nebude.

Protože  $f$  je spojitá funkce na kompaktu  $K$ , nabývá tak svého minima. Označme bod nabytí jako  $p \in K \subseteq F$ . Díky tomu, jak jsme zadefinovali  $f$ , je  $p$  zřejmě hledaný bod nejmenší vzdálenosti  $a$  od  $F$ .



**Cvičení 9.** Najdi v  $\mathbb{R}^n$  neprázdnou množinu  $A$  a bod  $a \in \mathbb{R}^n$  takové, že v  $A$  bod s nejmenší vzdáleností od  $a$  neexistuje (vzhledem k eukleidovské metrice).

**Cvičení 10.** Necht  $B_1(0)$  je uzavřená koule v  $\mathbb{R}^2$  v eukleidovské metrice a  $a$  je bod neležící v  $B_1(0)$ . Existuje nejbližší bod v  $B_1(0)$  k  $a$  jenom jeden? Co v případě koule  $B_1(0)$  v maximové metrice?

**Cvičení 11.** Ukaž, že pokud  $f$  je kladná reálná spojitá funkce definovaná na  $\langle 0, 1 \rangle$ , pak je funkce  $\frac{1}{f}$  omezená.

**Cvičení 12.** V rovině je dáno  $n$  bodů  $A_1 = (x_1, y_1), \dots, A_n = (x_n, y_n)$ . Dokaž, že existuje bod  $G$ , který má v součtu od bodů  $A_1, \dots, A_n$  minimální vzdálenost.

**Úloha 2.** V rovině je dáno  $n$  bodů  $A_1 = (x_1, y_1), \dots, A_n = (x_n, y_n)$ . Dokaž, že existuje přímka  $p \subset \mathbb{R}^2$ , která *nejlépe aproximuje* body  $A_1, \dots, A_n$  ve smyslu, že tyto body mají součet kolmých vzdáleností od  $p$  nejmenší možný.

Na následujícím příkladu si ukážeme způsob, jak lze hledat maxima funkce  $f$ . Je založený na tom, že pokud víme, že bod maxima musí existovat, a zároveň se nám podaří o většině bodů ukázat, že v nich maximum není, tak bodem maxima už musí být jeden z těch bodů, které zbyly, aniž bychom pro něj museli maximalitu složitě ověřovat. Ukázat o bodu, že není bodem maxima, bývá totiž snazší než dokazovat opak – stačí prostě najít další bod, který funkční hodnotu  $f$  zvýší. Sice je následující příklad spíše ilustrační, ale tato metoda umí být velmi užitečná, jak uvidíme za tímto příkladem v dalším příkladu a rámečku.

**Příklad 15.** Urči, jaký je maximální obsah obdélníku s obvodem 20.

*Řešení.* Buďte  $x, y$  kladné délky stran obdélníku. Zajímají nás obdélníky splňující  $2(x + y) = 20$ , neboli  $x + y = 10$ , z čehož lze obsah psát jako  $S = xy = x(10 - x)$ , tj. jako funkci jedné proměnné, kterou je délka strany  $x$ .

<sup>1</sup>Hledání takové přímky je užitečné a jedná se o problém *lineární regrese*.

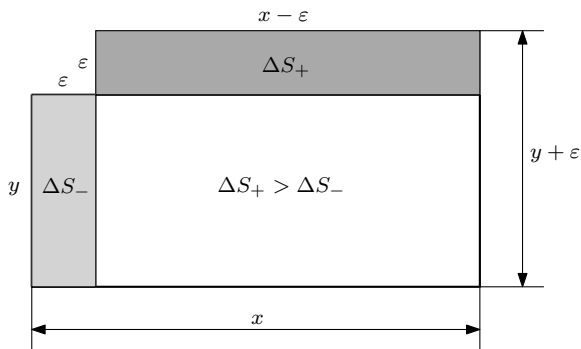
Bud'  $x \neq 10/2 = 5$ . Pak  $x$  a  $y$  jsou různá čísla, řekněme, že  $x > y$ . Podívejme se, co se stane, když  $x$  zmenšíme o nějaké kladné  $\varepsilon$  a  $y$  adekvátně zvýšíme pro zachování obvodu. Obsah se změní jako

$$S' = (x - \varepsilon) \cdot (10 - x + \varepsilon) = x(10 - x) + x\varepsilon - \varepsilon(10 - x) - \varepsilon^2 = S + \varepsilon(2x - 10 - \varepsilon),$$

kde  $S'$  označuje nový obsah pro délku strany  $x - \varepsilon$  a  $S$  označuje starý obsah pro délku strany  $x$ .

Protože  $x > y$  a platí  $x + y = 10$ , musí být  $2x > 10$ . Tím pádem pro dostatečně malá  $\varepsilon > 0$  platí  $2x - 10 - \varepsilon > 0$ , takže pro taková  $\varepsilon$  je  $S' > S$ , neboť přičítáme kladnou hodnotu  $\varepsilon(2x - 10 - \varepsilon)$ . Tím, že jsme trošku zmenšili hodnotu  $x$  a zvětšili hodnotu  $y$ , jsme zvýšili obsah obdélníku, přičemž obvod zůstal nezměněn. Tudíž obdélník se stranami  $x > y$  nemá maximální obsah. Analogicky obdélník se stranami  $x < y$  nemůže mít maximální obsah.

Pokud tedy obdélník s maximálním obsahem existuje, musí to být případ  $x = y$ , neboli když je obdélník čtvercem o délce strany 5. A to, že maximum existuje, plyne z věty o nabývání maxima, v tomto případě pro spojitou funkci  $f(x) = x(10 - x)$  na kompaktu  $\langle 0, 10 \rangle$ . Tudíž maximální obsah obdélníku s obvodem 20 je roven  $5^2 = 25$ .



**Příklad 16.** (AG nerovnost) Dokážeme, že pro nezáporná reálná čísla  $a_1, a_2, \dots, a_n$  platí

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n},$$

přičemž rovnost nastává právě když jsou si všechna  $a_i$  rovna.

*Řešení.* Necht' jsou nezáporné reálné hodnoty  $a_1, \dots, a_n$  dány a označme levou stranu dokazované nerovnosti jako  $\alpha$  a pravou jako  $\gamma$ . Pro nezáporné proměnné  $x_1, \dots, x_n$  definujeme funkce

$$A(x_1, \dots, x_n) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}, \quad G(x_1, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n},$$

tedy speciálně  $A(a_1, \dots, a_n) = \alpha$  a  $G(a_1, \dots, a_n) = \gamma$ .

Definujeme množinu

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A(x_1, \dots, x_n) = \alpha, \forall i \in \{1, \dots, n\} : x_i \geq 0\},$$

tedy v  $\Omega$  jsou ty  $n$ -tice  $(x_1, \dots, x_n)$ , které jsou nezáporné a dávají aritmetický průměr  $\alpha$ . Náš postup bude ukázat, že  $G$  na  $\Omega$  nabývá maxima  $\alpha$ . Protože speciálně  $(a_1, \dots, a_n)$  leží v  $\Omega$ , bude z toho plynout, že  $\alpha \geq G(a_1, \dots, a_n) = \gamma$ .

Množina  $\Omega$  je kompaktní: Předně je  $\Omega$  uzavřená, protože se jedná o průnik uzavřených množin  $\{x_i \geq 0\}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  a  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid A(x) = \alpha\}$ , které lze psát jako vzory uzavřených množin při

spojitých zobrazeních, např. poslední množina je  $A^{-1}(\{\alpha\})$ . Dále je  $\Omega$  omezená, neboť pro  $x \in \Omega$  je

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq (x_1 + \cdots + x_n)^2 = n^2 \alpha^2,$$

kde první nerovnost platí roznásobením pravé strany díky nezápornosti  $x_i$  a druhá rovnost z definice množiny  $\Omega$ . Tím pádem každý bod  $\Omega$  je vzdálen od nuly nejvýše  $n\alpha$ , takže je  $\Omega$  omezená. Dle Heineovy–Borelovy věty je  $\Omega$  kompaktní.

Navíc je funkce  $G$  spojitá na  $\Omega$  (součin spojitých funkcí je spojitá funkce a odmocniny jsou spojitě na svých definičních oborech), takže dle věty o nabývání extrémů má  $G$  na  $\Omega$  bod maxima.

Nyní ukážeme, že v bodě maxima  $G$  na  $\Omega$  musí být  $x_1 = \cdots = x_n$ . Předpokládejme, že  $x \in \Omega$  toto nesplňuje, tj. existují  $k \neq \ell$  takové, že  $x_k > x_\ell$ . Zkusme bod  $x$  zperturovat do bodu  $x'$  jako  $x_k - \varepsilon$  a  $x_\ell + \varepsilon$ , ostatní souřadnice zůstanou nedotčeny. Pro dostatečně malé kladné  $\varepsilon$  bude stále  $x_k - \varepsilon \geq 0$  ( $x_k$  musí být kladné a nemůže být přímo nula, jinak by nemohlo  $x_\ell$  být ještě menší než  $x_k$ ). Navíc takto změněné souřadnice stále splňují  $A(x') = \alpha$ , takže  $x' \in \Omega$ .

Pro zkrácení zápisu použijeme součinnou notaci  $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n = \prod_{i=1}^n x_i$ , a konkrétně  $\prod_{i \neq k, \ell} x_i$  znamená, že násobíme všechna  $x_i$  kromě  $x_k$  a  $x_\ell$ . V bodě  $x'$  se hodnota funkce  $G$  změní jako

$$\begin{aligned} (G(x'))^n &= (x_k - \varepsilon)(x_\ell + \varepsilon) \cdot \prod_{i \neq k, \ell} x_i = x_k x_\ell \prod_{i \neq k, \ell} x_i - \varepsilon x_\ell \prod_{i \neq k, \ell} x_i + \varepsilon x_k \prod_{i \neq k, \ell} x_i - \varepsilon^2 \prod_{i \neq k, \ell} x_i = \\ &= \prod_{i=1}^n x_i + \varepsilon(x_k - x_\ell - \varepsilon) \cdot \prod_{i \neq k, \ell} x_i = (G(x))^n + \varepsilon(x_k - x_\ell - \varepsilon) \cdot \prod_{i \neq k, \ell} x_i. \end{aligned}$$

Protože jsme předpokládali  $x_k > x_\ell$ , lze volbou dostatečně malého  $\varepsilon > 0$  zajistit, že  $x_k - x_\ell - \varepsilon > 0$ . Pak bude celý člen  $\varepsilon(x_k - x_\ell - \varepsilon) \cdot \prod_{i \neq k, \ell} x_i$  kladný, a tedy  $G(x') > G(x)$ . Ukázali jsme, že pokud  $x \in \Omega$  nemá všechny souřadnice stejně velké, potom existuje bod  $x'$  také ležící v  $\Omega$ , který zvýší hodnotu  $G$ . Tudíž  $G$  nemůže nabývat maxima v bodě s nesterjnými souřadnicemi.

Přitom ale  $G$  na  $\Omega$  maxima nabývá, takže to již musí být v bodě  $x \in \Omega$ , kde  $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ . Z podmínky  $\alpha = A(x) = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$  vychází, že společná hodnota souřadnic musí být  $x_i = \alpha$ . Maximum  $G$  na  $\Omega$  tak je

$$\max_{x \in \Omega} G(x) = G(\alpha, \dots, \alpha) = \sqrt[n]{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha} = \alpha.$$

Nakonec pro původní zvolený bod díky  $(a_1, \dots, a_n) \in \Omega$  platí, že

$$A(a_1, \dots, a_n) = \alpha = \max_{x \in \Omega} G(x) \geq G(a_1, \dots, a_n) = \gamma,$$

což jsme chtěli dokázat.

**Úloha 3.** (CS nerovnost) Dokaž pomocí nabývání extrémů, že pro reálná  $a_1, \dots, a_n$  a  $b_1, \dots, b_n$  platí

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

(pro snazší práci klidně předpokládej nezápornost  $a_i$  a  $b_i$ ).

Slavná *základní věta algebry* říká, že každý nekonstantní polynom  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  s komplexními koeficienty má komplexní kořen  $x_0 \in \mathbb{C}$ . Naznačíme, jak se tato věta dá dokázat s využitím věty o nabývání minima. V tomto rámečku předpokládáme, že jsi už někdy komplexní čísla viděl(a). Speciálně budeme potřebovat znalost odmocnin z jedničky, konkrétně goniometrického nebo exponenciálního tvaru komplexních čísel, pomocí nichž umíme v  $\mathbb{C}$  řešit rovnice typu  $ax^k = b$  pro  $a, b$  komplexní nenulová čísla a  $k$  přirozené číslo.

Dále potřebujeme absolutní hodnotu komplexního čísla a znalost, že  $\mathbb{C}$  s metrikou  $\rho_{\mathbb{C}}(x, y) = |x - y|$  tvoří metrický prostor. Z hlediska metrického lze ale komplexní čísla  $a + bi$  dobře chápat jako rovinu  $\mathbb{R}^2$  s eukleidovskou metrikou  $\rho_2$ , neboť  $\rho_{\mathbb{C}}(a + bi, c + di)^2 = (a - c)^2 + (b - d)^2 = \rho_2((a, b), (c, d))^2$ . V takto chápaném metrickém prostoru  $\mathbb{C}$  například platí Heineova–Borelova věta.

Nechť je tedy  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  nekonstantní,  $a_j \in \mathbb{C}$ . Bude nás zajímat chování spojité funkce  $\varphi(x) = |P(x)|$ ,  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ . První krok důkazu je ukázat, že pokud zvolíme dostatečně velký poloměr  $r > 0$ , pak  $\varphi$  bude mimo uzavřenou kuličku  $B_r(0)$  už všude velké, v analogii s tím, že každý nekonstantní reálný polynom pro velké argumenty „utíká do  $\pm\infty$ “. Zde „všude velké“ znamená, že existuje konstanta  $C > 0$  taková, že  $\varphi(x) > C$  pro  $x \notin B_r(0)$ , a zároveň v nějakém bodě  $y \in B_r(0)$  je  $\varphi(y) \leq C$ .

Pak množina  $K_C = \{x \in \mathbb{C} \mid \varphi(x) \leq C\}$  je podmnožinou  $B_r(0)$  a z analogie Heineovy–Borelovy věty pro  $\mathbb{C}$  se ukáže, že  $K_C$  je kompaktní. Podle varianty důsledku 12 pro minimum musí v  $K_C$  existovat bod  $x_0$ , v němž  $\varphi$  nabývá minima.

Druhým krokem důkazu je dokázat, že  $\varphi(x_0) = 0$ . Myšlenkou je ukázat, že kdyby  $\varphi(x_0) > 0$ , pak by šlo malým posunem ze  $x_0$  ve vhodném směru hodnotu  $\varphi$  zmenšit, což je ve sporu s minimalitou  $\varphi$  v  $x_0$ . Pro usnadnění života zavedeme pomocnou funkci  $\tilde{P}(x) = P(x + x_0)$ , která je nekonstantním polynomem  $\tilde{P}(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$ . Dále buď  $\tilde{\varphi}(x) = |\tilde{P}(x)|$ , takže  $\tilde{\varphi}$  má minimum v 0 a  $\tilde{\varphi}(0) = \varphi(x_0)$ . Ekvivalentně ukážeme, že  $\tilde{\varphi}(0) = 0$ , neboli že  $b_0 = 0$ .

Nechť  $b_k$  je první nenulový koeficient  $\tilde{P}$  s co nejmenším kladným exponentem  $x^k$ , tedy  $\tilde{P}(x) = b_n x^n + \dots + b_k x^k + b_0$ . Označme ještě  $r(x) = b_n x^{n-k-1} + \dots + b_{k+2} x + b_{k+1}$ , takže platí

$$\tilde{P}(x) = x^{k+1} r(x) + b_k x^k + b_0.$$

To intuitivně znamená, že hodně blízko nuly se  $\tilde{P}$  „chová jako  $b_k x^k + b_0$ “ až na malou chybu způsobenou členy vyššího řádu v  $x^{k+1} r(x)$ .

Trojúhelníkovou nerovností získáme odhad

$$\tilde{\varphi}(x) = |\tilde{P}(x)| \leq |b_0 + b_k x^k| + |x^{k+1} r(x)|.$$

Minimum  $\tilde{\varphi}$  by mělo být  $\tilde{\varphi}(0) = |b_0|$ . V trojúhelníkové nerovnosti tvrdíme, že druhý člen bude blízko nuly zanedbatelný. Zkusme proto zmenšit první člen, konkrétně tak, aby  $b_k x^k = -\varepsilon b_0$  pro  $\varepsilon > 0$ . Pracujeme v komplexních číslech, takže tuto rovnici lze vyřešit! Pokud převědeme  $b_k$  a  $b_0$  do goniometrického tvaru jako  $b_k = |b_k|e^{i\alpha}$  a  $b_0 = |b_0|e^{i\beta}$ , tak třeba  $x = \sqrt[k]{\varepsilon \frac{|b_0|}{|b_k|}} \cdot e^{i(\pi + \beta - \alpha)/k}$  je řešením, načež

$$\tilde{\varphi}(x) \leq |b_0 - \varepsilon^k b_0| + |\varepsilon^{k+1} R(\varepsilon)| = |b_0| - \varepsilon^k (|b_0| - \varepsilon |R(\varepsilon)|),$$

kde  $\varepsilon |R(\varepsilon)|$  umí být pro dostatečně malá  $\varepsilon$  libovolně malé, neboť  $R$  je komplexní polynom, tj. na okolí nuly je  $|R|$  omezená.

Pro dostatečně malá  $\varepsilon$  tak bude  $|b_0| > \varepsilon |R(\varepsilon)|$ , a tudíž  $\tilde{\varphi}(x) < |b_0|$ , což je spor s minimalitou  $\tilde{\varphi}(0) = |b_0|$ . Jediný způsob, jak spor nenastane, je, že  $b_0 = 0$ , protože v takovém případě naše volba  $x$  jako řešení  $b_k x^k = -\varepsilon b_0$  bude taky nula. Pak je ale  $|P(x_0)| = \varphi(x_0) = \tilde{\varphi}(0) = 0$  a našli jsme kořen polynomu  $P$ .

## Funkce jako body

Věta o nabývání extrémů nám umožňuje podívat se na zajímavý nový typ metrických prostorů, které pro jednu nebyvají  $\mathbb{R}^n$  s eukleidovskou metrikou. Jedná se o *prostor spojitých funkcí na kompaktu*. Jak název napovídá, nejdřív zvolíme nějaký kompaktní prostor  $(K, \rho)$  a zavedeme množinu

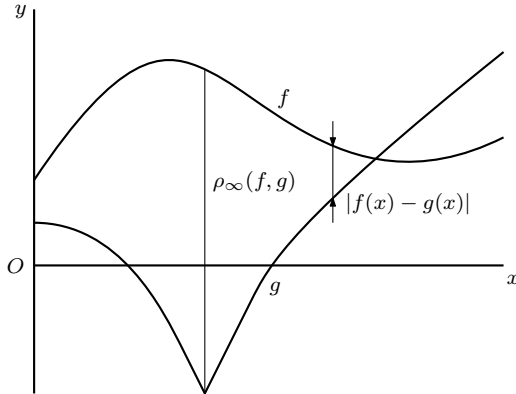
$$\mathcal{C}(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ je spojitá}\},$$

tedy body nového metrického prostoru budou *funkce*.

Dvě spojitě funkce  $f, g : K \rightarrow \mathbb{R}$  budeme měřit tak, že se podíváme, jak se jejich funkční hodnoty maximálně odlišují. Jinými slovy nás zajímá maximální hodnota  $|f(x) - g(x)|$  pro  $x \in K$ . Takovéto maximum opravdu existuje právě proto, že funkce  $f, g$  i  $|x|$  jsou spojitě, takže funkce  $h(x) = |f(x) - g(x)|$  je také spojitá a na kompaktu  $K$  nabývá maxima. Takto definovaná vzdálenost funkcí  $f$  a  $g$  opravdu splňuje axiomy metriky.

**Definice 17.** Buď  $(K, \rho)$  kompaktní metrický prostor. Množinu všech spojitých funkcí  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  značíme  $\mathcal{C}(K)$ . Na této množině definujeme *supremovou metriku* dvou funkcí  $f, g \in \mathcal{C}(K)$  jako

$$\rho_\infty(f, g) = \max_{x \in K} |f(x) - g(x)|.$$



**Cvičení 13.** Ukaž, že pro kompaktní metrický prostor  $(K, \rho)$  je  $(\mathcal{C}(K), \rho_\infty)$  také metrický prostor.

Prostor  $(\mathcal{C}(K), \rho_\infty)$  dává zajímavý nový způsob, jak přemýšlet o (spojitých) funkcích geometricky – jsou to zase jen body, mezi nimiž lze rozumně měřit vzdálenosti, mluvit o blízkosti funkcí a kreslit si obrázky s kuličkami. Navíc má  $\mathcal{C}(K)$  tu hezkou vlastnost, že v něm, narozdíl od obecných metrických prostorů, lze sčítat i násobit, neboť spojitost se při těchto operacích zachovává.

**Příklad 18.** Nechť  $f : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  je dána jako  $f(x) = x^2$ . Ukaž, že v kuličce  $U_1(f)$  leží funkce  $g(x) = x$ ,  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  a že nulová funkce  $0(x) = 0$ ,  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  leží na hranici  $U_1(f)$ .

*Řešení.*

Funkce  $h(x) = |f(x) - g(x)| = |x^2 - x|$  se na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  rovná  $h(x) = x - x^2$ , neboť pro  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  platí  $x^2 \leq x$ . Tato funkce je kvadratická s maximem  $h(1/2) = 1/4$ , jak lze vidět z doplnění na čtverec

$$h(x) = x - x^2 = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Tím pádem  $\rho_\infty(f, g) = 1/4 < 1$ , takže  $g \in U_1(f)$ .

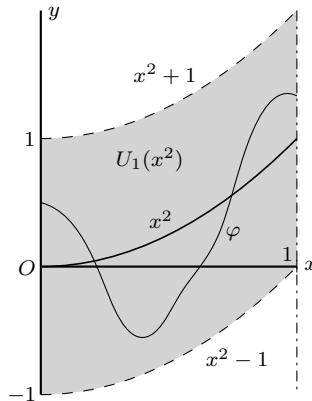
Hranice koule  $U_1(f)$  je, jako v každém metrickém prostoru, dána sférou

$$\partial U_1(f) = \{\varphi \in \mathcal{C}(K) \mid \rho_\infty(f, \varphi) = 1\},$$

takže stačí ukázat, že nulová funkce  $0$  má od  $f$  supremovou vzdálenost  $1$ . To platí, protože funkce

$$\tilde{h}(x) = |f(x) - 0(x)| = |x^2 - 0| = x^2$$

má na  $\langle 0, 1 \rangle$  maximum  $\tilde{h}(1) = 1^2 = 1$ , takže opravdu  $\rho_\infty(f, 0) = 1$  a  $0 \in \partial U_1(f)$ .



Abychom měli i geometrickou představu, tak kouli  $U_1(x^2)$  v  $\mathcal{C}(\langle 0, 1 \rangle)$  si lze představit tak, že se jedná o oblast mezi grafy funkcí  $x^2 - 1$  a  $x^2 + 1$  na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ . Je to proto, že v této oblasti jsou právě body mající svislou vzdálenost od  $x^2$  menší než  $1$ . Spojitá funkce  $\varphi$  pak v kouli  $U_1(x^2)$  leží právě tehdy, když její graf celý leží ve zmíněné oblasti, tj. nikdy nepřekročí nad  $x^2 + 1$  ani pod  $x^2 - 1$ . Tudíž na obrázku nakreslená funkce  $\varphi$  v kouli  $U_1(x^2)$  leží. To, že nulová funkce leží na hranici  $U_1(x^2)$  pak plyne z obrázku tak, že se nulová funkce v bodě  $1$  dotýká „dolního mantinelu“  $x^2 - 1$ .

Různé volby kompaktu  $K$  dávají různě se chovající prostory  $\mathcal{C}(K)$ . Většinu času budeme pracovat s  $K = \langle 0, 1 \rangle$ , protože se spojitými funkcemi na uzavřeném intervalu se relativně snadno pracuje, a přitom mají zajímavé chování. Volba hraničních bodů jako  $0$  a  $1$  je přitom čistě pro usnadnění výpočtů a typicky by obdobné chování měly spojitě funkce na libovolném uzavřeném intervalu. Pěkné věty například platí i pro volbu  $K$  jako kružnice v  $\mathbb{R}^2$  nebo sféry<sup>2</sup> v  $\mathbb{R}^3$ . V následujícím cvičení se podíváme na volbu  $K$  jako malého diskrétního prostoru, a uvidíme, že  $\mathcal{C}(K)$  se v takovém případě chová jako nám známé prostory  $\mathbb{R}^n$ .

**Cvičení 14.** Rozmysli si, že pro prostor  $K = \{1, 2\}$  s diskrétní metrikou  $\rho_{\text{disk}}$  lze  $\mathcal{C}(K)$  chápat jako  $\mathbb{R}^2$  s maximovou metrikou.

<sup>2</sup>Tak například *Borsukova–Ulamova věta* říká, že pokud  $a$  je bod v  $\mathbb{R}^3$  a  $r > 0$ , pak pro spojitou funkci na sféře  $f : \partial U_r(a) \rightarrow \mathbb{R}^2$  vždy existují protilehlé body  $x, \bar{x} \in \partial U_r(a)$  takové, že  $f(x) = f(\bar{x})$  (protilehlé ve smyslu, že přímka daná body  $x$  a  $\bar{x}$  prochází středem sféry  $a$ ). To se často popularizačně popisuje tak, že na povrchu Země vždy existují dva protilehlé body, v nichž je stejná teplota a tlak. Samozřejmě za předpokladu, že teplota i tlak se na Zemi mění spojitě, a se zjednodušením, že Země je koule.

Může vypadat trochu zvláštně, že metriku  $\rho_\infty$  nazýváme supremovou metrikou a ne maximovou metrikou, když ji definujeme maximem. Abychom to trochu ospravedlnili, supremovou metrikou lze ekvivalentně definovat supremem jako  $\rho_\infty(f, g) = \sup_{x \in K} |f(x) - g(x)|$  pro dvě spojité funkce  $f, g : K \rightarrow \mathbb{R}$  a kompaktní metrický prostor  $(K, \rho)$ . Definice s maximem je akorát trochu explicitnější, protože z věty o nabývání extrémů víme, že pro spojité funkce  $f, g$  ono maximum opravdu existuje.

Na druhou stranu využití supremum pro definici metriky  $\rho_\infty$  má svou výhodu, protože s ním lze měřit větší množství funkcí. Například buď  $(M, \rho)$  libovolný metrický prostor a označme  $\mathcal{B}(M)$  jako prostor omezených funkcí na  $M$ , tj.

$$\mathcal{B}(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid \text{existuje } c > 0 \text{ takové, že } |f(x)| \leq c \text{ pro všechna } x \in M\}.$$

Pro  $f, g \in \mathcal{B}(M)$  pak  $\rho_\infty(f, g) = \sup_{x \in M} |f(x) - g(x)|$  vždy existuje (funkce  $|f(x) - g(x)|$  neroste nade všechny meze, tj. je omezená a má supremum) a lze ukázat, že  $(\mathcal{B}(M), \rho_\infty)$  také tvoří metrický prostor. Zobecnění je v tom, že nevyžadujeme ani kompaktnost  $M$ , ani spojitost měřených funkcí. Maxima pro takové funkce existovat nemusí, takže supremovou metrikou  $\rho_\infty$  dává smysl definovat pouze supremem.

Takovéto zobecnění je však za cenu toho, že  $\mathcal{B}(M)$  nemá obecně tolik pěkných vlastností jako  $\mathcal{C}(K)$ . Budeme se proto věnovat pouze spojitým funkcím na kompaktu.

Užitečná vlastnost prostorů  $\mathcal{C}(K)$  je jejich úplnost.

**Věta 19.** Pro kompaktní prostor  $(K, \rho)$  je prostor  $\mathcal{C}(K)$  úplný.

Větu dokazovat nebudeme, je to trochu pracné. Základní myšlenka důkazu je ale taková, že pokud máme cauchyovskou posloupnost spojitých funkcí  $(f_n)_{n=1}^\infty$ , pak speciálně pro každý bod  $x \in K$  je i posloupnost reálných čísel  $(f_n(x))_{n=1}^\infty$  cauchyovská. Protože je  $\mathbb{R}$  úplný prostor, má tato posloupnost limitu, tu označíme jako  $f(x)$ , neboť závisí na volbě bodu  $x \in K$ . Tím vytvoříme novou funkci  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ , která je bodově definovaná jako  $f(x) = \lim (f_n(x))$ . O této funkci je pak potřeba dokázat, že je jednak spojitá, jednak že je limitou posloupnosti funkcí  $(f_n)_{n=1}^\infty$  vzhledem k supremové metrice. Přitom se netriviálně využije kompaktnosti  $K$  – spojitě funkce na kompaktu automaticky splňují jistou silnější definici spojitosti (tzv. *stejnouměrnou spojitost*) a ta se použije k ukázaní spojitosti  $f$ .

Protože je prostor  $\mathcal{C}(K)$  úplný, lze na něm například používat Banachovu větu o kontrakci. Tímto způsobem je někdy možné řešit funkcionální rovnice, jak ukážeme v následujícím příkladu.

**Příklad 20.** Nalezni všechny spojitě funkce  $f : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  splňující

$$2f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = x.$$

*Řešení.* Rovnici přeuspořádáme jako  $f(x) = \frac{1}{2} \cdot (f(x/2) + x^2)$ . Tato rovnice připomíná hledání pevného bodu, akorát neznámým „bodem“ je v tomto případě hledaná funkce  $f$ . V kontextu metrických prostorů to ale není problém.

Definujeme zobrazení  $T : \mathcal{C}(\langle 0, 1 \rangle) \rightarrow \mathcal{C}(\langle 0, 1 \rangle)$  jako

$$T(f)(x) = \frac{1}{2} \cdot (f(x/2) + x^2), \quad x \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Zobrazení  $T$  tedy každé  $f \in \mathcal{C}(\langle 0, 1 \rangle)$  přiřadí novou funkci  $T(f)$ , která je v každém bodě  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  dána vzorcem výše. To, že  $T(f)$  je taky spojitá funkce na  $\langle 0, 1 \rangle$ , není úplně zřejmé, ale plyne to z toho, že funkce  $x^2$  i  $f(x/2)$  jsou spojitě, takže i jejich součet je spojitý, jak jsme zmiňovali v druhém dílu seriálu. Přitom  $f(x/2)$  je spojitá, protože se jedná o složení spojitých funkcí  $f$  a  $x/2$ .

Nyní ukážeme, že  $T$  je kontrakcí na prostoru  $(\mathcal{C}(\langle 0, 1 \rangle), \rho_\infty)$ . Pro libovolný bod  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  platí

$$\begin{aligned} |T(f)(x) - T(g)(x)| &= \left| \frac{1}{2} \cdot (f(x/2) + x^2) - \frac{1}{2} \cdot (g(x/2) + x^2) \right| = \frac{1}{2} |f(x/2) - g(x/2)| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \max_{y \in \langle 0, 1 \rangle} |f(y/2) - g(y/2)| = \frac{1}{2} \max_{z \in \langle 0, 1/2 \rangle} |f(z) - g(z)| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \max_{z \in \langle 0, 1 \rangle} |f(z) - g(z)| = \frac{1}{2} \rho_\infty(f, g), \end{aligned}$$

kde jsme v úpravách maxima nejdřív využili substituce  $z = y/2$ , a následně toho, že maximum přes větší množinu  $\langle 0, 1 \rangle$  bude větší nebo rovno maximum přes menší  $\langle 0, 1/2 \rangle$ . Pro každý bod  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  jsme ukázali odhad  $|T(f)(x) - T(g)(x)| \leq \frac{1}{2} \rho_\infty(f, g)$ , takže už musí platit i

$$\rho_\infty(T(f), T(g)) = \max_{x \in \langle 0, 1 \rangle} |T(f)(x) - T(g)(x)| \leq \frac{1}{2} \rho_\infty(f, g).$$

To dokazuje, že  $T$  je kontrakcí na prostoru spojitých funkcí.

Protože je navíc  $\mathcal{C}(\langle 0, 1 \rangle)$  úplný prostor, má podle Banachovy věty o kontrakci zobrazení  $T$  právě jeden pevný bod, takže existuje právě jedno spojitě řešení  $f$  zadané rovnice

$$2f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = x$$

na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ .

Můžeme celkem snadno tipnout, že toto řešení bude lineární, tj. tvaru  $f(x) = ax + b$ . Dosazením dostaneme  $2ax + 2b - ax/2 - b = x$  a porovnáním koeficientů u lineárního a absolutního členu zjistíme, že  $2a - a/2 = 1$  a  $2b - b = 0$ , tedy  $a = 2/3$  a  $b = 0$ . Funkce  $f(x) = 2x/3$ ,  $x \in \langle 0, 1 \rangle$  je tak jediným spojitým řešením zadané rovnice.

Může se zdát, že jsme se v příkladu většinu času věnovali nepodstatným věcem, a pak řešení náhodně tipli. Ale celý náš postup stál na tom, že jsme ukázali, že tipnout řešení dává smysl, protože existuje právě jedno – díky existenci mělo smysl vůbec tipovat, a jediný správný tip stačí na nalezení všech (tj. jednoho) řešení. V závislosti na funkcionální rovnici může být tipnutí řešení ta jednodušší část, zatímco tou pracnější je ukázat, že jiná řešení neexistují.

Ještě poznamenejme, že kdyby místo funkce  $x$  na pravé straně rovnice byla libovolná funkce  $R \in \mathcal{C}(K)$ , tak by úplně stejný postup jako v příkladu pomocí Banachovy věty zaručil, že funkcionální rovnice

$$2f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = R(x)$$

má právě jedno spojitě řešení  $f : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ . Tedy například i o strašlivostech typu

$$2f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) = x^{2026} + \sin(6x^3 + 7x) - 2^x$$

můžeme říct, že existuje právě jedna spojitá  $f$  splňující takovou rovnici na  $\langle 0, 1 \rangle$ . Tipnout řešení by bylo o něco nepříjemnější, ale alespoň víme, že pokud označíme

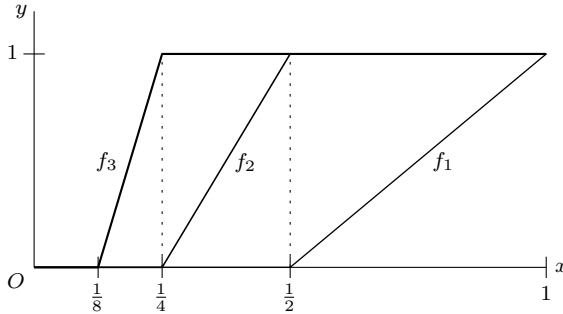
$$T(f)(x) = \frac{1}{2} \left( f\left(\frac{x}{2}\right) + x^{2026} + \sin(6x^3 + 7x) - 2^x \right),$$

tak posloupnost definovaná volbou  $f_0 \in \mathcal{C}(K)$  a  $f_{n+1} = T(f_n)$  konverguje k řešení vzhledem k metrice  $\rho_\infty$ .

Jako předzvěst další kapitoly se podíváme na to, že uzavřené koule v  $\mathcal{C}(K)$  nemusí být kompaktní.

**Příklad 21.** Dokaž, že v metrickém prostoru  $(\mathcal{C}(\langle 0, 1 \rangle), \rho_\infty)$  koule  $B_1(0)$  není kompaktní navzdory tomu, že je uzavřená a omezená.

*Řešení.* Uzavřenost i omezenost koule  $B_1(0)$  je jasná, platí to pro všechny uzavřené koule ve všech metrických prostorech. Její nekompaktnost ukážeme jako obvykle tak, že najdeme nekonečnou posloupnost prvků, které jsou od sebe všechny daleko alespoň 1.



Provedeme to třeba volbou  $n$ -té funkce jako na obrázku, které jsou dány předpisy  $f_n(x) = 0$  pro  $x \in \langle 0, 1/2^n \rangle$ , dále  $f_n(x) = 2^n(x - 1/2^n)$  pro  $x \in \langle 1/2^n, 1/2^{n-1} \rangle$ , a nakonec  $f_n(x) = 1$  pro  $x \in \langle 1/2^{n-1}, 1 \rangle$ . Předpisy ale ve výsledku nejsou tak důležité, hlavní je myšlenka s tím, že chceme spojitě funkce takové, že dvě různé se vždy v nějakém bodě liší o 1.

Každá takováto funkce je spojitá na  $\langle 0, 1 \rangle$ , neboť na vnitřku intervalů  $\langle 0, 1/2^n \rangle$ ,  $\langle 1/2^n, 1/2^{n-1} \rangle$ ,  $\langle 1/2^{n-1}, 1 \rangle$  se jedná o jednoduché spojitě konstantní nebo lineární části a v krajních bodech těchto intervalů se tyto části spojitě napojují. Navíc supremová vzdálenost každé této funkce od nulové funkce 0 je přesně 1, takže  $f_n \in B_1(0)$ .

Podívejme se na vzdálenost funkcí  $f_n$  a  $f_m$ , kde  $n > m$ . Funkce  $f_m$  má v bodě  $a = 1/2^m$  hodnotu  $f_m(a) = 0$ . Zato funkce  $f_n$  splňuje  $f_n(a) = 1$ , neboť  $a = 1/2^m \geq 1/2^{n-1}$ , takže  $a \in \langle 1/2^{n-1}, 1 \rangle$ . Tudíž  $\rho_\infty(f_n, f_m) \geq |f_n(a) - f_m(a)| = 1$ .

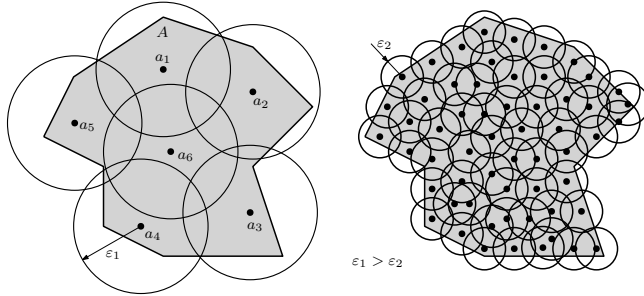
Žádná podposloupnost posloupnosti  $(f_n)_{n=1}^\infty$  „bodů“ v  $\mathcal{C}(\langle 0, 1 \rangle)$  tak není cauchyovská, takže ani nemůže jít vybrat konvergentní podposloupnost. Tedy  $B_1(0)$  není kompaktní.

## Intermezzo: Kompakty jsou malé podruhé

Ve druhém dílu seriálu jsme naznačili, že bychom se chtěli dívat na kompakty jako na úplné a „malé“ množiny. Heineova–Borelova věta nám něco takového umožnila v prostorech  $\mathbb{R}^n$  pomocí omezenosti. Nicméně příklad 21 ukazuje, že v jiných metrických prostorech klidně můžou úplné a omezené množiny být nekompaktní. Omezené množiny nemusí být v  $\mathcal{C}(\langle 0, 1 \rangle)$  „dostatečně malé“. Pojem omezenosti proto vylepšíme, abychom opravdu dostali charakterizaci kompaktnosti.

**Definice 22.** Nechť  $(M, \rho)$  je metrický prostor a  $A \subseteq M$ . Řekneme, že  $A$  je *totálně omezená*, pokud pro libovolné  $\varepsilon > 0$  umíme najít konečně bodů<sup>3</sup>  $a_1, \dots, a_n \in A$  takových, že kuličky  $U_\varepsilon(a_i)$  pokrývají celé  $A$ , tj.  $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_\varepsilon(a_i)$ .

<sup>3</sup>Pro dané  $\varepsilon > 0$  se takovým bodům  $a_1, \dots, a_n$  říká  $\varepsilon$ -síť. Tento pojem nebudeme potřebovat, ale je celkem názorný – alespoň intuitivně si lze představit rybářskou síť s pevnými body  $a_1, \dots, a_n$ , která je s menším  $\varepsilon$  jemnější (tj. má menší oka) a zvládne zachytávat menší objekty (třeba v  $\mathbb{R}^2$  libovolná kulička o poloměru alespoň  $\varepsilon$  musí obsahovat alespoň jeden z bodů  $a_1, \dots, a_n$ , tj. neproklouzne sítí).



Totální omezenost množiny je silnější vlastnost než pouhá omezenost. Je to jednoduše proto, že pokud lze množinu pokrýt konečně kuličkami, pak lze tyto kuličky uzavřít do větší koule, a ta pak dokazuje omezenost původní množiny. Klíčový je zde ovšem konečný počet kuliček (jinak totiž lze každý prostor pokrýt kuličkami se středy ve všech bodech, ale pak takových kuliček snadno může být nekonečno).

**Tvrzení 23.** *Necht'  $(M, \rho)$  je metrický prostor a  $A \subseteq M$  je totálně omezená. Pak je  $A$  také omezená.*

*Důkaz.* Nalezneme body  $a_1, \dots, a_n \in A$  takové, že  $A$  je pokryta kuličkami  $U_1(a_1), \dots, U_1(a_n)$  o poloměru 1. Zvolme pevně nějaké  $s \in A$  a poloźme

$$r = \max\{\rho(s, a_1) + 1, \dots, \rho(s, a_n) + 1\}.$$

Pokud je nyní  $x \in A$  libovolné, tak lze díky pokrytí  $A$  kuličkami najít index  $k \in \{1, \dots, n\}$  takový, že  $x$  leží v kuličce  $U_1(a_k)$ . Pak je z trojúhelníkové nerovnosti

$$\rho(s, x) \leq \rho(s, a_k) + \rho(a_k, x) < \rho(s, a_k) + 1 \leq r.$$

Tedy  $x$  leží v  $U_r(s)$ . Protože  $x$  byl libovolný bod  $A$ , platí  $A \subseteq U_r(s)$ , takže  $A$  je omezená.  $\square$

Dostáváme se ke slibovanému popisu kompaktních množin. Všimni si, že pokud je  $(M, \rho)$  úplný prostor, pak víme z druhého dílu seriálu, že každá uzavřená množina  $F \subseteq M$  je také úplná, takže kompaktnost takové  $F$  je ekvivalentní totální omezenosti  $F$ . Přitom definice kompaktnosti mluví o konvergentních podposloupnostech, zatímco totální omezenost o pokrývání  $F$  konečným počtem kuliček, což jsou zdánlivě dost odlišné věci. Obě ale popisují stejný typ množin, kompakty.

**Věta 24.** *Necht'  $(M, \rho)$  je metrický prostor a  $A \subseteq M$ . Pak  $A$  je kompaktní právě tehdy, když je  $A$  úplná a totálně omezená.*

*Důkaz.* Necht' je nejdříve  $A$  kompaktní. Již víme, že pak musí být  $A$  úplná. Kdyby nebyla totálně omezená, tak by existovalo  $\varepsilon > 0$  takové, že žádný konečný počet  $\varepsilon$ -kuliček  $A$  nepokryje. V tu chvíli lze postupně volit  $a_1 \in A$ ,  $a_2 \in A \setminus U_\varepsilon(a_1)$ ,  $a_3 \in A \setminus (U_\varepsilon(a_1) \cup U_\varepsilon(a_2))$  a tak dále, čímž vytvoříme posloupnost  $(a_n)_{n=1}^\infty$  bodů v  $A$ . Všechny její body jsou ale navzájem od sebe alespoň  $\varepsilon$  daleko – pro  $n > m$  bylo  $a_n$  voleno tak, aby neleželo v  $U_\varepsilon(a_m)$ . To znamená, že tato posloupnost nemůže mít konvergentní podposloupnost, protože žádná podposloupnost není cauchyovská. To je spor s kompaktností  $A$ . Tedy  $A$  musela být totálně omezená.

Necht' je nyní naopak  $A$  úplná a totálně omezená. Necht' je  $(x_n)_{n=1}^\infty$  posloupnost bodů v  $A$ , ze které chceme vybrat konvergentní podposloupnost. Myšlenka je podobná důkazu Bolzanovy-Weierstrassovy věty, ve kterém jsme vždycky rozpůlili interval a hledali tu půlku, ve které leží nekonečno bodů posloupnosti. Tentokrát  $A$  vždy pokryjeme konečně kuličkami, vybereme tu s nekonečným bodů posloupnosti, tu zase pokryjeme konečným počtem menších kuliček, vybereme tu s nekonečným bodů posloupnosti, a tak dále.

Konkrétně nejdřív z totální omezenosti nalezneme body (pozor, horní index je index, ne mocnina)  $a_1^1, \dots, a_{n(1)}^1$  takové, že  $A$  je pokryta kuličkami  $U_1(a_i^1)$ . Pak alespoň v jedné z nich musí ležet nekonečno bodů posloupnosti  $(x_n)_{n=1}^\infty$ , tu označme jako  $G_1$ .

Nyní nalezneme body  $a_1^2, \dots, a_{n(2)}^2$  takové, že  $A$  je pokryta kuličkami  $U_{1/2}(a_i^2)$ . Pak musí platit

$$G_1 = A \cap G_1 = \bigcup_{i=1}^{n(2)} (U_{1/2}(a_i^2) \cap G_1).$$

Levá množina obsahuje nekonečně bodů posloupnosti  $(x_n)_{n=1}^\infty$ , zatímco pravá strana je sjednocení konečné mnoha množin, takže existuje  $i$  takové, že  $U_{1/2}(a_i^2) \cap G_1$  obsahuje nekonečně bodů z  $(x_n)_{n=1}^\infty$ . Tuto množinu označme jako  $G_2$ .

Obecně, pokud již máme množiny  $G_k \subseteq G_{k-1} \subseteq \dots \subseteq G_1$  obsahující nekonečně bodů posloupnosti  $(x_n)_{n=1}^\infty$ , pak z totální omezenosti nalezneme  $a_1^{k+1}, \dots, a_{n(k+1)}^{k+1}$  takové, že  $U_{1/(k+1)}(a_i^{k+1})$  pokrývají  $A$ , dále zvolíme jednu z těchto kuliček, která v průniku s  $G_k$  obsahuje nekonečno bodů dané posloupnosti, a tento průnik označíme  $G_{k+1}$ . Takto umíme vytvořit nekonečnou posloupnost množin  $(G_k)_{k=1}^\infty$ .

Nyní budeme podobně jako v Bolzanově-Weierstrassově větě vybírat podposloupnost tak, že  $x_{n_1}$  vybereme z  $G_1$ , následně  $x_{n_2}$  vybereme z  $G_2$  tak, aby  $n_2 > n_1$ , a tak dále. Obecně,  $x_{n_k}$  vybíráme z  $G_k$ , aby zároveň  $n_k > n_{k-1}$  – to lze, neboť v  $G_k$  leží nekonečno bodů posloupnosti  $(x_n)_{n=1}^\infty$ , takže lze vybrat bod s libovolně velkým indexem. Takto vybereme podposloupnost  $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ .

Dále ukážeme, že  $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$  je Cauchyovská. Buď  $\varepsilon > 0$  libovolné, pak lze najít  $n_0$  takové, že pro  $n \geq n_0$  již je  $1/n < \varepsilon/2$ . Buďte  $k > \ell \geq n_0$  libovolná. Pak  $x_{n_k} \in G_k \subseteq G_\ell$  a  $x_{n_\ell}$  také leží v  $G_\ell$ . Ale množina  $G_\ell$  byla zkonstruována jako průnik  $G_{\ell-1}$  s nějakou kuličkou  $U_{1/\ell}(a_i^\ell)$  o poloměru  $1/\ell$ , takže vzdálenost  $x_{n_k}$  od  $x_{n_\ell}$  je nanejvýš  $2/\ell < 2 \cdot \varepsilon/2 = \varepsilon$ , neboť leží ve stejné kuličce. Tím jsme ověřili Cauchyovskost  $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ .

Nakonec využijeme předpokládané úplnosti  $A$ , která nám říká, že Cauchyovská  $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$  již musí být konvergentní. Díky libovolnosti  $(x_n)_{n=1}^\infty$  jsme ukázali, že  $A$  je kompaktní. □

Existuje spousta dalších popisů kompaktnosti. Například vlastnost, že spojitá funkce na kompaktu nabývá svého maxima, je ve skutečnosti jiná charakterizace kompaktnosti – pokud  $(M, \rho)$  je metrický prostor, pak  $M$  je kompaktní právě tehdy, když každá spojitá  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  nabývá svého maxima. Neboli na nekompaktním prostoru vždy musí existovat spojitá funkce, která svého maxima nenabývá.

Ještě jiný popis kompaktnosti prostoru  $(M, \rho)$  je tento: Pokud zvolíme libovolný systém otevřených množin  $\mathcal{G}$  pokrývající  $M$ , tj.  $M \subseteq \bigcup \mathcal{G}$ , pak vždy musí existovat konečný podsystém  $\mathcal{G}^* \subseteq \mathcal{G}$  stále pokrývající  $M$ . Často je toto ten způsob, jak se kompaktnost definuje, protože se dobře chová i při zobecňování metrických prostorů. Nicméně tento popis umí být poněkud nepřehledný.

Přesto dává nový užitečný pohled na to, co kompaktnost umí. Celkem často se totiž stává, že něco platí na každé kuličce – okolíčku – kolem každého bodu. Takových kuliček je bohužel typicky příliš mnoho a špatně se s nimi pracuje. Ovšem takové kuličky kolem všech bodů prostoru jistě prostor pokrývají, takže pokud je prostor kompaktní, lze z nich vybrat nějaký konečný počet speciálních kuliček, které ho stále pokrývají. Z nekonečna jsme udělali konečný počet, se kterým se mnohem lépe zachází!

Například totální omezenost kompaktního prostoru plyne z tohoto popisu kompaktnosti ihned: Pokud je  $K$  kompaktní a  $\varepsilon > 0$  libovolné, tak nejdříve pokryjeme  $K$  všemi možnými kuličkami  $U_\varepsilon(x)$ ,  $x \in K$  – ty tvoří náš systém  $\mathcal{G}$ . Z kompaktnosti existuje jeho konečný podsystém, tj. konečný počet bodů  $x_1, \dots, x_n \in K$  takových, že  $K \subseteq U_\varepsilon(x_1) \cup \dots \cup U_\varepsilon(x_n)$ . Tedy  $K$  je totálně omezená.

## Aproximace spojitých funkcí

Na závěr seriálu si zmíníme bez důkazu Weierstrassovu větu, podle které lze každou spojitou funkci na omezeném intervalu libovolně přesně polynomiálně aproximovat.

**Věta 25.** (Weierstrassova) *Nechť  $a < b$  jsou reálná čísla a nechť  $f \in C(\langle a, b \rangle)$ . Pak existuje posloupnost polynomů  $(P_n)_{n=1}^\infty$ , která v supremové metrice  $\rho_\infty$  konverguje k  $f$  na  $\langle a, b \rangle$ .*

Ekvivalentně lze říct, že pro každou toleranci  $\varepsilon > 0$  existuje polynom  $P$  takový, že se v libovolném bodě  $x \in \langle a, b \rangle$   $P$  od  $f$  liší jako  $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ . Ještě jinak můžeme o Weierstrassově větě přemýšlet takto: Každý polynom na  $\langle a, b \rangle$  je spojitý, takže pokud označíme jako  $A = \{P \mid P \text{ je polynom na } \langle a, b \rangle\}$ , pak  $A$  je podmnožinou  $C(\langle a, b \rangle)$ . Weierstrassova věta říká, že  $A$  je hustá v  $C(\langle a, b \rangle)$ , neboli že uzávěr  $A$  dá celý prostor  $C(\langle a, b \rangle)$ .

Z Weierstrassovy věty plyne, že polynomy jsou dostatečně flexibilní typ funkcí, kterými lze až na (libovolně) malou chybu nahrazovat komplikovanější spojitě funkce. Navíc jeden z důkazů Weierstrassovy věty přímo ukazuje, jak vhodné aproximující polynomy hledat, takže je jsme schopni i přímo konstruovat a pracovat s nimi.

**Cvičení 15.** Najdi nespojitou funkci na uzavřeném intervalu, kterou nejde libovolně přesně aproximovat polynomem.

**Úloha 4.** Nechť  $f \in C(\langle 0, 1 \rangle)$ . Lze  $f$  v supremové metrice libovolně přesně aproximovat polynomem, který má pouze sudé exponenty, tj. tvaru  $a_{2n}x^{2n} + a_{2n-2}x^{2n-2} + \dots + a_2x^2 + a_0$ ? Co kdyby  $f$  ležela v  $C(\langle -1, 1 \rangle)$ ?

## Rozloučeníčko

Tak jsme na konci. Děkujeme, že sis náš seriál přečetl(a), a moc doufáme, že sis z něj něco užitečného odnesl(a), a snad že Tě i místy bavil. Přejeme hodně štěstí v řešení nejen seriálové série a měj se krásně!

### Návody k úlohám

1. Přirozeným kandidátem je 1, protože  $\sin(\pi/2) = 1$  je maximální hodnota sinu. Ukaž, že se lze přirozeným  $n$  přiblížit libovolně blízko hodnotě  $\pi/2 + 2k\pi$  pro nějaké  $k$  celé – je užitečné se dívat na  $n$  „modulo  $2\pi$ “ a použít Dirichletův princip na spoustu hodnot ( $n \bmod 2\pi$ ).

2. Vhodně přímku parametrizuj, abys mohl(a) pracovat na prostoru parametrů. Omez se jen na takové parametry, které nedávají přímku úplně daleko od zadaných bodů  $A_1, \dots, A_n$ .

3. Inspiruj se příkladem s AG nerovností. Zvol pevně  $a, b \in \mathbb{R}^n$  a definuj funkci  $R(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ . Ukaž, že na vhodné množině  $R$  nabývá minima. Dále ukaž, že pokud  $x$  není skalárním násobkem  $a$ , tj.  $x \neq \xi \cdot a$  pro číslo  $\xi \in \mathbb{R}$ , pak lze vhodnou perturbací  $x$  snížit hodnotu  $R$ .

4. Využij toho, že  $f(t) = t^2$  je bijekce na  $\langle 0, 1 \rangle$ . To nicméně na  $\langle -1, 1 \rangle$  neplatí a mělo by být vidět, že na  $\langle -1, 1 \rangle$  půjde takto aproximovat  $f$  polynomem se sudými exponenty pouze tehdy, když  $f$  bude sudá, tj.  $f(x) = f(-x)$  pro  $x \in \langle -1, 1 \rangle$ . V tomto případě tedy záleží na tom, jaký uzavřený interval prostoru  $C(\langle a, b \rangle)$  uvažujeme.

## Řešení cvičení

1. Zvolme libovolný prvek  $a_0$  z  $A$ . Předpokládejme, že nejde o maximum, pak musí existovat nějaký větší prvek  $a_1 \in A$ . Pokud stále nejde o maximum, musí existovat ještě větší prvek  $a_2 \in A$ . Protože má  $A$  jen konečně mnoho prvků, časem se nám některý prvek zopakuje. Tím pádem je ale tento prvek větší než on sám, což je spor.

2. Jednička je zřejmě horní mezí  $A$ . Nechť  $x < 1$ . Pak je  $1 - x > 0$ , takže lze nalézt  $n$  přirozené splňující  $n > 1/(1 - x)$ . Pak ale  $1 - x > 1/n$ , neboli  $x < 1 - 1/n \in A$ , tedy  $x$  není horní mezí  $A$ . Protože je 1 nejnižší horní mezí, jedná se o supremum  $A$ .

3. Lze to, jen musíme volit body  $x_n$  trochu opatrněji. Konkrétně každý bod  $x_n$  chceme stále  $\frac{1}{n}$ -blízko k supremu, ale navíc chceme, aby byl k supremu blíže než předchozí bod  $x_{n-1}$ .

Nejdříve se podíváme na  $\sup A - 1$ , a protože to už není horní mezí  $A$ , nalezneme  $x_1 \in A$  splňující  $x_1 > \sup A - 1$ . Následně označme  $r_1 = \min\{1/2, \sup A - x_1\} > 0$ , podíváme se na  $\sup A - r_1$  a nalezneme  $x_2 \in A$  splňující  $x_2 > \sup A - r_1$ . Obecně pokud máme bod  $x_n > \sup A - r_{n-1}$  z  $A$  a  $r_n = \min\{1/(n+1), \sup A - x_n\}$ , tak v  $A$  nalezneme  $x_{n+1} > \sup A - r_n$  a položíme  $r_{n+1} = \min\{1/(n+2), \sup A - x_{n+1}\}$ .

Tímto způsobem máme posloupnost  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  bodů z  $A$ , které jednak splňují

$$\sup A \geq x_n > \sup A - r_{n-1} \geq \sup A - 1/n,$$

takže konvergují k  $\sup A$ , a jednak splňují

$$x_n > \sup A - r_{n-1} \geq \sup A - (\sup A - x_{n-1}) = x_{n-1},$$

takže tvoří rostoucí posloupnost.

4. Označme  $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Nechť nejdříve existuje supremum  $A$ . Nechť je  $\varepsilon > 0$  libovolné. Z definice suprema již  $\sup A - \varepsilon$  není horní mezí  $A$ , takže lze nalézt  $n_0$  takové, že  $x_{n_0} > \sup A - \varepsilon$ . Protože je  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  neklesající, platí pro  $n \geq n_0$ , že  $x_n > \sup A - \varepsilon$ . Zároveň díky tomu, že  $\sup A$  je horní mezí  $A$ , platí  $\sup A \geq x_n$ . Celkem tak pro  $n \geq n_0$  je  $|\sup A - x_n| < \varepsilon$ , takže  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  má limitu  $\sup A$ .

Nechť naopak existuje  $\lim x_n = s$ . Kdyby existovalo  $n_0$  takové, že  $x_{n_0} > s$ , pak by již pro všechny  $n \geq n_0$  bylo  $x_n \geq x_{n_0} > s$ , takže  $|x_n - s| \geq x_{n_0} - s > 0$ , body posloupnosti by se k  $s$  nepřibližovaly blíže jak  $\varepsilon = x_{n_0} - s$  a  $s$  by nemohlo být limitou  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ . Tedy musí být  $x_n \leq s$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ , tj. limita  $s$  je horní mezí množiny  $A$ . Nechť je dále  $s' < s$ . Píšme  $s' = s - \varepsilon$  pro  $\varepsilon = s - s'$  kladné. Protože  $\lim x_n = s$ , nalezneme  $n_0$  takové, že  $|x_{n_0} - s| < \varepsilon$ . Pak ale je  $x_{n_0} > s - \varepsilon = s'$ , takže  $s'$  není horní mezí  $A$ . Tím jsme dokázali, že  $s$  je supremem  $A$ , tj.  $\sup A = s = \lim x_n$ .

6. Označme  $c = \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x)$ , které podle předpokladu existuje. Pak  $c$  je horní mezí funkce  $f + g$  na  $A$ : Pro libovolné  $a \in A$  je  $f(a) \leq \sup_{x \in A} f(x)$  a  $g(a) \leq \sup_{x \in A} g(x)$ , takže

$$f(a) + g(a) \leq \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x) = c.$$

Tím pádem je množina  $\{f(x) + g(x) \mid x \in A\}$  shora omezená hodnotou  $c$ , a jakožto podmnožina  $\mathbb{R}$  má proto supremum, tedy  $\sup_{x \in A} (f(x) + g(x))$  existuje. Navíc  $c$  je horní mezí  $\{f(x) + g(x) \mid x \in A\}$ , takže

$$\sup_{x \in A} (f(x) + g(x)) \leq c = \sup_{x \in A} f(x) + \sup_{x \in A} g(x),$$

neboť supremum je nejmenší horní mez.

7. V případě (1) lze volit třeba již diskutovanou funkci  $f(x) = x$  na  $M = \mathbb{R}$ . Tato funkce je spojitá na  $\mathbb{R}$ , ale nenabývá svého maxima, dokonce ani  $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)$  neexistuje. V případě (2) buď třeba  $M = \langle 0, 1 \rangle$  a  $f : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  definovaná jako  $f(x) = x$  pro  $x \neq 1$  a  $f(1) = 0$ . Taková funkce má supremum 1, ale této hodnoty nenabývá, neboť  $f$  není spojitá zrovna v tom podstatném bodě 1.

8. Pro  $x > 1$  je  $f(x) = x + 1/x > x > 1$ , takže opravdu funkční hodnoty  $f$  leží v  $(1, \infty)$ . Pro  $x, y \in (1, \infty)$  platí

$$|f(x) - f(y)| = \left| x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y} \right| = \left| x - y + \frac{y - x}{xy} \right| = |x - y| \frac{xy - 1}{xy} < |x - y|,$$

neboť pro  $x, y > 1$  je  $xy > 1$ , takže  $|xy - 1| = xy - 1 > 0$ .

Na druhou stranu  $f$  není kontrakcí, což se intuitivně děje proto, že ve výpočtu  $|f(x) - f(y)| = |x - y| \frac{xy - 1}{xy}$  může být hodnota  $\frac{xy - 1}{xy}$  pro velká  $x$  a  $y$  libovolně blízko 1. Spočítejme to: Nechť  $\lambda \in (0, 1)$  a zkusme najít  $z > 1$  takové, že  $(z - 1)/z > \lambda$ . To odpovídá nerovnici  $z - 1 > \lambda z$ , neboli  $z > 1/(1 - \lambda)$ . Zvolme nyní různá  $x, y$ , která převyšují 1 a jejichž součin splňuje  $xy > 1/(1 - \lambda)$  – pro dost velká  $x$  a  $y$  toho vždy půjde dosáhnout,  $\lambda \neq 1$ . Pak z předchozích výpočtů platí

$$\frac{xy - 1}{xy} > \lambda,$$

ale zároveň

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| \frac{xy - 1}{xy} > \lambda |x - y|,$$

takže  $\lambda$  nemůže být koeficientem kontrakce. Tím jsme vyřadili všechny možné koeficienty  $\lambda \in (0, 1)$ , a tudíž  $f$  nemůže být kontrakcí.

9. Vezmeme třeba otevřenou kouli  $U_1(0)$  a bod o souřadnicích  $a = (2, 0, 0, \dots, 0)$ . Pak vzdálenost  $a$  od  $U_1(0)$  je 1, neboť se dá  $k$  a přibližovat pomocí bodů  $x_n = (1 - 1/n, 0, 0, \dots, 0) \in U_1(0)$ , platí  $\rho(a, x_n) = 1 + 1/n$ . Přitom ale v  $U_1(0)$  neexistuje bod, který by měl od  $a$  vzdálenost přesně 1.

10. V eukleidovské metrice existuje pouze jeden nejbližší bod ke kouli, je to bod  $a/|a|$ , kde  $|a|$  značí velikost bodu  $a$ , neboli jeho vzdálenost od 0. Je to vidět z geometrického náhledu. Stejně tak je vidět, že v maximové metrice nejbližší bod nemusí být určen jednoznačně – například bod  $a = (2, 0)$  má za nejbližší body v  $B_1(0)$  všechny body tvaru  $p = (1, t)$ ,  $t \in \langle -1, 1 \rangle$ .

11. Jakožto spojitá funkce nabývá  $f$  kladného minima  $m$  na kompaktním intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ . Neboli  $f(x) \geq m > 0$ , a invertováním každé strany máme  $\frac{1}{f}(x) \leq \frac{1}{m}$  pro libovolné  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ . Zároveň  $\frac{1}{f}$  je omezená zdola hodnotou 0, protože  $f$  je kladná.

13. Pro funkce  $f, g \in \mathcal{C}(K)$  je  $\rho_\infty(f, g) = \max_{x \in K} |f(x) - g(x)|$  nezáporné. Přitom  $\rho_\infty(f, g) = 0$  právě tehdy, když v každém  $x \in K$  platí  $|f(x) - g(x)| = 0$ , což platí tehdy, když v každém  $x$  je  $f(x) = g(x)$ , což nastane pro  $f = g$ . Zřejmě je také  $\rho_\infty$  symetrická, neboť  $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|$ .

Zbývá ukázat trojúhelníkovou nerovnost. Pro  $f, g, h \in \mathcal{C}(K)$  platí

$$\begin{aligned} \rho_\infty(f, h) &= \max_{x \in K} |f(x) - h(x)| \leq \max_{x \in K} (|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|) \\ &\leq \max_{x \in K} |f(x) - g(x)| + \max_{x \in K} |g(x) - h(x)| = \rho_\infty(f, g) + \rho_\infty(g, h). \end{aligned}$$

Přitom první nerovnost plyne z trojúhelníkové nerovnosti pro absolutní hodnotu a z toho, že pokud zvětšíme každý prvek množiny, tak zvětšíme i maximum (v tomto případě z  $F(x) \leq G(x)$  pro dvě funkce vypočujeme  $\max F \leq \max G$ ). Druhá nerovnost pak plyne z analogie cvičení 6 pro maxima, případně zde lze přímo využít, že maxima se rovnají supremům, a přímo se odvolat na cvičení 6.

14. Protože je  $\{1, 2\}$  konečná množina, je kompaktní. Prvky prostoru  $\mathcal{C}(K)$  jsou v tomto případě spojitě funkce  $f : \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$ . Požadavek na spojitost vzhledem k diskrétnímu prostoru ale není vůbec omezující, protože každá funkce  $f : \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$  je automaticky spojitá – stačí k libovolnému  $\varepsilon$  volit  $\delta = 1/2$ , aby platilo  $U_\delta(x) = \{x\}$  a kuličky byly nezajímavé.

Funkce  $f : \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$  je jednoznačně určena svými hodnotami na číslech 1 a 2, takže je lze chápat jako dvojici  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , kde  $x_1$  odpovídá  $f(1)$  a  $x_2$  odpovídá  $f(2)$ . Nakonec vzdálenost dvou funkcí  $f, g : \{1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$  je definována jako

$$\rho_\infty(f, g) = \max_{n \in \{1, 2\}} |f(n) - g(n)| = \max \{|f(1) - g(1)|, |f(2) - g(2)|\},$$

což je totožné s maximovou vzdáleností bodů  $(f(1), f(2))$  a  $(g(1), g(2))$  v rovině  $\mathbb{R}^2$ .

**15.** Např. pracujme na  $\langle -1, 1 \rangle$  a zvolme  $f(x) = 0$  pro  $x \in \langle -1, 0 \rangle$  a  $f(x) = 1$  pro  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ . Pro spor předpokládejme, že umíme najít polynom  $P$  takový, že  $\rho_\infty(f, P) < 1/4$ . Speciálně musí  $|1 - P(0)| = |f(0) - P(0)| < 1/4$ , takže  $P(0) \in (3/4, 5/4)$ . Ze spojitosti  $P$  existuje  $\delta > 0$  takové, že na kuličce  $U_\delta(0)$  se  $P$  od  $P(0)$  vzdálí nejvýše o  $1/4$ . Speciálně pro  $x \in (-\delta, 0)$  platí  $|P(x) - P(0)| < 1/4$ , takže  $P(x) \in (2/4, 6/4) = (1/2, 3/2)$  (např.  $P(0)$  musí být větší než  $3/4$ , takže  $P(x)$  musí být větší než  $1/2$ , aby bylo od  $P(0)$  vzdáleno méně než  $1/4$ ). Ale  $f(x) = 0$ , neboť  $x$  je záporné, takže  $|f(x) - P(x)| > 1/2$ , a tedy  $\rho_\infty(f, P) > 1/2$ , což je spor s předpokladem  $\rho_\infty(f, P) < 1/4$ .