

V lese

3. JARNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 7. DUBNA 2025

ÚLOHA 1. (3 BODY)

Matěj chtěl vysázet les. Do každého políčka čtvercové tabulky 8×8 zasadil jeden strom, přičemž některé z nich byly duby a zbylé buky. Je možné, aby v každém řádku rostl různý počet buků, ale v každém sloupci jich rostl stejný počet?

ÚLOHA 2. (3 BODY)

V lese roste 50 stromů s výškami 1, 2, $\dots$, 50 metrů. Rozhodněte, zda si Lukáš může vybrat 33 z nich, aby výška žádného z vybraných stromů nebyla přesně dvojnásobkem výšky jiného vybraného stromu.

ÚLOHA 3. (3 BODY)

José vedl skupinku čtyř účastníků krátkého výletu, ale po cestě zpátky na objekt se ztratili. Po dlouhém bloudění se dostali na křižovatku, ze které (kromě cesty, po které na ni přišli) vedou čtyři cesty, přičemž dojít na konec libovolné z nich trvá 20 minut. José ví, že objekt leží na konci jedné z těchto cest, ale nepamatuje si na které. Také ví, že dva z účastníků jsou správní a poctiví a vždy mluví pravdu, kdežto dva jsou nezbedové a mohou jak mluvit pravdu, tak lhát. Bohužel ale neví, kteří účastníci jsou nezbedové. José může provádět tyto akce:

- Vyslat účastníka po některé cestě, ten pak poslušně dojde na konec a vrátí se. Poté se ho José může zeptat, zda na konci cesty našel objekt, nebo ne.
- Sám se vydat některou z cest, dojít na konec a vrátit se.
- Vzít všechny účastníky, vydat se s nimi na konec některé cesty a už se nevracet.

José může účastníkům dávat příkazy pouze tehdy, když se setkají na křižovatce. Existuje strategie, s níž dovede José nejvýše po 100 minutách stanout spolu se všemi účastníky na objektu?

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

Klárka a 2025 lesních zvířátek hrají hru na nekonečné čtvercové mřížce. Každý hráč si ve svém tahu vybere zatím neobarvenou stranu jednotkového mřížového čtverečku a obarví ji. Začíná Klárka, poté postupně táhne každé z 2025 zvířátek, a takto pořád dokola. Klárka vyhraje, pokud v nějaký moment nastane situace, že některý obdélník 2×1 **nebo** 1×2 má obarvený celý svůj obvod, ale nikoliv svou jedinou vnitřní (jednotkovou) úsečku. Může si Klárka zaručit v konečném počtu tahů vítězství?

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Ukažte, že existuje přirozené číslo s , pro něž existuje alespoň 2025 dvojic různých přirozených čísel ℓ , e splňujících

$$\frac{1}{\ell - e} = \frac{1}{\ell} - \frac{1}{e} + \frac{1}{s}.$$

ÚLOHA 6.

(5 BODŮ)

Pro prvočíslo p definujeme posloupnost celých čísel $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vztahy $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ a

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - pa_n$$

pro všechna přirozená čísla n . Nalezněte všechny možné hodnoty p , pro které se v posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vyskytne hodnota -1 .

ÚLOHA 7.

(5 BODŮ)

V PraSestánu operuje $n \geq 4$ letišť. Letecká společnost PraSér provozuje mezi každými dvěma letišti právě jednu (obousměrnou) leteckou linku, v rámci snížení emisí by jich ale chtěla co nejvíc zrušit. Zákon o letecké dopravě nařizuje, že:

- (1) Letecké linky se smí rušit jen postupně, jedna po druhé.
- (2) Letecká linka mezi letišti A a B se smí zrušit pouze tehdy, pokud existují další dvě letiště C , D taková, že linky mezi B a C , mezi C a D a mezi D a A jsou stále v provozu.

Určete v závislosti na n , kolik nejvíce linek může PraSér zrušit.

ÚLOHA 8.

(5 BODŮ)

Bud' $O_1O_2O_3O_4O_5O_6O_7O_8$ konvexní osmiúhelník, jehož všechny strany jsou stejně dlouhé a jehož protější strany¹ O_iO_{i+1} a $O_{i+4}O_{i+5}$ jsou pro každé $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$ rovnoběžné. Bod L_i nechť je pro $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$ průsečíkem O_iO_{i+4} s $O_{i-1}O_{i+1}$. Dokažte, že existuje $k \in \{1, 2, \dots, 8\}$, pro nějž

$$\frac{|L_k L_{k+4}|}{|O_k O_{k+4}|} \geq \frac{2}{3}.$$

¹Číslování všech bodů uvažujeme modulo 8, tedy $O_9 = O_1$, $L_{10} = L_2$, apod.