Trojúhelníky

3. jarní série — Vzorové řešení

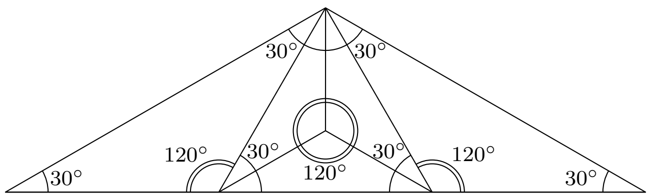
Úloha 1.

Najděte nedegenerovaný trojúhelník, který není pravoúhlý a lze rozdělit na 5 trojúhelníků, které mu jsou podobné. *(Josef Minařík)*

Řešení:

Řešením je rovnoramenný trojúhelník s úhlem 120° mezi rameny. Můžeme jej rozdělit na 5 menších, které jsou mu podobné – viz obrázek.

Nejprve oddělíme dva trojúhelníky, jejichž základny budou splývat s rameny původního trojúhelníku. Jednoduchým výpočtem úhlů zjistíme, že nám zbývá rovnostranný trojúhelník. Ten potom určitě můžeme rozdělit na tři podobné trojúhelníky se společným vrcholem v těžišti.



Poznámky:

Tento trojúhelník je jediný vyhovující zadání, není to ale jednoduché dokázat. Kdybychom vynechali podmínku, že menší trojúhelníky mají být podobné tomu původnímu, bude řešení dokonce hned 9. Pokud vás zajímá, jak taková řešení vypadají, najdete je společně s důkazem, že žádná jiná neexistují, v tomto článku:

www.researchgate.net/publication/220452374_Dissection_of_a_Triangle_into_Similar_Triangles

Dále bych chtěl zmínit, že když v zadání požadujeme najít konstrukci, můžete se spolehnout, že existuje. Někteří řešitelé se totiž snažili dokázat, že žádný vyhovující trojúhelník neexistuje.

(Josef Minařík)

Úloha 2.

Lucka upekla dort ve tvaru pravidelného n-úhelníku, kde $n \geq 4$. Nejprve jej po obvodu potřela polevou a následně jej několika rovnými řezy rozřezala na trojúhelníkové dílky, jejichž všechny vrcholy jsou vrcholy původního n-úhelníku. Dokažte, že dílků, které mají dvě své strany potřené polevou, je právě o 2 více než dílků, které nemají polevou potřenou žádnou stranu.

(Lenka Kopfová)

Řešení:
Označme x_0, x_1 a x_2 po řadě počty dílků dortu s žádnou, jednou a dvěma stranami potřenými polevou. Počet všech trojúhelníků je zřejmě $n-2$, tudíž

$$x_0 + x_1 + x_2 = n - 2.$$

Počet stran potřených polevou je dohromady n, neboť byly potřeny všechny strany původního n-úhelníka. Zároveň x_2 trojúhelníků má potřené dvě strany a x_1 trojúhelníků má potřenou jednu stranu. Platí tedy

$$2x_2 + x_1 = n.$$

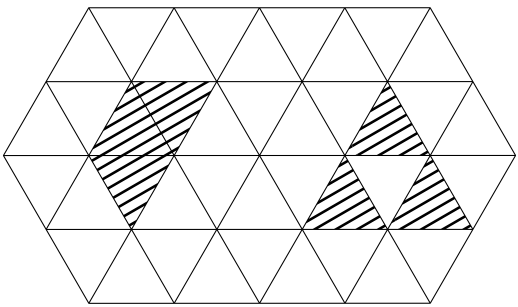
Odečtením první rovnice od druhé získáváme $x_2 - x_0 = 2$, takže dílků se dvěma stranami potřenými polevou je o 2 více než dílků bez polevy, což jsme chtěli dokázat.

Poznámky:
Z došlých řešení přibližně polovina postupovala víceméně shodně se vzorovým řešením a druhá polovina úlohu řešila indukcí. Řešení indukcí také vedla k cíli, ale byla náchylnější k nejasným či mlhavým argumentacím. *(Lenka Kopfová)*

Úloha 3.

Lenka má nekonečný ubrus, na kterém je trojúhelníčková síť. Každý trojúhelníček je buďto červený, nebo modrý, přičemž obarvení splňuje následující podmínky:

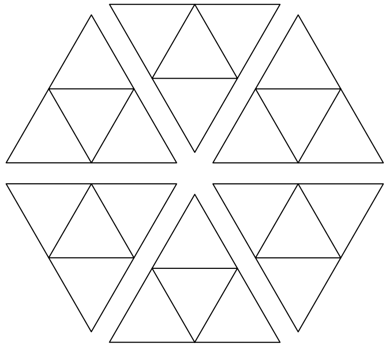
(i) *Tři trojúhelníčky, které dohromady tvoří lichoběžník (na obrázku vlevo), nikdy nejsou vybarveny stejnou barvou.*
(ii) *Tři trojúhelníčky, které jsou uspořádané do trojúhelníku (na obrázku vpravo), nikdy nejsou vybarveny stejnou barvou. Na barvě čtvrtého prostředního trojúhelníčku přitom nezáleží.*



Matěj vystřihl z ubrusu šestiúhelník o straně 2 (stříhal jen po stranách trojúhelníčků). Dokažte, že na vystřiženém šestiúhelníku musí být stejný počet červených a modrých trojúhelníčků.
(Josef Minařík)

Řešení:
Všimněme si, že každý rovnostranný trojúhelník v síti se stranou délky 2 musí obsahovat dva červené a dva modré trojúhelníčky. Jinak by totiž obsahoval alespoň tři trojúhelníčky stejné barvy, tudíž by musely buď všechny tři rohy mít stejnou barvu a byla by porušena podmínka (ii), nebo by musel středový trojúhelníček mít stejnou barvu jako dva rohové, čímž by vznikl lichoběžník a byla by porušena podmínka (i).

Šestiúhelník o straně délky 2 však můžeme rozstříhat na 6 trojúhelníků o straně délky 2. Jelikož každý z nich obsahuje stejně červených a modrých trojúhelníčků, tak i celý šestiúhelník musí obsahovat stejný počet trojúhelníčků obou barev.



Poznámky:
Většina řešení si s úlohou poradila podobným způsobem jako vzorák, čímž si zasloužila krásné hodnocení 3 bodů za 3. úlohu 3. jarní série. Někteří řešitelé místo šestiúhelníku o straně 2 vyplňovali útvar ze zadání, takže analogickým způsobem vyřešili o něco těžší úlohu, za což jsem se rozhodl nestrhávat body. Spousta symetrií v úloze sváděla k procházení všech možností, skutečně jich při správném přístupu nebylo až zas tak moc. Bylo však poměrně komplikované skutečně projít všechny z nich (a přesvědčit mě o tom, že jsou to skutečně všechny), takže jsem nakonec nějaký ten bodík strhnul. *(Danil Koževnikov)*

Úloha 4.

V rovině leží trojúhelník ABC s nejkratší stranou BC. Na stranách AB, AC jsou po řadě dány body K, L tak, že $|BK| = |BC| = |CL|$. Bod M je průsečík BL s CK a bod I je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Dokažte, že $MI \perp BC$. *(Matěj Doležálek)*

Řešení:
Trojúhelník KBC je rovnoramenný se základnou KC, takže osa úhlu u B v něm splývá s výškou na stranu KC. Na ose úhlu u B přitom leží střed kružnice vepsané, takže $BI \perp CK = CM$. Analogicky platí $CI \perp BM$, takže I je průsečík výšek (ortocentrum) v trojúhelníku BCM. Potom jím však musí procházet i třetí výška v BCM, takže $MI \perp BC$, jak se mělo dokázat.

Poznámky:
Úloha byla jednoduchá a drtivá většina řešení obdržela plný počet bodů. Někteří namísto postupu s ortocentrem něco vyúhlili nebo spočítali, čímž v podstatě jenom ve speciálním případě trojúhelníku BCM dokazovali, že výšky se skutečně protínají v jednom bodě. *(Matěj Doležálek)*

Úloha 5.

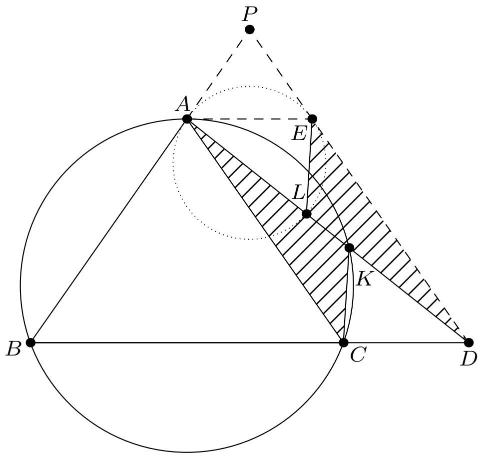
Nechť je ABC rovnoramenný trojúhelník s $|AB| = |AC|$. Na polopřímce opačné k CB leží bod D a přímka AD protíná kružnici opsanou ABC podruhé v bodě K. Bod E je umístěn tak, aby $ACDE$ byl rovnoběžník. Kružnice, která se dotýká AB v bodě A a DE v bodě E, protíná přímku AD podruhé v bodě L. Dokažte, že $|AK| = |DL|$. *(Matěj Doležálek)*

Řešení:
Ukážeme, že trojúhelníky DLE a AKC jsou shodné, z čehož už jednoznačně plyne $|AK| = |DL|$. Jelikož $ACDE$ je rovnoběžník a body K a L leží na jeho úhlopříčce AD, platí $|AC| = |DE|$ a $|\sphericalangle CAK| = |\sphericalangle LDE|$. Stačí nám tedy ukázat, že $|\sphericalangle AKC| = |\sphericalangle DLE|$.

Označme $|\sphericalangle AKC| = \alpha$. Čtyřúhelník $ABCK$ je tětivový, a proto $|\sphericalangle ABC| = 180^\circ - \alpha$. Nechť P je průsečík přímek AB a DE, pak díky rovnoběžnosti přímek BC a AE máme $|\sphericalangle PAE| = |\sphericalangle ABC| = 180^\circ - \alpha$. Úhel $\sphericalangle PAE$ je ale úsekovým úhlem k obvodovému úhlu $\sphericalangle ALE$, a tudíž

$$|\sphericalangle DLE| = 180^\circ - |\sphericalangle ALE| = 180^\circ - |\sphericalangle PAE| = \alpha,$$

což jsme chtěli ukázat.



Poznámky:
Úloha se dala celkem snadno vyřešit pomocí trochy úhlení. To potvrdila i přišlá řešení, z nichž téměř všechna si zasloužila plný počet bodů. *(Jáchym Solecký)*

Úloha 6.

V rovnoramenném trojúhelníku ABC platí $|AB| = |AC|$. Kružnice ω_1 se středem O_1 se dotýká AB v bodě B. Kružnice ω_2 se středem O_2 se dotýká AC v bodě C a kružnice ω_1 v bodě X. Přímka BC protne kružnice ω_1, ω_2 podruhé po řadě v bodech Y, Z. Označme O střed kružnice opsané XYZ. Přímka OO_1 protne AC v bodě G, analogicky OO_2 protne AB v bodě H. Dokažte, že A je střed kružnice opsané GHO. *(Radek Olšák)*

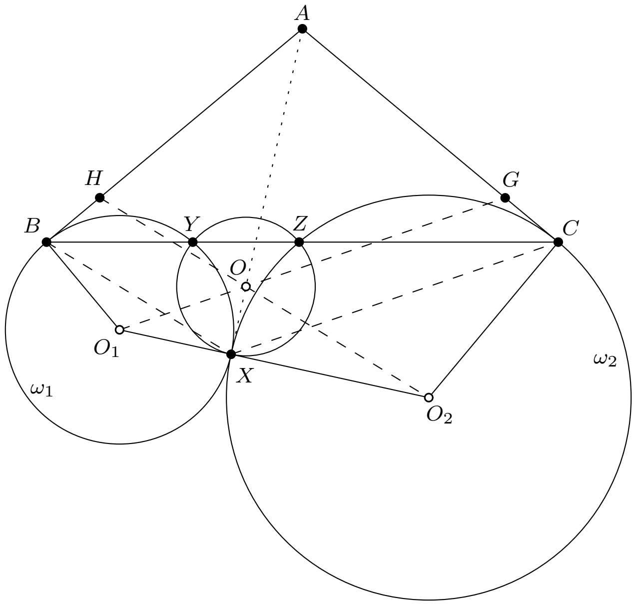
Řešení:
Předpokládejme, že situace vypadá jako na obrázku níže, tedy že kružnice ω_1 a ω_2 mají vnější dotyk a leží vůči stranám AB, AC ve stejných polorovinách jako samotný trojúhelník. Další možnosti, kdy alespoň jedna z kružnic leží v jiné polorovině a mají vnější či vnitřní dotyk, by se vyšetřily analogicky, případně by v důkazu níže stačilo použít orientované úhlení.

Nejprve dokážeme, že přímka AX je rovněž tečnou k oběma kružnicím ω_1, ω_2. Plyne to z toho, že bod A má stejnou mocnost $|AB|^2 = |AC|^2$ k oběma kružnicím, a tedy leží na jejich chordále.[1]

[1] Pokud nevíš, co je to mocnost bodu ke kružnici, lze se o ní dočíst v tomto příspěvku: *https://prase.cz/library/MocnostAChordalyJT/MocnostAChordalyJT.pdf.*

Zároveň z toho plyne $|AB| = |AX| = |AC|$, neboť části tečen ze společného bodu do bodů dotyku jsou vždy stejně dlouhé. Bod A je tedy středem kružnice opsané BXC.

Naším cílem bude dokázat, že trojúhelník HOG je obrazem trojúhelníku BXC ve stejnolehlosti z bodu A – z toho už vyplyne, že A je také středem kružnice opsané HOG. K tomu nám stačí dokázat dvojici rovnoběžností $BX \parallel HO$, $CX \parallel GO$ a fakt, že bod O leží na přímce AX.



Bod O leží z definice na ose úsečky XY. Tato osa je ale zároveň osou úhlu XO_1Y, neboť XY je tětiva. Ze středových a obvodových úhlů pro kružnici ω_1, kružnici opsanou BXC a XO_2CA potom postupně dostaneme

$$2\,|\sphericalangle XO_1O| = |\sphericalangle XO_1Y| = 2\,|\sphericalangle XBY| = 2\,|\sphericalangle XBC| = |\sphericalangle XAC| = 2\,|\sphericalangle O_2AC| = 2\,|\sphericalangle O_2XC|\,.$$

Z toho plyne, že přímky XC a OG jsou rovnoběžné. Analogicky dostaneme i druhou rovnoběžnost $BX \parallel HO$.

K důkazu, že O leží na AX, opět stačí uvažovat středové a obvodové úhly. Platí

$$|\sphericalangle XOO_1| = \frac{1}{2}\,|\sphericalangle XOY| = |\sphericalangle XZY| = 180^\circ - |\sphericalangle XZC| = \frac{1}{2}\,|\sphericalangle XO_2C|\,.$$

Zároveň ale z dokázané rovnoběžnosti máme $|\sphericalangle XO_1O| = |\sphericalangle O_2XC|$ a z úhlů v rovnoramenném trojúhelníku XO_2C už je tak zřejmé, že $|\sphericalangle XO_1O| + |\sphericalangle XOO_1| = 90^\circ$. V důsledku toho platí $|\sphericalangle O_1XO| = 90^\circ$, a bod O tak skutečně leží na přímce AX.

Poznámky:

Ačkoli řešení úlohy není v principu moc složité, úloha musela působit na první pohled poněkud nepřístupně, neboť přišlo relativně málo řešení. Většina došlých řešení si neuvědomila, že úloha může mít více různých konfigurací. Za to jsem se rozhodl bod nestrhávat a naopak jsem odměnil imaginárním bodem řešení, která toto správně odargumentovala. *(Martin Raška)*

Úloha 7.

Je dán trojúhelník ABC s kružnicí opsanou ω. Osa úhlu $\sphericalangle BAC$ protne stranu BC v E a kružnici ω podruhé v D. Zvolme na BC bod F. Body M, N jsou umístěny po řadě na AB, AC tak, aby platilo $|AM| = |CF|$ a $|AN| = |BF|$. Přímky DE, DF protnou MN po řadě v G, H. Dokažte, že G, H, E, F leží na jedné kružnici. *(Radek Olšák)*

Řešení:

V řešení použijeme větu o ose vnitřního úhlu a Shooting lemma. Pokud o těchto tvrzeních slyšíš poprvé, viz třeba tento příspěvek: *https://prase.cz//library/SvrckuvBodVH/SvrckuvBodVH.pdf.*

Předpokládejme, že E a F jsou různé body – případ $E = F$ je triviální. Označme R druhý průsečík DF s ω, potom z obvodových úhlů platí $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CRB|$. Jelikož je D střed oblouku BC na ω, přímka RD je osou úhlu BRC. Ze zadané podmínky a věty o ose vnitřního úhlu v trojúhelníku BRC tudíž víme, že

$$\frac{|AN|}{|AM|} = \frac{|BF|}{|FC|} = \frac{|BR|}{|RC|}.$$

Tedy z věty *sus* jsou trojúhelníky $\triangle RBC$ a $\triangle ANM$ podobné.

Nyní budeme orientovaně úhlit, tedy $\sphericalangle(p, q)$ nechť značí orientovaný úhel mezi přímkami p a q modulo 180°. Z předešlé podobnosti a věty o obvodovém úhlu máme

$$\sphericalangle(AM, MN) = \sphericalangle(BC, CR) = \sphericalangle(BA, AR).$$

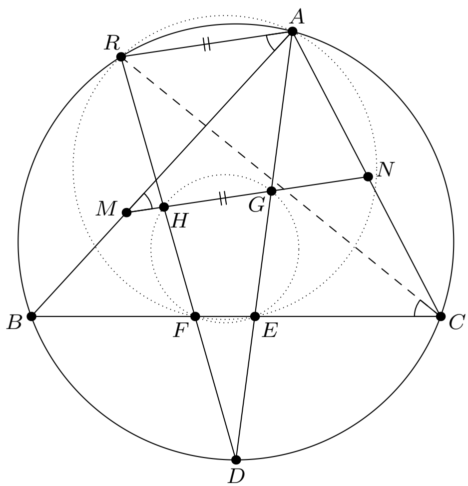
Protože přímky BA a AM jsou totožné, plyne z rovnosti úhlů $AR \parallel MN$. Ze Shooting lemmatu dále víme, že $EFRA$ je tětivový, tedy

$$\sphericalangle(RA, RF) = \sphericalangle(EA, EF).$$

Z předchozí rovnoběžnosti plyne $\sphericalangle(RA, RF) = \sphericalangle(HG, HF)$, takže dohromady

$$\sphericalangle(HG, HF) = \sphericalangle(EG, EF)$$

neboli $HGFE$ je tětivový.



Poznámky:

Většina došlých řešení byla správně a postupovala podobně jako vzorové řešení. Objevilo se však i řešení pomocí projektivního hýbání s body. *(Radek Olšák)*

Úloha 8.

Mějme kosočtverec $ABCD$ s kružnicí vepsanou ω a uvažujme na straně AB bod P. Tečna z bodu P ke kružnici ω různá od přímky AB protíná stranu AD v bodě Q. Dokažte, že obsah trojúhelníku CPQ nezávisí na poloze P. *(Pavel Hudec)*

ŘEŠENÍ:

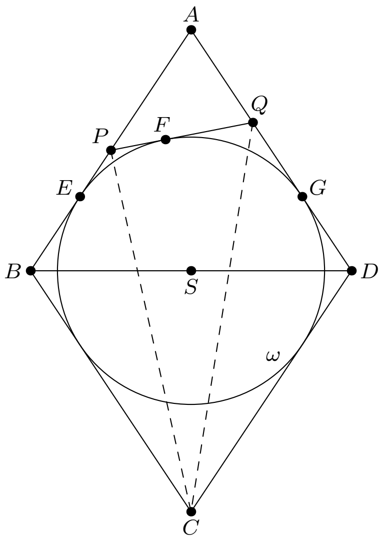
Označme střed kružnice ω jako S, její poloměr jako ρ a její body dotyku s AB, PQ, AD po řadě jako E, F, G. Jelikož obsah celého kosočtverce $ABCD$ je konstantní, stačí nám ukázat, že součet obsahů trojúhelníků APQ, PBC a QDC je konstantní. Ukážeme si dva způsoby, jak na to.

ŘEŠENÍ VZORCEM PRO OBSAH VZHLEDEM K POLOMĚRU KRUŽNICE PŘIPSANÉ:

Výšky kolmé na strany PB a QD v trojúhelnících PBC a QDC mají délku 2ρ. Obsahy trojúhelníků PBC a QDC jsou proto po řadě $\rho \cdot |PB|$ a $\rho \cdot |QD|$. K počítání obsahu trojúhelníku APQ využijeme známý vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníku využívající poloměr kružnice připsané.[2] Jelikož ω je kružnice připsaná ke straně PQ v trojúhelníku APQ, jeho obsah je $\frac{1}{2}\rho \cdot (|AP| + |AQ| - |PQ|)$. Součet obsahů PBC, QDC a APQ je tedy roven

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\rho \cdot (|AP| + |AQ| - |PQ| + 2 \cdot |PB| + 2 \cdot |QD|) = \\
&= \frac{1}{2}\rho \cdot (|AB| + |AD| - |PF| - |QF| + |PB| + |QD|) = \\
&= \frac{1}{2}\rho \cdot (|AB| + |AD| - |PE| - |QG| + |PB| + |QD|) = \\
&= \frac{1}{2}\rho \cdot (|AB| + |AD| + |BE| + |DG|),
\end{aligned}$$

což je nezávislé na poloze bodu P.



[2] Více o něm lze nalézt například zde (Tvrzení 49): *https://prase.cz/archive/36/uvod1s.pdf.*

Řešení přes podobnost:
Tentokrát využijeme toho, že obsah trojúhelníku je roven polovině součinu délek dvou stran a sinu úhlu, který svírají. Označíme-li α velikost úhlu $\sphericalangle BAD$ a a délku strany kosočtverce $ABCD$, pak je součet obsahů APQ, PBC a QDC roven

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\Big(|AP|\cdot|AQ|\cdot\sin\alpha+|BP|\cdot|BC|\cdot\sin(180^\circ-\alpha)+|DQ|\cdot|DC|\cdot\sin(180^\circ-\alpha)\Big)=\\
=&\frac{1}{2}\sin\alpha\cdot\Big((a-|BP|)(a-|DQ|)+a\cdot|BP|+a\cdot|DQ|\Big)=\\
=&\frac{1}{2}\sin\alpha\cdot\Big(a^2+|BP|\cdot|DQ|\Big),
\end{aligned}$$

kde jsme využili vztahu $\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$. Stačí tedy ukázat, že součin $|BP|\cdot|DQ|$ je nezávislý na poloze bodu P. To dokážeme pomocí toho, že trojúhelníky BSP a DQS jsou si podobné, a tedy náš součin je roven $|BS|\cdot|DS|$, což nezávisí na volbě bodu P.

Všimněme si, že $|\sphericalangle SBP|=|\sphericalangle SDQ|=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$, takže $|\sphericalangle BSE|=|\sphericalangle DSG|=\frac{\alpha}{2}$. Zároveň přímka SP půlí úhel $\sphericalangle ESF$ a obdobně SQ půlí úhel $\sphericalangle GSF$. Jelikož B, S, D leží v tomto pořadí na přímce, tak už nutně platí $|\sphericalangle ESP|+|\sphericalangle GSQ|=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$, z čehož

$$|\sphericalangle BSP|+|\sphericalangle DSQ|=90^\circ+\frac{\alpha}{2}=180^\circ-|\sphericalangle SBP|=|\sphericalangle BSP|+|\sphericalangle BPS|,$$

a tedy $|\sphericalangle DSQ|=|\sphericalangle BPS|$. Protože také $|\sphericalangle SBP|=90^\circ-\frac{\alpha}{2}=|\sphericalangle SDQ|$, trojúhelníky BSP a DQS jsou si podobné dle věty *uu*.

Poznámky:
Většina poslaných řešení byla správná a často po pár geometrických poznatcích úlohu nějakým způsobem dopočítala. I když většina těchto počítacích řešení nakonec vypadala stravitelně, často by jednoduchý geometrický argument podobný druhému vzorovému řešení už úlohu dořešil, a to v kratším čase. *(Pavel Turek)*