Páry a párování

3. JARNÍ SÉRIE — VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Ukažte, že čísla $1, 2, \ldots, 10$ *lze spárovat tak, aby každá dvojice dávala v součtu prvočíslo a aby těchto pět prvočísel bylo navzájem různých.*

ŘEŠENÍ:
Řešení jsou dvě možná, a to dvojice

$$3 + 2 = 5, 6 + 1 = 7, 7 + 4 = 11, 8 + 5 = 13, 10 + 9 = 19,$$

$$4 + 1 = 5, 5 + 2 = 7, 8 + 3 = 11, 7 + 6 = 13, 10 + 9 = 19.$$

V obou těchto spárováních dostaneme pět navzájem různých prvočísel a použijeme čísla $1, 2, \ldots, 10$.

Jaké úvahy nás k nim přivedly?

- Sečtením dvou různých čísel od 1 do 10 můžeme získat prvočísla 3, 5, 7, 11, 13, 19.
- Součet všech čísel od 1 do 10 je 55, tentýž součet tudíž musí mít i výsledná prvočísla.
- Abychom tohoto součtu dosáhli, potřebujeme mít prvočíslo 19, protože jinak $3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 = 56$, a tedy odstraněním jednoho dalšího prvočísla se na součet 55 nemůžeme dostat.
- Výskyt prvočísla 19 vylučuje výskyt 17, protože pro získání obou prvočísel bychom museli dvakrát použít 9 nebo 10 ($19 = 10 + 9$ a $17 = 10 + 7$ nebo $17 = 9 + 8$).
- Z prvočísel 3, 5, 7, 11, 13, 19 nepoužijeme 3, čímž získáme součet 55.

Nyní již víme, jaká prvočísla dostaneme, a musíme jen spárovat čísla tak, aby nám v součtech tato prvočísla dala.

POZNÁMKY:
Úložka byla velmi jednoduchá a v naprosté většině řešení zcela bezproblémová.

(Anna Marie Minarovičová)

Úloha 2.

Majda vzala čísla $0, 1, 2, \ldots, 301$ *a rozdělila je do párů. Čísla v každé dvojici sečetla a všechny tyto součty vynásobila. Rozhodněte, zda mohla čísla rozdělit tak, aby na konci dostala patnáctou mocninu nějakého celého čísla.*

ŘEŠENÍ:
Ano, Majda mohla čísla rozdělit tak, aby dostala patnáctou mocninu nějakého celého čísla. Nejprve si uvědomme, že dohromady máme 151 párů. Následně popárujeme 0 s 1. Ostatní čísla pak rozdělíme tak, že každému $i \in \{2, 3, \ldots, 151\}$ přiřadíme do páru číslo $303-i$. Dostaneme tak 150 dvojic, jejichž součtem je číslo $i + 303 - i = 303$. Výsledný součin součtů všech párů je pak roven

$$1 \cdot 303^{150} = (303^{10})^{15}.$$

Poznámky:

Velká většina řešení byla správná a skoro všechna z nich popsala konstrukci párů jako ve vzorovém řešení. *(Vendula Onderková)*

Úloha 3.

Áďa a Ben hrají hru na nekonečné čtvercové tabulce. Áďa si nejprve zvolí přirozené číslo n a následně v tabulce pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ označí dvě políčka číslem i. Žádné políčko neoznačí dvakrát, ve výsledku tedy bude označeno $2n$ políček. Benovým úkolem je zvolit si některou dvojici stejně označených políček a projít mezi nimi. Tím se myslí, že má Ben dojít z jednoho políčka dvojice na druhé, přičemž v každém kroku smí přejít jen mezi políčky sousedícími stranou, a navíc kromě startu a cíle nesmí stoupnout na žádné označené políčko. Rozhodněte, zda Áďa může označit políčka tak, aby Ben nedovedl projít mezi žádnou z označených dvojic.

Řešení:

Řekněme, že Áďa zvolí číslo 32. Poté vytvoří dva čtverce 6×6 bez rohů s obvodem 16 políček, kde v prvním čtverci budou na obvodu čísla 1 až 16 a v druhém čtverci budou na obvodu čísla 17 až 32. Nyní si rozmysleme, že pokud umístíme nějaké číslo 1 až 16 do vnitřku druhého čtverce, tak ho nepůjde spojit s jeho dvojicí. To stejné bude platit, umístíme-li některé z čísel 17 až 32 do prvního čtverce.

Všimněme si, že čtverce mají bez obvodu obsah 16, takže se dovnitř vejdou všechna zbývající čísla. Nalezli jsme tedy konstrukci, se kterou Áďa vyhraje.

	1	2	3	4	
5	17	18	19	20	6
7	21	22	23	24	8
9	25	26	27	28	10
11	29	30	31	32	12
	13	14	15	16	

	17	18	19	20	
21	1	2	3	4	22
23	5	6	7	8	24
25	9	10	11	12	26
27	13	14	15	16	28
	29	30	31	32	

Poznámky:

Skoro všechna řešení byla správná. Nejmenší nalezená řešení byla pro $n = 12$. Taková řešení postupovala obdobně, jenom používala právě jeden kosočtverec. Je dobré si dát pozor, že pokud používáte slova „nejlepší strategie“, je nutné dokázat, že tomu tak opravdu je. Cílem úlohy ale nebylo najít optimální n, tudíž to je v pořádku. *(Vojta „Dláža“ Gaďurek)*

Úloha 4.

Naty vlastní balíček n navzájem různých karet, na každé z nich je vykresleno n různých symbolů. Navíc každé dvě různé karty sdílí právě jeden symbol. Určete, kolik nejméně různých symbolů se může nacházet v celém balíčku.

Řešení:

Ukážeme, že symbolů bude nejméně $\frac{n(n+1)}{2}$. Indukcí dokážeme, že to lépe nepůjde. Pro $n = 1$ máme jednu kartu, na které je jeden symbol, takže předpoklad platí triviálně.

Nechť pro $n - 1$ karet předpoklad platí, tedy je potřeba alespoň $\frac{n(n-1)}{2}$ symbolů. Pro spor uvažme kolekci n karet, které mají dohromady méně než $\frac{n(n+1)}{2}$ symbolů. Na každé kartě se nachází n symbolů a podle zadání každá karta sdílí nanejvýš $n - 1$ symbolů s ostatními kartami. Tedy na každé kartě existuje alespoň jeden symbol, který se na žádné jiné kartě nenachází. Z každé karty takový symbol nyní odebereme a jednu kartu zahodíme. Žádný symbol sdílený dvěma či více kartami jsme neodebrali a žádný symbol jsme nepřidali, takže dostáváme $n-1$ karet splňujících podmínky ze zadání. Odebrali jsme alespoň n symbolů, tedy celkový počet symbolů bude ostře menší než $\frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}$. Ale to je spor s indukčním předpokladem.

Dále musíme ukázat, že rozložení $\frac{n(n+1)}{2}$ symbolů na karty odpovídající zadání opravdu existuje. Stačí každé dvojici karet přiřadit jeden unikátní symbol a každé kartě pak jeden unikátní symbol přidat. Potom každá karta bude sdílet s libovolnou kartou právě jeden symbol a celkový počet symbolů bude roven $\binom{n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Poznámky:
Většina řešení postupovala podobně jako vzorové, v indukčním kroku ale mnoho z nich používalo místo sporu argument přímý. Hodně lidí zapomnělo uvést vhodnou konstrukci, za což jsem strhával bod. Body jsem ubíral i v případě, že indukce nebyla provedena dostatečně rigorózně.

(Jakub Vlček)

Úloha 5.

Na matfyzáckém plese se veselí n matfyzáků a m matfyzaček, kde n, m jsou přirozená čísla. Víme, že každá matfyzačka tančila alespoň s jedním matfyzákem a že žádný matfyzák netančil se všemi matfyzačkami. Dokažte, že existují matfyzáci a, b a matfyzačky α, β takové, že a tančil s α a b tančil s β, ale a netančil s β a b netančil s α.

Řešení:
Vybereme matfyzáka, který tancoval s největším počtem matfyzaček (pokud je takových více, vybereme libovolného z nich), a označíme jej a. Jelikož žádný matfyzák netancoval se všemi matfyzačkami, existuje alespoň jedna matfyzačka, se kterou a netančil. Vybereme libovolnou takovou matfyzačku a označíme ji β. Matfyzačka β tančila alespoň s jedním matfyzákem a zároveň netančila s a, vybereme tedy libovolného jejího tanečníka a označíme jej b. Matfyzák b tančil nejvýše s tolika matfyzačkami jako matfyzák a a tančil s matfyzačkou β, proto nutně existuje alespoň jedna matfyzačka taková, že s ní tancoval a, ale b ne. Takovou matfyzačku označíme α. Dostáváme tak čtveřici matfyzáků a, b a matfyzaček α a β, že a tancoval s α a netancoval s β a b tancoval s β, ale netancoval s α.

Poznámky:
Většina řešení se ubírala obdobným směrem jako vzorové a úspěšně se dobrala k cíli.

(Klárka Grinerová)

Úloha 6.

V PraSestánu žije několik svobodných mužů, z nichž někteří jsou zrzci, a několik svobodných žen, z nichž některé jsou blondýnky. Někteří lidé se navzájem znají a jiní ne. Dohazovač Kecal tvrdí, že dovede naplánovat několik svateb tak, aby se každý zrzek oženil se ženou, kterou zná. Jeho kolegyně Kecalka zase tvrdí, že dovede naplánovat několik svateb tak, aby se každá blondýnka provdala za muže, kterého zná.[1] *Dokažte, že potom už lze naplánovat svatby tak, aby se každý zrzek oženil se ženou, kterou zná, a zároveň se každá blondýnka provdala za muže, kterého zná.*

Grafové řešení:
Situaci si můžeme představit jako orientovaný bipartitní graf, kde jednu partitu tvoří svobodní muži a druhou svobodné ženy PraSestánu. Dále do grafu přidáme hrany podle plánů dvou dohazovačů. Mezi páry, které se mají provdat v Kecalově plánu natáhneme hrany tak, aby hrana vedla vždy ze zrzka do nějaké ženy. Podobně mezi páry, které se mají provdat v Kecalčině plánu natáhneme

[1] V Kecalově ani Kecalčině plánu se nemusí oženit všichni svobodní muži ani se nemusí provdat všechny svobodné ženy.

hrany tak, aby hrana vedla vždy z blondýnky do nějakého muže. Když se podíváme na tento graf, tak do každého a z každého vrcholu může vést nanejvýš jedna hrana. Můžeme si rozmyslet, že to už znamená, že každá souvislá komponenta tohoto grafu je buď orientovaná cesta nebo orientovaná kružnice.

Pokud se jedná o orientovanou kružnici, tak musí mít sudý počet vrcholů, protože máme bipartitní graf (podél kružnice se musí střídat muži a ženy). Stačí tedy na celé kružnici vybrat každou druhou hranu a tyto páry mezi sebou provdat.

Pokud se jedná o orientovanou cestu, pak poslední vrchol na této cestě, neboli ten, ze kterého nevychází žádná hrana, není zrzek ani blondýnka (jinak by z něj nějaká hrana vedla buď podle Kecalova nebo Kecalčina plánu). Stačí tedy jít od prvního vrcholu na této cestě (vrcholu, do kterého nevede žádná hrana) a střídavě vybírat každou druhou hranu. Opět páry, jejichž hrany jsme vybrali mezi sebou provdáme. Tímto korektně provdáme všechny lidi na této cestě, možná s výjimkou posledního. Na tom nám ale nezáleží, neboť to není ani zrzek, ani blondýnka.

Tímto způsobem skutečně provdáme a oženíme všechny blondýnky a zrzky, tedy úloha je vyřešena.

Řešení podle Matěje Klímy:

Nejprve naplánujeme svatby všech zrzků podle Kecalova plánu. Postupně plán ještě upravíme, aby se zároveň všechny blondýnky provdaly za muže, kterého znají. V každém kroku vezmeme blondýnku, která momentálně nemá naplánovanou svatbu a vdáme ji za muže, kterého si má vzít podle Kecalčina plánu, pokud tento muž měl naplánovanou nějakou jinou svatbu, tak ji zkrátka zrušíme. Tímto se může stát, že zase nějaká jiná blondýnka nebude mít ženicha. Platí ale, že svatba naplánovaná v tomto kroku už nebude v žádném dalším kroku zrušena, protože to by znamenalo, že ženich této svatby se v Kecalčině plánu má oženit se dvěma různými ženami, což nelze. V každém kroku tedy provdáme nějakou blondýnku, jejíž svatbu už nikdy nezrušíme, takže tento proces je konečný (konkrétně potrvá nejvýše tolik kroků, kolik máme blondýnek).

Tímto způsobem provdáme všechny blondýnky. Zároveň ale oženíme i všechny zrzky, protože měli vybrané partnerky už na začátku a v průběhu jsme jim jen měnili nevěsty.

Poznámky:

Většina došlých řešení se ubírala podobnými myšlenkami jako první vzorové řešení s drobnými obměnami. Někteří si místo orientovaného grafu představili hrany obarvené dvěma barvami (jedna barva odpovídající Kecalově plánu a druhá Kecalčině). To pak vedlo k malinko složitější argumentaci u cest, kde pak není tolik na první pohled vidět, že na jednom konci cesty musí být nezrzek/neblondýnka. *(Lenka Kopfová)*

Úloha 7.

Najděte všechny dvojice celých čísel (a, b), pro které existují funkce $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ a $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ splňující

$$f(g(x)) = x + a \qquad \text{a} \qquad g(f(x)) = x + b$$

pro každé $x \in \mathbb{Z}$.

Řešení:

Tvrdím, že jediné řešení má úloha pro $|a| = |b|$. Pro $a = b$ si můžeme vzít například funkce $f(x) = x + a$ a $g(x) = x$, pro $a = -b$ zvolme například $f(x) = -x - b$ a $g(x) = -x$.

Nyní zbývá dokázat, že pro $|a|$ různé od $|b|$ žádné funkce nenajdeme. BÚNO předpokládejme, že $|a| < |b|$ (neboť f a g jsou zaměnitelné).

Nejprve proveďme substituci $x = f(y)$. Tak získáme:

$$f(g(f(y))) = f(g(x)) = x + a = f(y) + a.$$

Zároveň ze zadání víme, že $g(f(x)) = x + b$, můžeme tedy dosadit:

$$f(y + b) = f(g(f(y))) = f(g(x)) = f(y) + a.$$

Nyní indukcí dokažme, že pro k celé platí $f(y + k \cdot b) = f(y) + k \cdot a$. Pro $k = 0$ zřejmě platí, stejně tak pro $k = 1$.

$k \to k + 1$ (pro kladná k):

$$f(y + (k + 1) \cdot b) = f((y + k \cdot b) + b) = f(y + k \cdot b) + a,$$

o čemž už z indukčního předpokladu víme, že je rovno $f(y) + (k + 1) \cdot a$.

$k \to k - 1$ (pro záporná k):

$$f(y + k \cdot b) = f((y + (k - 1) \cdot b) + b) = f(y + (k - 1) \cdot b) + a$$

a jelikož z indukčního předpokladu víme, že $f(y + k \cdot b) = f(y) + k \cdot a$, získáme (odečtením a)

$$f(y + (k - 1) \cdot b) = f(y) + k \cdot a - a = f(y) + (k - 1) \cdot a.$$

Dále dokažme, že je funkce f prostá. Nechť máme $f(x) = f(y)$. Pak

$$y + b = g(f(y)) = g(f(x)) = x + b,$$

z čehož i $x = y$, tedy funkce je opravdu prostá.

Povšimněme si, že pokud $a = 0$, pak $f(y + k \cdot b) = f(y)$, jelikož je funkce prostá, musí být nutně i $b = 0$, můžeme tedy uvažovat $0 < |a| < |b|$.

Zaměřme se na množinu $\{1, 2, \ldots, |b|\}$. Pak jelikož $|a| < |b|$ a funkce je prostá, budou v této množině existovat taková čísla x_1 a x_2, že $f(x_1)$ a $f(x_2)$ jsou různé a zároveň mají stejný zbytek modulo a. To znamená, že existuje celé nenulové číslo k takové, že $f(x_1) = f(x_2) + k \cdot a$. Jelikož víme, že $f(x_2) + k \cdot a = f(x_2 + k \cdot b)$ a funkce je prostá, musí platit $x_1 = x_2 + k \cdot b$. Pak ale čísla x_1 a x_2 nespadnou obě do množiny $\{1, 2, \ldots, |b|\}$, což je spor. Tedy nemohlo nastat $|a| < |b|$. Obdobně lze provést spor pro $|a| > |b|$.

Pro $|a| \neq |b|$ tedy žádné takové funkce existovat nebudou.

Poznámky:

Spousta řešení se ubírala správnou cestou, ne nepodobnou té ve vzorovém řešení. Mnohdy jsem se však setkala s řešeními, která se snažila funkci nějakým způsobem konstruovat pomocí operací, nebo předpokládala její linearitu, aniž by to zdůvodnila. Je třeba dávat pozor na to, že funkce je podmnožina kartézského součinu (neobsahující dvojice (x, y) a (x, z)), a tedy se vlastně může chovat úplně náhodně.

Za každý ze dvou správných tvarů řešení jsem udělovala jeden bod. Nezřídka se bohužel stávalo, že řešitelé zapomněli na absolutní hodnotu u modul, a tedy typicky vynechali řešení pro dvojice $(a, -a)$. *(Adéla Karolína „Áďa“ Žáčková)*

Úloha 8.

Klárka a Miško hrají hru. Miško položí v nějakém pořadí $2n$ levých a $2n$ pravých rukavic do řady. Pak se Klárka a Miško střídají v tazích, Klárka začíná. V každém tahu si hráč vezme rukavici z některého konce řady, přičemž hra skončí, když dojdou rukavice. Klárka vyhraje, pokud získá přesně n pravých a n levých rukavic, jinak vyhraje Miško. Rozhodněte, jestli může Klárka vyhrát nehledě na to, jak hraje Miško.

Řešení:

Rukavice v řadě si obarvíme černě a bíle tak, že všechny rukavice na lichých pozicích v řadě budou bílé a všechny rukavice na sudých pozicích v řadě budou černé.

Tvrdím, že Klárka umí donutit Miška vzít nějakou rukavici barvy, která se jí zlíbí. Jelikož je rukavic sudý počet, je na začátku řady bílá a na konci černá rukavice. Ať už Klárka vybere libovolnou z nich, zůstanou na obou koncích rukavice stejné barvy. A jelikož oba hráči mohou brát rukavice jenom z krajů, Miško si nutně musí vzít nějakou rukavici oné barvy (opačné, než jakou si vzala Klárka). Zároveň po jeho tahu se dostáváme do téže situace jako na začátku (neboť na krajích je jedna bílá a jedna černá rukavice).

Klárka si tedy umí vybrat v každém kole barvu, kterou sebere, čímž donutí Miška vzít si opačnou barvu. Je to jediná věc, ke které Klárka umí Miška donutit, proto to budeme chtít využít v její strategii.

Myšlenka našeho řešení bude následující: Klárka si na začátku vybere jednu z barev a bude brát rukavice té barvy. V jeden okamžik barvu změní a až do konce bude brát rukavice druhé barvy. Intuitivně si můžeme rozmyslet, že vhodný okamžik na prohození nastane. Kdyby barvu neprohodila vůbec, bude mít více (BÚNO) pravých, kdyby ji prohodila na začátku, bude mít více levých. Tedy v průběhu nastane okamžik, kdy prohozením barvy, kterou bere, Klárka docílí toho, že na konci bude mít opravdu stejně od obou druhů rukavic.

Nyní si to pojďme dokázat formálněji.

Klárka chce sebrat n levých a n pravých rukavic. Máme dohromady $2n$ černých a $2n$ bílých rukavic, které ovšem mohou být různě rozdělené mezi pravými a levými. Nechť je BÚNO bílých levých rukavic o $d \geq 0$ více než bílých pravých. Jelikož dohromady je i $2n$ levých a $2n$ pravých rukavic, bude bílých levých stejně jako černých pravých, těch tedy bude rovněž o d více než černých levých. Zároveň d bude jistě sudé.

Klárka chce, aby ve výsledku měla stejně pravých a levých rukavic. Dejme tomu, že začne tak, že bude brát samé bílé rukavice, zatímco Miško samé černé. Označme si b jako počet Klárkou sebraných bílých pravých rukavic mínus počet Klárkou sebraných bílých levých rukavic.

Klárka si po každém Miškově tahu dopočítá číslo c rovné počtu nesebraných černých pravých rukavic mínus počet nesebraných černých levých rukavic. V okamžiku, kdy nastane rovnost $b = -c$, změní Klárka strategii a po zbytek hry bere už jen černé rukavice. Pak tedy sebere $x_1 + b$ bílých pravých, x_1 bílých levých, $x_2 + c = x_2 - b$ černých pravých a x_2 černých levých. Obou typů rukavic bude tudíž dohromady $x_1 + x_2$ a jelikož jich Klárka celkově sebere $2n$, bude to n pravých a n levých.

Nyní stačí pouze dokázat, že tato situace nastane. Na začátku hry jsou proměnné b a c rovny 0 a d. Po Klárčině tahu se c nezmění, kdežto b se zvětší o 1 (v případě, kdy Klárka sebere pravou rukavici) nebo -1 (v opačném). Po Miškově tahu se obdobně b nezmění, kdežto c se změní o 1 nebo -1. Chceme, aby někdy nastala situace, že $c = -b$, tedy že $c + b = 0$. Na začátku $c + b = d$, pokud by Klárka brala pouze všechny bílé rukavice, na konci bychom došli do stavu $c + b = -d$.

Všimněme si, že po každém kole (tedy po jednom tahu Klárky a jednom tahu Miška) se součet $c + b$ zvětší o sudé číslo, konkrétně o -2, 0 nebo 2. Za celou hru se součet změní ze sudého d na sudé $-d$. Kýžená nula je také sudá. Tudíž určitě za celou dobu někdy nastane stav, kdy $b + c$ bude nula (kdyby ji součet nikdy neprošel, nedostal by se na $-d$, zároveň ji nemůže přeskočit, neboť na to nedělá dost velké kroky).

Klárka má tedy vítěznou strategii, se kterou Miško nehne, Klárka tedy může vyhrát nehledě na to, jak hraje Miško.

Poznámky:
Řešení dorazilo pomálu a bohužel ani všechna z nich nebyla správná. Někteří ukazovali, že úloha platí pro konkrétní rozložení rukavic, či menší počty, a pak se mě snažili přesvědčovat, že to lze snadno dokázat obdobně pro zbytek případů. Takové máchání rukama mě však typicky nepřesvědčilo a nemohla jsem udělit body. Body jsem neudělovala ani za správnou odpověď. Největším problémem v této úloze však bylo skloňování Miškova jména. Proto si prosím poznamenejte: Miško, bez Miška, Miškovi, vidím Miška, o Miškovi a s Miškem. :) *(Adéla Karolína „Áďa“ Žáčková)*