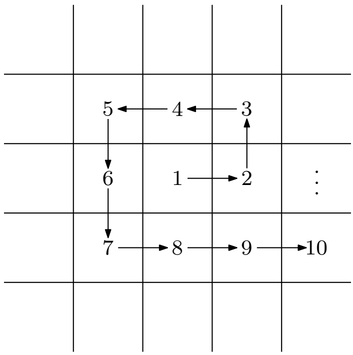
Branky, body, vteřiny

3. JARNÍ SÉRIE — VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Housenka Hedvika spadla doprostřed čtvercové sítě. Rozhodla se, že poleze „do spirály“ tak, jak je naznačeno na obrázku. Každou vteřinu se posune o právě jedno políčko. Rozhodněte, kterým směrem poleze z 2020. *na* 2021. *vteřinu.*



(Martin Raška)

ŘEŠENÍ:

Nejprve si rozmysleme, jakým směrem se housenka pohybuje v okolí políčka s číslem $(2k+1)^2+1$ pro přirozená k. Ve chvíli, kdy je na políčku $(2k+1)^2$, její dosavadní cesta vykreslila čtverec se stranou délky $2k+1$. Další krok tedy vždy udělá doprava a potom nahoru. Předtím prošla celou spodní stranu čtverce, tedy $2k+1$ políček.

Nalezneme tedy nejmenší lichou druhou mocninu větší než 2021. To je $2025 = 45^2$. Protože $2025 - 2020 < 45$, lezla housenka v hledaném okamžiku po spodní straně čtverce směrem doprava (tedy ve směru prvního pohybu $\longrightarrow$).

POZNÁMKY:

Většina řešitelů postupovala podobným způsobem jako vzorové zadání, případně si pomohli vytvořením posloupnosti políček, na kterých housenka mění směr. Malý zmatek mohlo působit zadání, tedy jestli je housenka na políčku p v p-té nebo $(p+1)$-ní vteřině, nicméně řešení se tím nezměnilo.

(Hedvika Ranošová)

Úloha 2.

Petr dostal za úkol postavit na šachovnici 2020×2020 několik věží tak, aby každé bílé políčko bylo obsazené nebo ohrožené. Umístit jednu věž mu trvá vteřinu. Poraďte Petrovi, jak rozestavět věže, aby splnil zadání a zároveň umístění proběhlo co nejrychleji. *(Matěj Doležálek)*

Řešení:

V řešení nejprve najdeme správné rozestavění věží a poté ukážeme, že toto rozestavení splňuje podmínky zadání a je optimální, tj. věží nemůže být méně. Protože je 2020 sudé, existuje na šachovnici černý roh. Otočme tedy šachovnici tak, aby byl vlevo nahoře. Dále očíslujme sloupce zleva doprava a řádky odshora dolů $0, 1, 2, \ldots, 2019$ a podle tohoto očíslování budeme určovat souřadnice políček. Bílá jsou potom právě ta políčka, která mají lichý součet souřadnic, což lze ověřit procházkou z políčka $(0, 0)$ – udělám-li i kroků dolů a j doprava, dojdu na políčko (i, j) a v každém kroku změním barvu.

Umístíme 1010 věží na souřadnice $(0, 0), (2, 2), (4, 4), \ldots, (2018, 2018)$. Potom v každém sloupci se sudým číslem je věž a stejně tak v každém řádku se sudým číslem. Protože každé bílé políčko má lichý součet souřadnic, musí se nacházet v řádku se sudým číslem nebo ve sloupci se sudým číslem (pokud by obě tato čísla byla lichá, měla by sudý součet), takže je v nějakém řádku nebo sloupci, ve kterém je věž. Je tedy ohrožené (ani nemůže být obsazené, protože všechny věže jsou na černých políčkách).

Protože 2020 je sudé, je v každém řádku a v každém sloupci právě 1010 bílých políček a v celé šachovnici jich je $\frac{2020^2}{2}$. Každá umístěná věž ohrozí jeden řádek a jeden sloupec, tedy maximálně 2020 bílých políček. Pokud tedy označíme počet umístěných věží jako k, pak aby byla ohrožena všechna bílá políčka, musí platit $k \cdot 2020 \geq \frac{2020^2}{2}$, tedy $k \geq 1010$. Tudíž 1010 je skutečně optimální počet, věží nemůže být méně a jejich umístění je to nejrychlejší možné.

Poznámky:

Spousta řešitelů dost odbyla nebo úplně opomněla odůvodnění, proč jejich rozmístění ohrozí všechna bílá políčka, za což jsem strhával bod.

Někteří řešitelé psali, že každá věž ohrozí 2020 bílých políček, což není pravda. Věž umístěná na bílé políčko ohrozí 1010 bílých políček ve svém řádku a 1010 bílých políček ve svém sloupci, ale políčko, na kterém stojí, je v obou těchto skupinách. Tudíž ohrožuje jen 2019 různých bílých políček. *(Petr Gebauer)*

Úloha 3.

Hokejového turnaje se zúčastnilo 8 týmů, hrál každý s každým a nenastaly žádné remízy. Dokažte, že můžeme vybrat čtveřici týmů A, B, C, D takovou, že tým A porazil B, C i D, tým B porazil C a D a tým C porazil D. *(Matěj Doležálek)*

Řešení:

Celkem se v turnaji odehrálo 28 utkání, z Dirichletova principu tak víme, že alespoň jeden tým vyhrál nad alespoň čtyřmi týmy. Nazvěme tento tým A. Mezi čtyřmi z těchto poražených týmů se odehrálo celkem 6 utkání, takže znovu z Dirichletova principu existuje tým, který vyhrál alespoň dvě z těchto utkání. Nazvěme jej B. Tyto dva týmy, poražené jak týmem A, tak týmem B, mezi sebou odehrály vzájemný zápas, jehož vítěze nazvěme C a poraženého D. Nyní jsme tedy našli hledanou čtveřici týmů.

Poznámky:

Velká většina řešitelů poslala řešení velmi podobné tomu vzorovému. U tohoto typu úloh může být lákavé snažit najít „nejhorší“ konfiguraci. Takové řešení často nic neukazuje, protože není jasné, co znamená nejhorší a proč je nejhorší zrovna tato konfigurace. Doporučuji se takovým řešením velkým obloukem vyhnout. *(Jáchym Solecký)*

Úloha 4.

Lenka hraje fotbal na lichoběžníku $ABCD$, kde AB, CD jsou rovnoběžné postranní čáry a na úsečkách BC, DA jsou branky. Lenka stojí v bodě L na brankové čáře BC. Následně Ondra vykopne od rohového praporku B míč na protější branku směrem rovnoběžným s přímkou LD. Druhý Ondra vykopne od rohového praporku C míč směrem rovnoběžným s přímkou LA. Dokažte, že oba míče překročí brankovou čáru DA v témže bodě. *(Matěj Doležálek)*

Řešení:

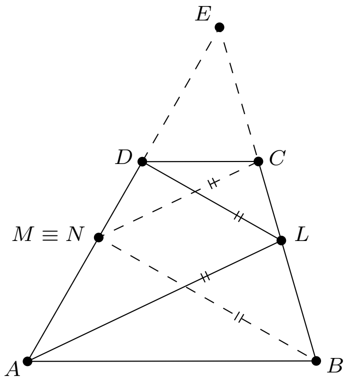
Označme M, resp. N průsečík AD s rovnoběžkou k LD skrz B, resp. rovnoběžkou k LA skrz C.

Nejprve předpokládejme, že $AD \parallel BC$, potom jsou $ABCD$, $ALCN$ a $MBLD$ rovnoběžníky, a tedy

$$|AD| = |BC| = |BL| + |LC| = |DM| + |NA|,$$

a protože M i N leží uvnitř AD, musí $M \equiv N$.

Nyní vyřešme druhý případ, kdy rovnoběžné nejsou, a tedy existuje průsečík E přímek AD a BC. BÚNO platí $|AB| > |CD|$, a tedy E leží nad CD.



Pak platí následující tři podobnosti trojúhelníků:

(1) $\triangle ELD \sim \triangle EBM$ (*uuu*), protože $LD \parallel BM$ a $\sphericalangle DEL = \sphericalangle MEB$, a tedy

$$\frac{|DE|}{|ME|} = \frac{|LE|}{|BE|},$$

$$|DE| \cdot |BE| = |LE| \cdot |ME|.$$

(2) $\triangle ELA \sim \triangle ECN$ (*uuu*), protože $LA \parallel CN$ a $\sphericalangle AEL = \sphericalangle NEC$, a tedy

$$\frac{|AE|}{|NE|} = \frac{|LE|}{|CE|},$$

$$|AE| \cdot |CE| = |LE| \cdot |NE|.$$

(3) $\triangle ECD \sim \triangle EBA$ (*uuu*), protože $CD \parallel AB$ a $\sphericalangle DEC = \sphericalangle AEB$, a tedy

$$\frac{|DE|}{|AE|} = \frac{|CE|}{|BE|},$$

$$|DE| \cdot |BE| = |CE| \cdot |AE|.$$

Tedy celkem

$$|LE| \cdot |ME| = |DE| \cdot |BE| = |CE| \cdot |AE| = |LE| \cdot |NE|,$$

$$|ME| = |NE|,$$

a protože M a N leží na stejné straně přímky AD od E, musí $M \equiv N$.

Poznámky:
Několik řešitelů, kteří úlohu řešili jako vzorové řešení, bohužel zapomnělo vyřešit případ, kdy bod E neexistoval, za což ztratili jeden bod. Podobně u analytických řešení jsem strhla bod až dva, pokud řešitel nevyřešil případy, kdy dělil nulou. *(„madam Verča“ Hladíková)*

Úloha 5.

Polynom P stupně n s různými kořeny $a_1, \dots, a_n$ nazveme vteřinový, pokud pro všechna $1 \le i \le n$ platí, že v bodě $a_i + 1$ má hodnotu 1. V závislosti na n najděte všechny vteřinové polynomy P.
(Pavel Hudec)

Řešení:
Dokážeme, že všechny vteřinové polynomy jsou právě polynomy tvaru $P(x) = x - a_1$ pro libovolné $a_1 \in \mathbb{R}$ a $P(x) = k$ pro libovolné $k \neq 0$. Je zřejmé, že takovéto polynomy vskutku vyhovují podmínce ze zadání.

Z konstantních polynomů vyhovují právě všechny nenulové polynomy. Předpokládejme dále, že P je nekonstantní vteřinový polynom. Obecný polynom stupně $n > 0$ s kořeny $a_1, \dots, a_n$ můžeme zapsat jako $P(x) = k(x - a_1)\cdots(x - a_n)$ pro nějaké reálné $k \neq 0$. Definujme si nový polynom $Q(x) = P(x + 1) - P(x)$.

Ukážeme si, že stupeň Q je roven $n-1$ nezávisle na volbě P. Zřejmě bude stupeň nejvýše n, takže můžeme psát $Q(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0$ pro nějaká $c_i \in \mathbb{R}$. Poněvadž $P(x)$ i $P(x+1)$ mají vedoucí koeficient k, tak se pokrátí a bude platit $c_n = 0$. Zároveň roznásobením výrazů pro $P(x)$ a $P(x + 1)$ (respektive použitím Viètových vzorců) vidíme, že koeficienty těchto polynomů u x^{n-1} jsou $-k(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ a $kn - k(a_1 + \cdots + a_n)$, takže $c_{n-1} = kn \neq 0$ a Q má skutečně stupeň $n - 1$.

Nyní můžeme využít podmínku, že polynom $P(x)$ je vteřinový: ta je ekvivalentní tomu, že $Q(a_i) = 1$ pro všechna $1 \le i \le n$. Vzhledem k výše řečenému má však polynom $Q(x) - 1$ stupeň nejvýše $n - 1$, z různosti a_i ovšem má n různých kořenů, tudíž se musí jednat o nulový polynom. To znamená, že $Q(x) = 1$ je konstantní, nenulový polynom, takže jeho stupeň je $n - 1 = 0$, neboli $n = 1$ a P musí být lineární. Nyní už si pouze stačí uvědomit, že pro lineární polynomy je $Q(x) = k(x + 1 - a_1) - k(x - a_1) = k$, takže pro vteřinový polynom musí být $k = 1$. Všechny nekonstantní vteřinové polynomy tedy musí být tvaru $P(x) = x - a_1$ pro nějaké $a_1 \in \mathbb{R}$, což jsme chtěli dokázat.

Alternativní řešení:
Ukážeme si jiný způsob, jak dokázat, že neexistují vteřinové polynomy stupně $n > 1$. Předpokládejme pro spor, že P je vteřinový a má stupeň alespoň dva. Uspořádejme si kořeny P tak, aby platilo $a_1 < \cdots < a_n$. Zároveň si můžeme všimnout, že je-li $P(x)$ vteřinový polynom, tak bude vteřinový i polynom $P(x-c)$ pro libovolné reálné číslo c, takže můžeme navíc BÚNO předpokládat, že $a_n = 0$ (takže všechny ostatní kořeny jsou záporné). Potom lze psát

$$P(x) = kx\bigl(x + |a_1|\bigr)\bigl(x + |a_2|\bigr)\cdots\bigl(x + |a_{n-1}|\bigr)$$

pro nějaké reálné k.

Ze vteřinovosti musí platit $P(1) = 1$, takže jelikož všechny ostatní činitele jsou kladné, tak musí být kladné i k. To znamená, že funkce $P(x)$ bude rostoucí na $\mathbb{R}^+$, poněvadž po roznásobení výše uvedeného výrazu budou všechny koeficienty kladné a všechny mocninné funkce x^l jsou rostoucí na $\mathbb{R}^+$ pro $l \in \mathbb{N}$. Z toho můžeme odvodit, že $a_{n-1} + 1 < 0$, protože $P(a_{n-1} + 1) = 1$ a funkce $P(x)$ je na $(0, +\infty)$ prostá, tudíž nemůže nabývat hodnoty 1 v dalším bodě.

To však znamená, že $a_{n-1}+1 \in (a_{n-1}, 0)$. Pro t v tomto intervalu je však hodnota $P(t)$ záporná, protože $t < 0$ a všechny ostatní činitele ve výše uvedeném výrazu jsou kladné, takže nemůže platit $P(a_{n-1} + 1) = 1$ a našli jsme kýžený spor.

Poznámky:

Všechna došlá řešení se víceméně podobala jednomu z výše uvedených vzorových řešení. Ta, která používala Viètovy vzorce nebo zkoumala počty kořenů různých polynomů, se typicky dostala ke zdárnému konci. Problematičtějšími se ukázala být řešení druhého typu, protože si spousta lidí neuvědomila, že stačí vyšetřit chování funkce $P(x)$ až od posledního kořene. To vedlo k řadě komplikací: bylo pak nezbytné zkoumat kořeny její derivace $P'(x)$. K tomu však bylo zapotřebí pokročilejších tvrzení (jako například Rolleho věta) nebo alespoň dostatečně detailního vysvětlení, proč platí v tomhle konkrétním případě. Místo toho jste však často používali různá ne zcela pravdivá tvrzení (například že $x = a$ je lokálním extrémem diferencovatelné funkce $f(x)$, právě když $f'(a) = 0$, což platí pouze jedním směrem: lokální extrém musí být kořenem derivace) a všemožné důkazy obrázkem. Nakonec jsem se rozhodl být ve svém hodnocení mírný, ale doporučil bych dávat si na takové věci do budoucna větší pozor. *(Danil Koževnikov)*

Úloha 6.

Radeček napsal na tabuli čísla $1 \cdot 2,\ 2 \cdot 3,\ \ldots,\ 2m \cdot (2m+1)$. *V každé z následujících* $m-1$ *vteřin si Anička vybrala čísla* a, b, c *z tabule, smazala je a místo nich napsala číslo* $\frac{abc}{ab+bc+ca}$. *Na konci na tabuli zůstala dvě čísla, z nichž jedno bylo* $\frac{4}{3}$. *Dokažte, že druhé z nich bylo větší než* 4, *ať už Anička vybírala jakkoliv.* *(Pavel Hudec)*

Řešení:

Nejdříve ukážeme, že součet převrácených hodnot čísel na tabuli je invariant[1]. Aniččina operace spočívá v nahrazení čísel a, b a c číslem $\frac{abc}{ab+bc+ac}$. Z platnosti rovnosti

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ac}{abc}$$

tak plyne, že celkový součet převrácených hodnot čísel na tabuli se skutečně nemění.

Označme druhé na konci zbylé číslo jako x. To je určitě kladné, protože začínáme s kladnými čísly a prováděná operace kladnost zachovává. Součet převrácených hodnot čísel na tabuli je pak na konci roven $\frac{3}{4} + \frac{1}{x}$. Pro důkaz tvrzení ze zadání pak stačí dokázat, že tento součet je menší než jedna. Díky invariantu tedy stačí ekvivalentně dokázat, že součet převrácených hodnot čísel, se kterými začínáme, je menší než jedna.

Platí $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$. Za pomoci tohohle vztahu lze upravit

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{2m\cdot(2m+1)} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2m} - \frac{1}{2m+1} = 1 - \frac{1}{2m+1} < 1,$$

z čehož už plyne dokazované tvrzení.

Poznámky:

Řešení přišlo poměrně málo, valná většina z nich ale byla správně a postupovala jako vzorové řešení. To obsahuje dva klíčové kroky, které se na první pohled mohou zdát poměrně trikové. Nutno ale říct, že zejména použití invariantu je v podobných kombinatorických úlohách velmi typické a vyplatí se ho zkoušet hledat.

Na závěr se hodí poznamenat, že situace ze zadání skutečně může nastat – například provedením operace na první tři čísla vznikne $\frac{4}{3}$, potom už stačí jenom vybírat jiná čísla do doby, než zbydou pouze dvě. *(Martin Raška)*

[1]Neboli hodnota, která se při provedení operace nemění.

Úloha 7.

Žabák Pepíček skáče po kamenech očíslovaných 1, 2, 3, …, 2^n tak, že začíná na kameni s číslem 1 a žádný kámen nenavštíví více než jednou. Každou vteřinu přitom skočí z kamene s číslem x na kámen s číslem y tak, aby $|x-y|$ byla mocnina dvojky. Tímto skokem Pepíček získá $|x-y|$ bodů. Kolik nejvíce bodů může Pepíček získat? (Pavel Hudec)

Řešení:
Ukážeme, že Pepíček může získat nejvýše $\frac{4^n-1}{3}$ bodů.

Hledanou Pepíčkovu posloupnost skoků sestrojíme indukcí podle n. Budeme předpokládat, že pro n umí Pepíček proskákat kameny tak, aby skončil na čísle 2 a získal přitom $\frac{4^n-1}{3}$ bodů. Pro $n=1$ je to zřejmé. Dále pro $n+1$ Pepíček nejprve použije cestu pro n, aby se z kamene s číslem 1 dostal na číslo 3 po lichých kamenech. Pak přeskočí ze 3 na 4 a podobně (ale obráceně) použije cestu pro n, aby se dostal z kamene s číslem 4 na číslo 2 po sudých kamenech. Takto je cesta pro $n+1$ složena ze dvou dvakrát nafouknutých cest pro n a jednoho skoku délky 1, tedy Pepíček získá $4 \cdot \frac{4^n-1}{3} + 1 = \frac{4^{n+1}-1}{3}$ bodů.

Uvažujme nějaké $0 \le k \le n-1$ a spočítejme, kolik nejvíce skoků délky alespoň 2^k může nastat. Rozdělme čísla kamenů do zbytkových tříd podle zbytků po dělení 2^k. Každá taková zbytková třída je stejně početná, obsahuje 2^{n-k} čísel. Dále každý skok délky alespoň 2^k zachovává zbytkovou třídu, tedy speciálně první skok do každé zbytkové třídy musí být kratší. Každá zbytková třída tak přispívá nejvýše $2^{n-k}-1$ skoky dovnitř, celkový počet je pak tedy $2^k \cdot (2^{n-k}-1) = 2^n - 2^k$.

Označme a_k počet skoků délky přesně 2^k. Pak pro každé k platí součtová podmínka

$$a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{n-1} \le 2^n - 2^k.$$

Dále označme S výsledný součet délek skoků, tedy $S = a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + \cdots + a_{n-1} \cdot 2^{n-1}$.

Předvedeme si dva způsoby, jak ukázat, že $S \le \frac{4^n-1}{3}$, čímž bude úloha vyřešena.

Řešení rozkladem sumy na části:
Upravíme výraz ve výše uvedené definici S a ukážeme, že je menší nebo rovný $\frac{4^n-1}{3}$:

$$\begin{aligned} S = {} & a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + \\ & + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + \\ & + 2a_2 + 2a_3 + \cdots + 2a_{n-1} + \\ & + 4a_3 + \cdots + 4a_{n-1} + \\ & \vdots \\ & + 2^{n-2} a_{n-1}. \end{aligned}$$

Využitím podmínek na jednotlivé součty pak dostaneme

$$\begin{aligned} S &\le \left(2^n - 2^0\right) + \left(2^n - 2^1\right) + 2\left(2^n - 2^2\right) + \cdots + 2^{n-2}\left(2^n - 2^{n-1}\right) = \\ &= \left(1 + 1 + 2 + \cdots + 2^{n-2}\right) \cdot 2^n - \left(1 + 2 + 8 + \cdots + 2 \cdot 4^{n-2}\right) = \\ &= \frac{4^n}{2} - \left(1 + 2 \cdot \frac{4^{n-1}-1}{3}\right) = \frac{4^n-1}{3}. \end{aligned}$$

Optimalita majorizující posloupnosti pomocí setřídění (podle Vaška Janáčka):
Nazvěme libovolnou posloupnost skoků, pro niž platí $a_k = 2^k$, *majorizující*. Uvědomme si, že majorizující posloupnost splňuje součtové podmínky (navíc s rovností) a její výsledný počet bodů je

$$S = a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + \cdots + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} = 4^0 + 4^1 + \cdots + 4^{n-1} = \frac{4^n-1}{3}.$$

Nechť $c_1, c_2, \ldots, c_{2^n-1}$ je sestupně seřazená posloupnost délek majorizující posloupnosti skoků. Naopak nechť $d_1, d_2, \ldots, d_m$ je libovolná sestupně seřazená posloupnost délek posloupnosti skoků, která splňuje součtové podmínky. Pokud by pro každé i platilo, že $c_i \geq d_i$, pak je součet prvků c větší než součet prvků d, tedy posloupnost c je výhodnější.

Zvolme tedy minimální i takové, že platí $c_i < d_i$. Pak ale počet skoků délky alespoň d_i je v případě posloupnosti d alespoň i, naopak v případě posloupnosti c je $i-1$. Ale posloupnost c má z definice takovou vlastnost, že počet skoků délky alespoň 2^k je maximální možný pro každé k. To je spor, tedy pro každé i platí $c_i \geq d_i$ a skutečně tak je pro Pepíčka nejvýhodnější zvolit majorizující posloupnost skoků.

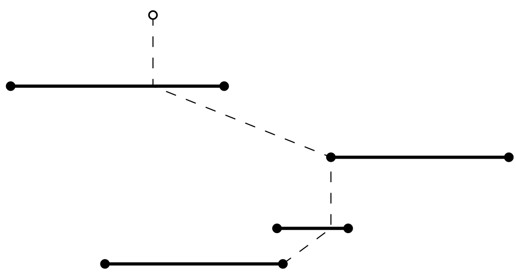
Poznámky:
Úloha nedopadla příliš dobře a musel jsem při hodnocení využít celou bodovou škálu. Většina (i zkušených) řešitelů se pokoušela dělat odhad nějakým hladovým způsobem, nejčastěji pak tvrzením, že je nejlepší udělat největší možný počet nejdelších skoků. Intuice je to jistě správná, ale podobná tvrzení většinou nejsou vůbec zřejmá a bez důkazu je nevidíme rádi. Konkrétně v této úloze se žádnému z řešitelů nepovedlo mě přesvědčit, že by optimální řešení mělo vypadat zrovna takto.

Poněkud překvapivě hladový přístup v této úloze skutečně v nějaké podobě vede k řešení. Uvažujme vážený graf G na vrcholech $1, 2, \ldots, 2^n$ takový, že pro váhu hrany xy platí $w(x,y) = -|x-y|$, pokud $|x-y|$ je mocnina dvojky, a $w(x,y) = 0$ jinak. Pak se úloha ptá na minus délku nejkratší cesty[2] v G začínající ve vrcholu 1. Graf G má ale tu vlastnost, že dokonce jeho minimální kostra[3] má stejný součet vah jako délka zmíněné nejkratší cesty. Minimální kostry ale lze hledat hladově, takže hladové řešení pomocí koster mělo šanci na úspěch. Konkrétně *Michal Beránek* použil Kruskalův algoritmus na hledání minimální kostry, za což obdržel $+i$.

Nejlepší možná Pepíčkova cesta se po drobné úpravě nazývá *Grayův kód*[4] a využívá se v elektrotechnice. *(Pavel Hudec)*

Úloha 8.

Filip s Radem vyrazili na sjezdovku projet slalomovou trať. Trať obsahuje několik branek (ne nutně stejně širokých) rovnoběžných s vrstevnicí, které musí oba závodníci všechny projet postupně odshora dolů. Oba začínají ve stejném bodě. Když Rado projíždí brankou, zatočí tak, aby cesta do následující branky byla nejkratší možná (viz obrázek). Filip projíždí trasou optimálně. Dokažte, že Rado jel nejvýše $\sqrt{2}$-násobně delší cestou než Filip.



(Pavel Hudec)

[2] Hledáme nejdelší cestu v absolutní hodnotě.

[3] O minimálních kostrách si můžeš přečíst na *https://prase.cz/library/MinimalnikostrySS/MinimalnikostrySS.pdf*.

[4] Viz *https://cs.wikipedia.org/wiki/Gray%C5%AFv_k%C3%B3d*.

Řešení:
Branky si budeme představovat jako uzavřené úsečky. Filip i Rado zřejmě jezdí mezi brankami po úsečkách. Ať by totiž byla jejich trasa jakákoliv, projedou každou branku v nějakém jejím bodě, a trasa, která projede postupně tyto body po úsečkách, bude zřejmě kratší nebo rovna vybrané, neboť úsečka je nejkratší spojnice dvou bodů v rovině.

Ukážeme, že Filip mění směr jízdy vždy jen na kraji branky. Uvažme libovolnou branku, kde mění směr. Označme postupně A, B a C body průjezdu předchozí, aktuální a následující brankou. Pro spor předpokládejme, že bod B není krajní bod branky. Pak můžeme zvolit bod D blízko B tak, aby kolmice na osu úhlu ABC vedoucí bodem D protínala obě úsečky AB, BC v bodech E, F. Potom je ale z trojúhelníkové nerovnosti cesta vedoucí po úsečkách AE, EF, FC kratší než původní Filipova cesta, což je ve sporu s tím, že Filip jede optimálně.

Všimněme si, že Rado jezdí vždy k nejbližšímu bodu následující branky, což je přímo dolů, pokud tam následující branka leží, a v opačném případě je to k nejbližšímu kraji následující branky.

Rozdělme si nyní cestu na co nejdelší úseky, kde Filip jede vždy směrem doprava, přímo dolů nebo doleva. Ukážeme, že na začátku a konci každého z těchto úseků (nyní kromě posledního) se Filip potká s Radem. Předpokládejme, že Filip a Rado začínají na stejném místě (což se na úplném začátku děje), a ukážeme, že i na konci úseku na stejném místě skončí. Pokud se jedná o úsek, kde Filip jede přímo dolů, je to zřejmé, neboť Radova cesta poté povede úplně stejně. Jinak BÚNO předpokládejme, že se jedná o úsek doprava. Filip bude tento úsek muset končit na kraji poslední branky, neboť posléze bude měnit směr. Navíc to musí být kraj levý, jinak bychom mohli použít stejný zkracovací argument jako v předminulém odstavci. Rado projede každou vrstevnici tohoto úseku vlevo od Filipa, neboť vždy pojede buď dolů, nebo k levému kraji následující branky. Jistě nemůže nikdy jet směrem doleva, protože pak by musel jet doleva i Filip, čímž se ale v žádné brance nedostane napravo od Filipa, takže žádná část jeho cesty nebude napravo od něj. V závěrečné brance, kterou Filip projede úplně vlevo, se proto musí potkat.

Všimněme si, že i v poslední brance celé trati se nutně Filip s Radem potkají, protože Filip jede v tomto případě z předposlední branky stejnou strategií jako Rado. Pokud pojede přímo dolů, pak se jedná o úsek, kde Filip jede přímo dolů, a už jsme ukázali, že v tomto případě jsou Filipova a Radova cesta totožné. V opačném případě Filip dojede na kraj poslední branky, přičemž to musí být stejný kraj jako Rado – jinak by jel jeden z nich doprava a druhý doleva, což nelze.

Abychom ukázali, že Rado ujede maximálně $\sqrt{2}$-krát delší trasu než Filip, stačí nám ukázat, že se tak bude dít na každém úseku. Na úseku přímo dolů jsou jejich trasy stejně dlouhé, takže tam to platí triviálně. Zbytek dokažme BÚNO pro úsek, kde Filip jede doprava.

Označme startovní bod úseku jako X a koncový bod úseku jako Y. Délku Filipovy trasy označme f a Radovy trasy r. Uvažme bod Z ležící na stejné vrstevnici jako Y přímo pod bodem X tak, aby byl trojúhelník XYZ pravoúhlý. Nejkratší cesta mezi X a Y je dlouhá $|XY|$, což nám s využitím Pythagorovy věty dává odhad

$$f \geq |XY| = \sqrt{|XZ|^2 + |YZ|^2}.$$

Délku Radovy cesty můžeme mezi každými dvěma brankami odhadnout z trojúhelníkové nerovnosti pomocí toho, že by jel nejdřív přímo dolů a poté přímo doprava – směrem doleva se nikde v úseku pohybovat nemůže. Když tyto nerovnosti sečteme přes celý úsek, dostaneme $r \leq |XZ| + |YZ|$.

Využijme nyní AG nerovnost ve formě $2|XZ| \cdot |YZ| \leq |XZ|^2 + |YZ|^2$, kterou upravme přičtením $|XZ|^2 + |YZ|^2$ k oběma stranám a odmocněním na tvar $|XZ| + |YZ| \leq \sqrt{2}\sqrt{|XZ|^2 + |YZ|^2}$.

Dohromady tak dostáváme

$$r \leq |XZ| + |YZ| \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{|XZ|^2 + |YZ|^2} \leq \sqrt{2}f,$$

z čehož vidíme $r \leq \sqrt{2}f$, což je přesně to, co nám zbývalo ukázat.

Poznámky:
Většina řešitelů přišla na hlavní myšlenku odhadů délky cest z konce vzorového řešení. Pořádný důkaz, jak přesně se budou Filip s Radem pohybovat a že lze celou trať rozdělit do úseků takových, kde se dají odhady dobře použít, ale některým chyběla, za což jsem potom strhával nějaké body. Celkově jsem byl ale při opravování spíše hodný a nestrhával jsem body za malé detaily typu, co přesně se bude dít na konci trasy apod. *(Filip Bialas)*