Odmocniny

3. jarní série — Vzorové řešení

Úloha 1.

Rozhodněte, zda lze zvolit po dvou různá přirozená čísla a, b, c taková, že $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ ani $\sqrt{abc}$ nejsou celá čísla, ale $\sqrt{ab}$, $\sqrt{bc}$ i $\sqrt{ca}$ jsou? *(Josef Minařík)*

Řešení:
Ukažme, že taková čísla zvolit dovedeme. Položme ku příkladu $a = 2$, $b = 8$, $c = 32$. Pak

$$\sqrt{2}, \qquad \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \qquad \sqrt{32} = 4\sqrt{2}, \qquad \sqrt{2 \cdot 8 \cdot 32} = \sqrt{512} = 16\sqrt{2}$$

nejsou celá čísla. Naopak

$$\sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4, \qquad \sqrt{2 \cdot 32} = \sqrt{64} = 8, \qquad \sqrt{8 \cdot 32} = \sqrt{256} = 16$$

celá čísla jsou.

Poznámky:
Většina řešení byla správná a obsahovala buď trojici ze vzorového řešení, nebo trojici 2, 8, 18. Část řešení také obsahovala pouze obecné řešení, taková řešení byla také správná. Největší záludností úlohy byla formulace *po dvou různá čísla*, kterou myslíme, že se žádná dvojice čísel nerovná, tj. $a \neq b$, $b \neq c$ a zároveň $a \neq c$. *(Hedvika Ranošová)*

Úloha 2.

Spočtěte hodnotu výrazu

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$$

(Radek Olšák)

Řešení:
Využijeme, že platí $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$. Výraz lze tedy upravit:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} =$$
$$= \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right) \cdot \left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)}.$$

V poslední odmocnině tak dostáváme součin tvaru $(a+b)\cdot(a-b)$, což lze dle vzorce pro rozdíl čtverců zapsat jako a^2-b^2, tedy

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^2}=$$
$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

Nyní lze opakovat stejný postup vždy na součin posledních dvou odmocnin:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\cdot\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{4-3}=\sqrt{1}=1.$$

Hodnota celého výrazu je tedy 1.

POZNÁMKY:
Téměř všechna došlá řešení dospěla ke správnému výsledku. Někteří z vás zavedli substituci pro některý z výrazů. *(Klárka Grinerová)*

Úloha 3.

Daník na pololetním vysvědčení dostal samé jedničky. Z dlouhé chvíle si všechny své jedničky zapsal za sebe a ze získaného čísla (v desítkové soustavě) spočetl druhou odmocninu. Shodou okolností mu vyšlo celé číslo. Kolik mohl mít Daník předmětů? (Natália Bátorová)

ŘEŠENÍ:
Číslo 1 je druhou mocninou, teda $\sqrt{1}\in\mathbb{Z}$. Všetky ostatné čísla tvorené samými jednotkami možno zapísať ako $a=x\cdot 100+11$, pričom $x\in\{0,1,11,111,\dots\}$. Z toho vyplýva $a\equiv 3 \pmod 4$.[1]

Všimnime si, že ak $y\equiv 0 \pmod 4$ alebo $y\equiv 2 \pmod 4$, tak $y^2\equiv 0 \pmod 4$, a ak $y\equiv 1 \pmod 4$ alebo $y\equiv 3\equiv -1 \pmod 4$, tak $y^2\equiv 1 \pmod 4$. Takže ak a je druhou mocninou, potom musí $a\equiv 1 \pmod 4$ alebo $a\equiv 0 \pmod 4$, my však máme $a\equiv 3 \pmod 4$, z čoho plynie $\sqrt{a}\notin\mathbb{Z}$.

Daník mal teda len 1 predmet.

POZNÁMKY:
Mnoho riešení postupovalo podobne ako vzorové. Niektorí riešitelia rozobrali všetky možné posledné a predposledné cifry čísla $\sqrt{a}$, či využili algoritmus odmocňovania. To viedlo väčšinou tiež k správnemu výsledku, no cesta bola dlhšia. *(Natália Bátorová)*

Úloha 4.

Jsou dána kladná racionální čísla p a q, pro něž je $\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$ rovněž racionální číslo. Dokažte, že také $\sqrt[3]{p}$ je racionální. (Josef Minařík)

ŘEŠENÍ:
Označme $r=\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$. Ze zadání víme, že $p,q,r\in\mathbb{Q}$. V řešení budeme využívat, že racionální čísla jsou uzavřená na sčítání, odčítání, násobení i dělení.

Nejprve spočtěme hodnotu

$$r^3=p+3\sqrt[3]{p^2q}+3\sqrt[3]{pq^2}+q$$

[1]Výraz $x\equiv y \pmod m$ znamená, že čísla x a y dávajú rovnaký zvyšok po delení číslom m.

a vyjádřeme

$$\sqrt[3]{pq} = \frac{r^3 - p - q}{3r}.$$

Na pravé straně máme samá racionální čísla (a víme, že nedělíme nulou, protože čísla ze zadání jsou kladná), tedy i výsledek musí být racionální, tedy $\sqrt[3]{pq} \in \mathbb{Q}$.

Dále můžeme vzít

$$r^2 = \sqrt[3]{p^2} + 2\sqrt[3]{pq} + \sqrt[3]{q^2}$$

a z toho vyjádřit $\sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{q^2} = r^2 - 2\sqrt[3]{pq} \in \mathbb{Q}$.

Nyní rozložme $p - q = \left(\sqrt[3]{p} - \sqrt[3]{q}\right)\left(\sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{pq} + \sqrt[3]{q^2}\right)$ a upravme na

$$\sqrt[3]{p} - \sqrt[3]{q} = \frac{p - q}{\sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{pq} + \sqrt[3]{q^2}}.$$

Opět máme na pravé straně samá racionální čísla, a tedy $\sqrt[3]{p} - \sqrt[3]{q} \in \mathbb{Q}$.

Nakonec sečteme $r + \left(\sqrt[3]{p} - \sqrt[3]{q}\right) = 2\sqrt[3]{p}$, a proto

$$\sqrt[3]{p} = \frac{r + \left(\sqrt[3]{p} - \sqrt[3]{q}\right)}{2} \in \mathbb{Q},$$

jak jsme chtěli dokázat.

POZNÁMKY:
Většina řešení postupovala podobným způsobem jako vzorové řešení a také využívala uzavřenosti $\mathbb{Q}$ na základní operace. *(Michal Töpfer)*

Úloha 5.

Najděte všechny dvojice reálných čísel x, y splňující

$$x^2 + y^2 + xy = 133,$$
$$x + y + \sqrt{xy} = 19.$$

(Filip Čermák)

ŘEŠENÍ:
První si uvědomíme, že $xy \geq 0$, neboť se součin v zadání vyskytuje pod odmocninou. Proto můžeme číslo xy odmocnit. Nyní upravme první rovnici:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + xy &= 133, \\ x^2 + y^2 + 2xy - xy &= 133, \\ (x+y)^2 - xy &= 133, \\ (x + y + \sqrt{xy})(x + y - \sqrt{xy}) &= 133. \end{aligned}$$

Vidíme, že první závorka v poslední úpravě je stejná jako levá strana druhé rovnice zadání. Můžeme za ni dosadit 19 a získáme

$$19(x + y - \sqrt{xy}) = 133,$$
$$x + y - \sqrt{xy} = 7.$$

Sečtením rovnic $x + y + \sqrt{xy} = 19$ a $x + y - \sqrt{xy} = 7$ dostaneme $2(x + y) = 26$ neboli $x + y = 13$.

Dosazením součtu do druhé rovnice máme $13 + \sqrt{xy} = 19$ neboli $\sqrt{xy} = 6$, a proto $xy = 36$. Pokud nyní dosadíme $y = 13 - x$ do $xy = 36$, získáme kvadratickou rovnici

$$x(13 - x) = 36,$$
$$x^2 - 13x + 36 = 0,$$
$$(x - 4)(x - 9) = 0,$$

z čehož už dostáváme jasná řešení $(4, 9)$, $(9, 4)$. Nyní můžeme provést zkoušku a vidíme, že obě řešení skutečně vyhovují rovnicím ze zadání.

Poznámky:
Většina řešení, která dorazila, byla podobná vzorovému. Občas se stalo, že někdo umocnil rovnici, což je neekvivalentní úprava, a poté neudělal zkoušku či nestanovil podmínky. V takovém případě byl strhnut bod. Jinak se velké chyby neobjevily. *(Filip Čermák)*

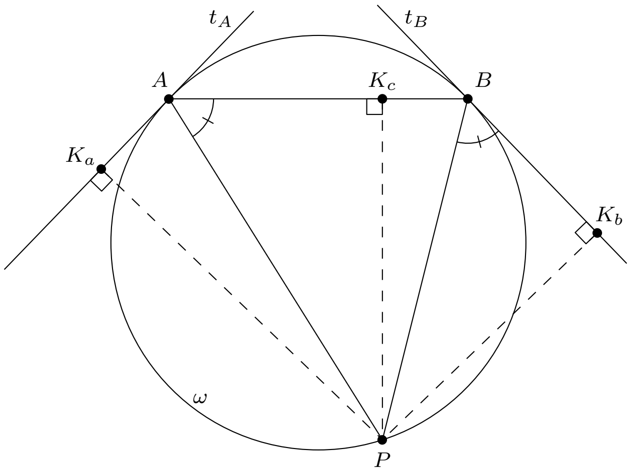
Úloha 6.

Na kružnici ω leží body A, B a P. Tečny k ω v bodech A, B pojmenujme po řadě t_A, t_B. Následně vzdálenosti bodu P od přímek t_A, t_B a AB označme po řadě a, b a c. Dokažte, že $c = \sqrt{ab}$.
(Magdaléna Mišinová)

Řešení:
Označme paty kolmic z bodu P na přímky t_A, t_B a AB postupně jako K_a, K_b a K_c. Dokážeme, že trojúhelník APK_c je podobný BPK_b. Protože u K_c a K_b jsou pravé úhly, stačí nám dokázat $|\sphericalangle PAK_c| = |\sphericalangle PBK_b|$. Orientovaně modulo 180° vyúhlíme, že $\sphericalangle(AP, AK_c) = \sphericalangle(BP, BK_b)$. Protože AK_cP je pravý úhel, bude PAK_c muset být ostrý úhel. Obdobně i úhel PBK_b bude ostrý, takže nám orientované úhlení opravdu dá rovnost neorientovaných úhlů. Díky úsekovému úhlu pak víme

$$\sphericalangle(AP, AK_c) = \sphericalangle(AP, AB) = \sphericalangle(BP, t_B) = \sphericalangle(BP, BK_b),$$

což jsme přesně chtěli orientovaně vyúhlit.



Nyní víme, že trojúhelníky APK_c a BPK_b jsou podobné. Analogicky dokážeme, že trojúhelníky BPK_c a APK_a jsou podobné. Dále máme $|PK_a| = a$, $|PK_b| = b$, $|PK_c| = c$, díky čemuž platí

$$\frac{c}{b} = \frac{|PK_c|}{|PK_b|} = \frac{|AP|}{|BP|} = \frac{|PK_a|}{|PK_c|} = \frac{a}{c},$$
$$c^2 = a \cdot b,$$
$$c = \sqrt{ab},$$

přesně jak jsme měli dokázat. Odmocnit jsme mohli, protože délky úseček jsou kladné.

Poznámky:
Většina došlých řešení byla víceméně správná. Hodně řešitelů zapomnělo rozebrat různé konfigurace, což vzorové řešení vyřešilo orientovaným úhlením. Body jsem sice nestrhávala, ale je dobré na to dávat pozor, například v olympiádě by to mohlo nějaký ten bod stát. *(Magdaléna Mišinová)*

Úloha 7.

V PraSestánu se nachází n měst, z nichž některé dvojice jsou spojené obousměrnými leteckými linkami. Pepovi se povedlo nalézt leteckou trasu mezi městy, během níž poletí ℓ-krát a zároveň se v žádném městě neocitne více než jednou. Potom Pepa společně s Radečkem odhalil pozoruhodnou skutečnost: vždy když si nějaké město označí jako start a jiné jako cíl, dovede každý z nich procestovat nějakou leteckou trasu ze startu do cíle tak, že žádné město kromě startu a cíle nebude navštíveno oběma. Dokažte, že Pepa si dovede naplánovat okružní výlet, při kterém poletí alespoň $\sqrt{2\ell}$-krát, vrátí se do města, z něhož vyrazil, a žádné jiné město nenavštíví více než jednou.

(Josef Minařík)

Řešení:

Přeformulujme úlohu do grafové podoby, města reprezentují vrcholy a letecké linky hrany grafu. V grafu existuje cesta délky ℓ a mezi každou dvojicí vrcholů existují dvě vrcholově disjunktní cesty. Dokážeme, že se v grafu nachází cyklus délky aspoň $\sqrt{2\ell}$.

Označme vrcholy cesty délky ℓ postupně $p_0, p_1, \ldots, p_\ell$. Ze zadání víme, že mezi p_0 a p_ℓ existují dvě disjunktní cesty, ty dohromady tvoří cyklus, označme jej C. Označme vrcholy, ve kterých se cyklus C a cesta protínají, jako $p_{i_0}, p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$, kde $i_0 < i_1 < \cdots < i_k$. Můžeme si všimnout, že $i_0 = 0$ a $i_k = \ell$, protože tento cyklus určitě obsahuje vrcholy p_0 a p_ℓ. Vrcholy $p_{i_0}, \ldots, p_{i_k}$ nám cestu dělí na k úseků, nějaký z nich tedy musí mít délku aspoň $\frac{\ell}{k}$, označme jeho koncové vrcholy p_{i_j} a $p_{i_{j+1}}$. Vrcholy p_{i_j} a $p_{i_{j+1}}$ nám zároveň dělí cyklus C na dvě části. Alespoň jedna z těchto částí je tvořena cestou délky alespoň $\frac{k}{2}$, protože C obsahuje aspoň $k+1$ vrcholů. Delší část cyklu C dohromady s úsekem cesty $p_{i_j}, \ldots, p_{i_{j+1}}$ tvoří cyklus délky aspoň $\frac{\ell}{k} + \frac{k}{2}$, což můžeme podle AG nerovnosti odhadnout zdola jako $\sqrt{2\ell}$.

Poznámky:

Správná řešení postupovala podobně jako to vzorové. Někteří řešitelé ovšem argumentovali tím, že uváží cestu délky ℓ a tu k ní disjunktní, taktéž vedoucí mezi vrcholy p_0 a p_ℓ. To ovšem udělat nemůžeme, mezi p_0 a p_ℓ sice vedou dvě disjunktní cesty, ta délky ℓ ale nemusí být ani jedna z nich.

(Josef Minařík)

Úloha 8.

Majda položila na stůl dvacet po sobě jdoucích přirozených čísel. Dokažte, že Naty si z nich dovede vybrat číslo d takové, že pro libovolné přirozené číslo n platí nerovnost

$$n\sqrt{d} \cdot \left\{n\sqrt{d}\right\} \geq \frac{5}{2},$$

kde $\{x\}$ značí desetinnou část reálného čísla x, tedy to číslo z intervalu $\langle 0, 1)$, pro něž je $x - \{x\}$ celé číslo.

(Magdaléna Mišinová)

Řešení:

Uvažujme nejprve výraz $\left\{n\sqrt{d}\right\}$ obecně pro libovolná přirozená n, d. Dolní celou část $n\sqrt{d}$ označme $a = \left\lfloor n\sqrt{d}\right\rfloor$, potom z definice platí $\left\{n\sqrt{d}\right\} = n\sqrt{d} - a$. Rozšířením zlomku výrazem $n\sqrt{d} + a$ pak získáme

$$\left\{n\sqrt{d}\right\} = \frac{\left(n\sqrt{d} - a\right)\left(n\sqrt{d} + a\right)}{\left(n\sqrt{d} + a\right)} = \frac{n^2 d - a^2}{n\sqrt{d} + a}.$$

Dále použijeme odhad $a \leq n\sqrt{d}$, takže $n\sqrt{d} + a \leq 2n\sqrt{d}$, což nám v předchozím výrazu díky nezápornosti $n^2 d - a^2$ dá

$$\left\{n\sqrt{d}\right\} \geq \frac{n^2 d - a^2}{2n\sqrt{d}},$$

$$n\sqrt{d} \cdot \left\{n\sqrt{d}\right\} \geq \frac{n^2 d - a^2}{2}.$$

Levá strana je přesně výraz, který v úloze chceme odhadnout, takže pro vyřešení úlohy postačí nalézt d takové, že pro každé n bude platit $n^2d - a^2 \geq 5$, kde $a = \left\lfloor n\sqrt{d} \right\rfloor$.

Na stole leží 20 po sobě jdoucích čísel, takže každý zbytek modulo 20 bude zastoupen právě jednou. Nechť si Naty zvolí to d, které má zbytek 15 modulo 20, a ukažme, že tato volba docílí kýženého výsledku. Víme, že $a = \left\lfloor n\sqrt{d} \right\rfloor$ je nanejvýš $n\sqrt{d}$, takže kdyby $n^2d - a^2 \ngeq 5$, muselo by $n^2d - a^2$ být rovno jednomu z 0, 1, 2, 3 nebo 4. Postupně ukážeme, že žádná z těchto rovnic nemá pro $d \equiv 15 \pmod{20}$ řešení. Použijeme přitom kvadratické zbytky modulo 4 (ty jsou pouze 0 a 1) a modulo 5 (ty jsou 0, 1 a 4). Navíc naše volba $d \equiv 15 \pmod{20}$ přesně odpovídá dvojici vztahů $d \equiv 3 \pmod 4$ a $d \equiv 0 \pmod 5$. Rozebíráme tedy případy:

- $n^2d - a^2 = 0$. To by znamenalo, že n^2d je čtverec přirozeného čísla, takže i d je čtverec. Jenže $d \equiv 3 \pmod 4$, což není kvadratický zbytek. Tento případ tak nemůže nastat.
- $n^2d - a^2 = 1$. Potom $n^2d \equiv a^2 + 1 \pmod 4$. Bude-li n sudé, pak se z levé strany stane 0, takže $-1 \equiv 3$ by musel být kvadratický zbytek, což není. Takže n je liché, pak $n^2 \equiv 1$ a získáme $a^2 + 1 \equiv d \equiv 3 \pmod 4$. To ale znamená $a^2 \equiv 2 \pmod 4$, což opět není kvadratický zbytek, takže tento případ nemůže nastat.
- $n^2d - a^2 = 2$. Máme $d \equiv 0 \pmod 5$, takže potom $a^2 \equiv -2 \equiv 3 \pmod 5$, což ale není kvadratický zbytek. Tento případ tak nemůže nastat.
- $n^2d - a^2 = 3$. Opět modulo 5 získáme $a^2 \equiv -3 \equiv 2 \pmod 5$, což není kvadratický zbytek. Tento případ tak nemůže nastat.
- $n^2d - a^2 = 4$. Pro liché n bychom modulo 4 získali $a^2 \equiv n^2d \equiv d \equiv 3 \pmod 4$, což nelze, takže n je sudé. Jenže pak musí i a být sudé. Zapíšeme tedy $n = 2m$, $a = 2b$, čímž získáme

  $$\begin{aligned} 4m^2d - 4b^2 &= 4, \\ m^2d - b^2 &= 1, \end{aligned}$$

  což je až na přejmenování proměnných případ $n^2d - a^2 = 1$, který jsme už vyloučili. Takže ani toto nemůže nastat.

Dohromady tedy bude muset být $n^2d - a^2 \geq 5$, což jsme přesně chtěli dokázat.

Poznámky:

Úloha byla těžká, vyžadovala několik v podstatě nezávislých myšlenek: vhodně odhadnout desetinnou část odmocniny, vyloučit malé hodnoty $n^2d - a^2$ případ po případu pomocí kvadratických zbytků a v neposlední řadě správně zvolit d. Nepřišlo mnoho řešení, ale většina z nich postupovala podobným směrem jako vzorák. Řešitelé občas použili o něco méně elegantní odhady, avšak i s ošklivějšími vzniknuvšími nerovnostmi se úspěšně popasovali.

Lze si také povšimnout, že modulo 4 vyloučí i případ $n^2d - a^2 = 5$, takže konstantu $\frac{5}{2}$ by šlo zvětšit na 3 a tvrzení úlohy by stále platilo. *(Matěj Doležálek)*