Matematická indukce 2

2. SERIÁLOVÁ SÉRIE — TERMÍN ODESLÁNÍ: 7. ÚNORA 2022

V úloze 2 vycházejte z Peanových axiomů a tvrzení dokázaných v seriálu. Ve zbylých úlohách nemusíte.

ÚLOHA 1. (5 BODŮ)

Ukažte, že pro všechna přirozená čísla $n, k \geq 1$ platí rovnost

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2)\cdots(r+k-1) = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{k+1}.$$

ÚLOHA 2. (5 BODŮ)

Definujme mocniny jako v druhém dílu seriálu pomocí

$$m^0 = 1, \qquad m^{n+1} = m^n m$$

pro $m, n \in \mathbb{N}_0$. Pomocí indukce dokažte pro $m, n, r \in \mathbb{N}_0$ vztahy

$$\begin{aligned} m^{n+r} &= m^n m^r, \\ m^{nr} &= (m^n)^r, \\ (mn)^r &= m^r n^r. \end{aligned}$$

ÚLOHA 3. (5 BODŮ)

Nechť jsou x_1, x_2 navzájem různé kořeny rovnice $x^2 + px - 1 = 0$, kde p je liché celé číslo. Dále pro $n \in \mathbb{N}_0$ označme

$$y_n = x_1^n + x_2^n.$$

Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ jsou y_n a y_{n+1} nesoudělná celá čísla.