

Metrické prostory 2

2. SERIÁLOVÁ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 2. ÚNORA 2026

ÚLOHA 1. (5 BODŮ)
V rovině \mathbb{R}^2 uvažujme metriku džunglové řeky ρ , která bodům $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ přiřadí vzdálenost $\rho(x, y) = |y_2 - x_2|$, pokud $x_1 = y_1$, nebo $\rho(x, y) = |x_2| + |y_1 - x_1| + |y_2|$, pokud $x_1 \neq y_1$. Rozhodněte, jestli je čtverec $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1\}$ v této metrice kompaktní.

ÚLOHA 2. (5 BODŮ)
Nechť (M, ρ) je úplný metrický prostor, $f : M \rightarrow M$ je zobrazení a α, β jsou nezáporná reálná čísla splňující $\alpha + \beta < 1$. Nechť pro každá $x, y \in M$ platí

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot \rho(x, f(x)) + \beta \cdot \rho(x, y).$$

Dokažte, že pak má f na M právě jeden pevný bod.

ÚLOHA 3. (5 BODŮ)
Nechť $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je zobrazení mající následující dvě vlastnosti:

(1) Pro každý trojúhelník¹ $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ je

$$f(\Delta) = \{f(x) \mid x \in \Delta\}$$

také trojúhelník, přičemž vrcholy Δ se zobrazí na vrcholy $f(\Delta)$ a strany Δ se zobrazí na strany $f(\Delta)$.

(2) Pro každý trojúhelník $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ mají Δ a $f(\Delta)$ stejný obsah.

Dokažte, že f je spojitě (vzhledem ke standardní eukleidovské metrice na \mathbb{R}^2).

¹Za trojúhelník považujeme i degenerovaný trojúhelník (tj. úsečku) a trojúhelníky bereme uzavřené, tedy včetně jejich stran, vrcholů i vnitřků.