Projektivní geometrie II

2. SERIÁLOVÁ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Mějme tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Předpokládejme, že v něm existuje bod X splňující $|\sphericalangle XAB| = |\sphericalangle XBC| = |\sphericalangle XCD| = |\sphericalangle XDA|$. Dokažte, že $ABCD$ je harmonický.

(Radek Olšák)

ŘEŠENÍ:
Promítněme vrcholy čtyřúhelníku skrz bod X, tím dostaneme nový čtyřúhelník $A'B'C'D'$. Díky rovnosti úhlů ze zadání víme $|\sphericalangle A'AB| = |\sphericalangle B'BC| = |\sphericalangle C'CD| = |\sphericalangle D'DA|$, takže tětivy $A'B$, $B'C$, $C'D$ a $D'A$ jsou stejně dlouhé, protože jim odpovídají stejné obvodové úhly. Všechny tětivy dokonce mají „stejný směr“. Tím myslíme, že koncový bod úsečky vždy umíme dostat otočením počátečního bodu o stejný úhel ve stejném směru okolo středu kružnice opsané $ABCD$. To ovšem znamená, že čtyřúhelníky $A'B'C'D'$ a $BCDA$ jsou shodné (jsou vůči sobě jenom otočené). Víme, že promítnutí zachovalo dvojpoměr[1], takže

$$(A, B, C, D) = (A', B', C', D') = (B, C, D, A).$$

Zároveň ale z prvního dílu seriálu víme $(A, B, C, D) = \frac{1}{(B,C,D,A)}$. Dostáváme $|(B, C, D, A)| = 1$ a jsme skoro hotovi. Stačí si jenom uvědomit, že $(B, C, B, A) = 1$, proto $(B, C, D, A) \neq 1$, tedy $(B, C, D, A) = -1$ a úloha je vyřešena.

POZNÁMKY:
Snad každý, kdo úlohu vyřešil, to dělal jinak. Nikdo ale úlohu neřešil stejně jako vzorové řešení (i když některá řešení využívala promítnutí skrz bod X), přestože je velmi jednoduché a elegantní.

(Josef Minařík)

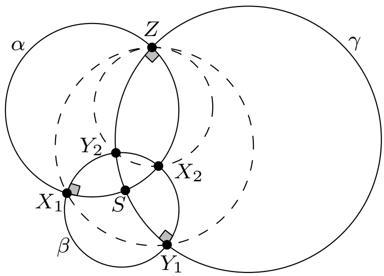
Úloha 2.

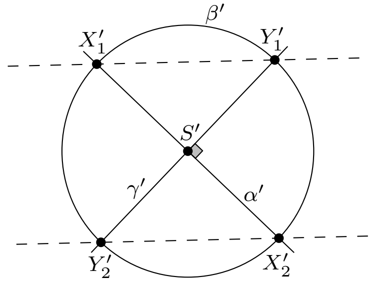
Mějme tři kružnice α, β, γ, z nichž každé dvě jsou na sebe kolmé. Nechť X_1, X_2 jsou průsečíky α, β, dále nechť Y_1, Y_2 jsou průsečíky β, γ. Nakonec budiž Z jeden z průsečíků α a γ. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům X_1Y_1Z a X_2Y_2Z se dotýkají v jednom bodě.

(Radek Olšák)

ŘEŠENÍ:
Chceme ukázat, že bod Z je jediný průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům X_1Y_1Z a X_2Y_2Z. Označme S druhý průsečík α a γ. Zinvertujeme úlohu podle středu Z. Všimneme si, že α i γ se zobrazí na přímky. Inverze zachovává kolmost kružímek, takže se nemůže β zobrazit na přímku, jinak by v rovině existovaly tři navzájem kolmé přímky.

[1] V seriálu jsme zjistili, že promítnutí je vlastně inverze „překlápějící“ kružnici, proto zachovává dvojpoměry.





Protože se zachovala kolmost kružímek, tak $\alpha' \perp \gamma'$. Zároveň víme, že přímka je kolmá na kružnici právě tehdy, když prochází jejím středem. Protože stejně tak $\beta' \perp \gamma'$ a $\beta' \perp \alpha'$, střed kružnice β' je S'. Celá úloha je nyní symetrická podle S'. Takže body X_1', X_2', Y_1' a Y_2' tvoří vrcholy čtverce. Přímky $X_1'Y_1'$ a $X_2'Y_2'$ jsou protější strany tohoto čtverce, takže mají jediný průsečík, tím je nevlastní bod Z'. Z toho plyne, že i před inverzí měly kružímky opsané X_1Y_1Z a X_2Y_2Z jediný průsečík. Takže kružnice opsané X_1Y_1Z a X_2Y_2Z se opravdu dotýkají v jednom bodě.

Poznámky:

Většina došlých řešení postupovalo stejně jako vzorové. Někteří zinvertovali úlohu podle S, což velmi podobným způsobem vede také k správnému řešení. *(Radek Olšák)*

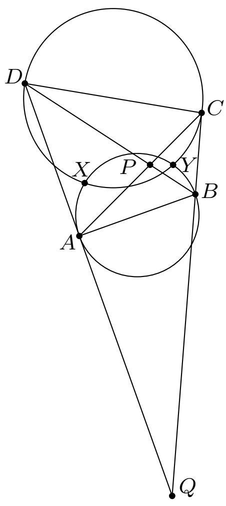
Úloha 3.

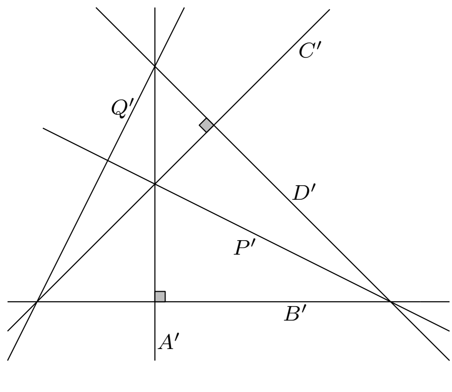
Mějme konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Předpokládejme, že kružnice nad průměry AB a DC se protínají v bodech X a Y. Označme P průsečík AC, BD a Q průsečík AD, BC. Dokažte, že P, Q, X, Y leží na jedné kružnici.

(Radek Olšák)

Řešení:

Na okamžik zapomeňme na bod Y a proveďme dualitu se středem v X. Pak díky Tvrzení o dualitě úhlů je $|\sphericalangle A'B'| = |\sphericalangle AB| = |\sphericalangle AXB| = 90^\circ$ a $|\sphericalangle C'D'| = |\sphericalangle CD| = |\sphericalangle CXD| = 90^\circ$.





Protože Q je průsečík AD a BC, je Q' spojnice průsečíku A' s D' s průsečíkem B' s C'. Protože $A' \perp B'$ a $C' \perp D'$, jsou A' a C' výšky v trojúhelníku tvořeném přímkami B', D' a Q'. To znamená, že průsečík A' s C' je ortocentrum v tomto trojúhelníku.

Bod P je průsečík přímek AC a BD, takže P' prochází průsečíkem A' s C' a průsečíkem B' s D'. To ale znamená, že je třetí výškou v trojúhelníku tvořeném B', D' a Q' čili $P' \perp Q'$.

Z toho plyne $90^\circ = |\sphericalangle P'Q'| = |\sphericalangle PQ| = |\sphericalangle PXQ|$. Takže X leží na kružnici nad průměrem PQ.

Analogicky dostaneme, že i Y leží na kružnici nad průměrem PQ, takže X, Y, P a Q skutečně leží na jedné kružnici.

Poznámky:

Většina řešení postupovala vzorově a byla správně. *(Rado van Švarc)*