Matematická indukce 2

2. seriálová série | Vzorové řešení

Úloha 1.

Ukažte, že pro všechna přirozená čísla $n, k \geq 1$ platí rovnost

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2)\cdots(r+k-1) = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{k+1}.$$

(Kateřina Panešová)

Řešení indukcí:
Budeme indukovat podle n. Nejprve ověříme platnost pro všechny dvojice $(n,k) = (1,k)$. Dosadíme tedy $n = 1$ do levé strany zadání

$$\sum_{r=1}^{1} r(r+1)(r+2)\cdots(r+k-1) = k! = \frac{k!(k+1)}{k+1} = \frac{(k+1)!}{k+1}.$$

Tudíž pro každou dvojici $(n,k) = (1,k)$ tvrzení platí. Nyní budeme postupovat indukcí, tedy jako indukční předpoklad máme

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{(r+k-1)!}{(r-1)!} = \frac{(n+k)!}{(n-1)!(k+1)}.$$

Budeme postupně upravovat levou stranu zadání pro $n+1$. V druhé rovnosti použijeme indukční předpoklad, čímž získáme

$$\sum_{r=1}^{n+1} \frac{(r+k-1)!}{(r-1)!} = \frac{n+k!}{n!} + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(r+k-1)!}{(r-1)!} = \frac{(n+k)!}{n!} + \frac{(n+k)!}{(n-1)!\cdot(k+1)} =$$
$$= \frac{(k+1)\cdot(n+k)! + n\cdot(n+k)!}{n!\cdot(k+1)} = \frac{(n+k)!\cdot(k+1+n)}{n!\cdot(k+1)} = \frac{(n+k+1)!}{n!\cdot(k+1)}.$$

To je přesně levá strana pro $n+1$, tedy tvrzení je dokázáno.

Řešení kombinatorickým nepočítáním:
Dokazovaný výraz vydělíme $k!$ a přepíšeme si ho do kombinačních čísel. Po úpravě chceme dokázat

$$\sum_{r=1}^{n} \binom{r+k-1}{k} = \binom{n+k}{k+1}.$$

Pravá strana z definice počítá, jak vybrat $n+1$ míčků z řady $n+k$ míčků. Levá strana počítá totéž vyzkoušením všech n možností výběru míčku, který bude mezi vybranými nejvíc vpravo. Ten bude $r+k$-tý pro nějaké r od 1 do n, protože se před něj ještě musí vejít k míčků. Ze všech $(r+k-1)$ míčků před ním pak potřebujeme dovybrat zbylých k. Oba výrazy se tedy rovnají.

Řešení diskrétním kalkulem[1]:
V diskrétním kalkulu si definujeme *rostoucí mocninu* pomocí $x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)(x+n-1)$. Ta se v diskrétním kalkulu chová podobně jako standardní mocnina ve standardním kalkulu, tedy $\Delta x^{\overline{n}} = nx^{\overline{n-1}}$. Úloha po nás chce spočítat

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2)\cdots(r+k-1) = \sum_{r=1}^{n} r^{\overline{k}}.$$

V diskrétním kalkulu má suma roli integrálu, tedy podobně jako ve standardním kalkulu počítáme integrál jako inverz derivace, můžeme v diskrétním kalkulu sumu spočítat jako inverz diference. Takže

$$\sum_{r=1}^{n} r^{\overline{k}} = \frac{n^{\overline{k+1}}}{k+1},$$

což jsme přesně chtěli dokázat.

Poznámky:
Indukci, podobně jako v prvním vzorovém řešení, využila většina řešitelů. Jejich řešení byla převážně správná. Někteří si však neuvědomili, že indukci stačilo provést podle n a snažili se ji provádět i podle k. *(Radek Olšák)*

Úloha 2.

Definujme mocniny jako v druhém dílu seriálu pomocí

$$m^0 = 1, \qquad m^{n+1} = m^n m$$

pro $m, n \in \mathbb{N}_0$. Pomocí indukce dokažte pro $m, n, r \in \mathbb{N}_0$ vztahy

$$\begin{aligned} m^{n+r} &= m^n m^r, \\ m^{nr} &= (m^n)^r, \\ (mn)^r &= m^r n^r. \end{aligned}$$

(Kateřina Panešová)

Řešení:
Nejprve si připomeňme definice sčítání, násobení a mocnění, které plynou z věty o rekurzi dokázané v seriálu:

$$\begin{aligned} &(\alpha 1) \quad m + 0 = m, && (\alpha 2) \quad m + (n+1) = (m+n) + 1, \\ &(\mu 1) \quad m0 = 0, && (\mu 2) \quad m(n+1) = mn + m, \\ &(\pi 1) \quad m^0 = 1, && (\pi 2) \quad m^{n+1} = m^n m. \end{aligned}$$

Kromě těchto definic budeme používat také vztahy

$$\begin{aligned} &(a) \quad 0 + m = m, \\ &(b) \quad 1 + m = m + 1, \\ &(c) \quad 0m = 0, \\ &(d) \quad 1m = m, \end{aligned}$$

které jsme také dokázali v seriálu.

[1] O diskrétním kalkulu se lze více dozvědět třeba v těchto sborníkových příspěvcích:
https://prase.cz/library/DiskretnyKalkulusMSz/DiskretnyKalkulusMSz.pdf,
https://prase.cz/library/iKS-KombiIdentityJL/iKS-KombiIdentityJL.pdf.

Nyní už se můžeme vrhnout na důkaz rovnosti $m^{n+r} = m^n m^r$. Použijeme indukci podle r. Nechť

$$S = \{r \in \mathbb{N}_0;\ m^{n+r} = m^n m^r \text{ pro všechna } m, n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Ověřme, že nula patří do S. Platí

$$\begin{aligned}
m^{n+0} &= m^n && \text{podle } (\alpha 1)\\
&= 0 + m^n && \text{podle } (a)\\
&= m^n \cdot 0 + m^n && \text{podle } (\mu 1)\\
&= m^n(0+1) && \text{podle } (\mu 2)\\
&= m^n \cdot 1 && \text{podle } (a)\\
&= m^n m^0 && \text{podle } (\pi 1),
\end{aligned}$$

takže $0 \in S$. Nyní předpokládejme, že $r \in S$. Potom

$$\begin{aligned}
m^{n+(r+1)} &= m^{(n+r)+1} && \text{podle } (\alpha 2)\\
&= m^{n+r} m && \text{podle } (\pi 2)\\
&= (m^n m^r) m && \text{podle indukčního předpokladu}\\
&= m^n (m^r m) && \text{podle } \textbf{asociativity násobení}\\
&= m^n m^{r+1} && \text{podle } (\pi 2),
\end{aligned}$$

a proto i $(r+1) \in S$. Z třetího Peanova axiomu potom plyne, že $S = \mathbb{N}_0$, což jsme chtěli ukázat.

Dále chceme ukázat rovnost $m^{nr} = (m^n)^r$. Opět použijeme indukci podle r. Definujme

$$S = \{r \in \mathbb{N}_0;\ m^{nr} = (m^n)^r \text{ pro všechna } m, n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Pro $r = 0$ platí

$$\begin{aligned}
m^{n0} &= m^0 && \text{podle } (\mu 1)\\
&= 1 && \text{podle } (\pi 1)\\
&= (m^n)^0 && \text{podle } (\pi 1),
\end{aligned}$$

a tedy $0 \in S$. Nyní předpokládejme, že r je v S. Potom pro $r+1$ platí

$$\begin{aligned}
m^{n(r+1)} &= m^{nr+n} && \text{podle } (\mu 2)\\
&= m^{nr} m^n && \text{podle první dokázané rovnosti}\\
&= (m^n)^r m^n && \text{podle indukčního předpokladu}\\
&= (m^n)^{r+1} && \text{podle } (\pi 2),
\end{aligned}$$

takže $(r+1) \in S$. Z třetího Peanova axiomu máme $S = \mathbb{N}_0$, tj. rovnost platí pro všechna přirozená čísla.

Pojďme nyní dokázat třetí rovnost, a sice $(mn)^r = m^r n^r$, indukcí podle r. Buď

$$S = \{r \in \mathbb{N}_0;\ (mn)^r = m^r n^r \text{ pro všechna } m, n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Nejprve si všimněme, že

$$\begin{aligned}
(mn)^0 &= 1 && \text{podle } (\pi 1)\\
&= 1 \cdot 1 && \text{podle } (d)\\
&= m^0 n^0 && \text{podle } (\pi 1),
\end{aligned}$$

z čehož $0 \in S$. Pokud $r \in S$, tak platí

$$\begin{aligned}
(mn)^{r+1} &= (mn)^r(mn) && \text{podle } (\pi 2)\\
&= (m^r n^r)(mn) && \text{podle indukčního předpokladu}\\
&= (m^r n^r)(nm) && \text{podle komutativity násobení}\\
&= m^r(n^r(nm)) && \text{podle asociativity násobení}\\
&= m^r((n^r n)m) && \text{podle asociativity násobení}\\
&= m^r(m(n^r n)) && \text{podle komutativity násobení}\\
&= (m^r m)(n^r n) && \text{podle asociativity násobení}\\
&= m^{r+1}n^{r+1} && \text{podle } (\pi 2),
\end{aligned}$$

a proto i $(r+1)$ náleží S. Potom třetí Peanův axiom říká, že $S = \mathbb{N}_0$ neboli že rovnost platí pro všechna přirozená čísla r, což jsme chtěli ukázat.

Poznámky:
Ve vzorovém řešení jsem používala vždy co nejnižší možný předpoklad: například raději použiji vztah, který vyplývá z definice, než vztah dokázaný později v seriálu, pokud je to jen trochu možné. Takto je dobře vidět, že důkaz určité vlastnosti třeba závisí na asociativitě, ale už není potřeba komutativita, i když bychom ji samozřejmě do důkazu uměli nějak „nacpat“. Ve Tvém řešení však plně stačí, když použiješ jakékoli tvrzení již dokázané v seriálu.

Řešitelé často zapomínali zdůvodnit, co z čeho vyplývá. Protože smyslem úlohy bylo napsat opravdu formální důkaz jako v seriálu, byla jsem na tohle spíše přísná. Nejčastější chybou bylo nezmínění využití asociativity v první rovnosti, proto jsem ji ve vzoráku vyznačila tučně. Celkově mám z došlých řešení radost, většina byla velmi pěkná a dobře používala tvrzení již dokázaná v seriálu. *(Kateřina Panešová)*

Úloha 3.

Nechť jsou x_1, x_2 navzájem různé kořeny rovnice $x^2 + px - 1 = 0$, kde p je liché celé číslo. Dále pro $n \in \mathbb{N}_0$ označme

$$y_n = x_1^n + x_2^n.$$

Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ jsou y_n a y_{n+1} nesoudělná celá čísla. *(Kateřina Panešová)*

Řešení:
Z Viètových vztahů dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -p,\\ x_1 \cdot x_2 &= -1. \end{aligned}$$

Podíváme-li se na hodnoty y_0 a y_1, máme

$$\begin{aligned} y_0 &= x_1^0 + x_2^0 = 2,\\ y_1 &= x_1^1 + x_2^1 = -p. \end{aligned}$$

Všimněme si, že pro $n \geq 2$ platí

$$y_n = x_1^n + x_2^n = (x_1 + x_2)\left(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}\right) - x_1x_2\left(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}\right) = -py_{n-1} + y_{n-2},$$

čímž jsme získali rekurentní vzorec pro y_n. Použitím indukce teď nejprve dokážeme, že všechna y_n jsou celá:

(1) y_0 i y_1 jsou celá, protože $y_0 = 2$ a $y_1 = -p$, což je ze zadání celé.
(2) Předpokládáme, že y_{n-2} i y_{n-1} jsou celá. Vzhledem k rekurentnímu vzorci pro y_n a tomu, že součet i součin celých čísel je stále celým číslem, je i y_n celým číslem.

Indukcí vyřešíme i nesoudělnost po sobě jdoucích y_n:

(1) y_0 i y_1 jsou nesoudělná, protože $y_0 = 2$ a $y_1 = -p$, což je liché, protože p je ze zadání liché. Liché číslo ale z definice není násobkem 2, což je jediný dělitel y_0 větší než 1.

(2) Předpokládáme, že y_{n-2} a y_{n-1} jsou nesoudělná. Pro spor dál předpokládejme, že existuje dělitel d čísel y_{n-1} a y_n různý od 1. Z rekurentního vzorce pro y_n víme, že d je zároveň i dělitelem $-py_{n-1} + y_{n-2}$. Vzhledem k tomu, že d je dělitelem y_{n-1}, tak je i dělitelem $-py_{n-1}$. To ale znamená, že d je dělitelem y_{n-2}, jinak by d nemohlo být zároveň dělitel $-py_{n-1} + y_{n-2}$ a $-py_{n-1}$. To je ale v rozporu s předpokladem, že y_{n-2} a y_{n-1} jsou nesoudělná.

Poznámky:

Na vztahy odvozené v řešení pomocí Viètových vztahů jde samozřejmě přijít i přes vyjádření kořenů x_1 a x_2 zadané kvadratické rovnice. Použitím zmíněných vztahů si ale ušetříme dost práce.

Rekurentní vzorec pro y_n šel odvodit mnoha způsoby, většina z nich byla podobná tomu ve vzorovém řešení, tedy spočívaly přibližně ve všimnutí si, že součin $(x_1 + x_2)\left(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}\right)$ je skoro to, co chceme, a pak se od něj jen odečetlo to, co přebývalo.

Většina řešení, co nalezla rekurentní vzorec pro y_n, správně zdůvodnila i nesoudělnost po sobě jdoucích y_n. Někteří se opírali o princip použitý v Euklidově algoritmu. Skutečně by tu měl být použitý pouze princip z něj a ne on samotný, protože mimo jiné není zaručeno, že $y_{n-2} > y_{n-1}$. Platí ale zmíněný princip $\mathrm{NSD}\,(x, y) = \mathrm{NSD}\,(x, y - x)$.

Mnoho řešení opomnělo zmínit, proč jsou y_n jsou celočíselná. Body jsem za to nestrhával těm, co přišli na rekurentní vzorec pro y_n, protože z něj to lze nahlédnout, ale šla by navrhnout podobná úloha, kde by celočíselnost nebyla samozřejmostí. *(Martin Hubata)*