# Metrické prostory 2

2. seriálová série — Vzorové řešení

## Úloha 1.

*V rovině $\mathbb{R}^2$ uvažujme metriku džunglové řeky $\rho$, která bodům $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ přiřadí vzdálenost $\rho(x, y) = |y_2 - x_2|$, pokud $x_1 = y_1$, nebo $\rho(x, y) = |x_2| + |y_1 - x_1| + |y_2|$, pokud $x_1 \neq y_1$. Rozhodněte, jestli je čtverec $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1\}$ v této metrice kompaktní.*

Řešení:
Ukážeme, že čtverec $C$ není kompaktní v metrice džunglové řeky. Vezměme si posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}, 1\right)$. Všimneme si, že libovolné dva prvky posloupnosti jsou od sebe vzdáleny alespoň[1] 2, protože žádné dva prvky posloupnosti nemají stejnou první souřadnici. Taková posloupnost ale nemůže mít konvergentní podposloupnost – konvergentní podposloupnost by musela být cauchyovská, ale to je v přímém sporu s tím, že jsou libovolné dva její body od sebe vzdáleny alespoň 2. Tudíž tento čtverec není kompaktní.

Poznámky:
Pro představu (uvedli jsme ji již v prvním dílu seriálu), v metrice džunglové řeky je nejkratší cesta vždy dojít po kolmici k řece (přímka $y = 0$), přepravit se po ní do paty kolmice z druhého bodu, a poté se vydat zase od ní ve směru $y$. Toto způsobuje, že body, které by „měly být blízko“, jsou v této metrice velmi daleko. Vzniklý metrický prostor je tedy velmi velký a tam také vzniká problém s kompaktností. To, co jsme v řešení dokázali, vlastně přímo znamená, že prostor není „totálně omezený“ (pojem definovaný ve třetím dílu seriálu), což je nutná podmínka pro kompaktnost. Druhá podmínka, úplnost, je naopak splněna, tedy v jistém smyslu jediný důvod proč tento prostor není kompaktní je, že je příliš velký. *(Vít Hanika)*

## Úloha 2.

*Nechť $(M, \rho)$ je úplný metrický prostor, $f : M \to M$ je zobrazení a $\alpha, \beta$ jsou nezáporná reálná čísla splňující $\alpha + \beta < 1$. Nechť pro každá $x, y \in M$ platí*

$$\rho(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot \rho(x, f(x)) + \beta \cdot \rho(x, y).$$

*Dokažte, že pak má $f$ na $M$ právě jeden pevný bod.*

Řešení:
Všimněme si, že $\beta < 1$ a $\alpha < 1$.

Nejprve ukážeme, že posloupnost $x_{n+1} = f(x_n)$ je Cauchyovská, takže má limitu. Dosazením $x = x_n$ a $y = x_{n+1}$ získáme:

$$\rho(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \alpha\rho(x_n, x_{n+1}) + \beta\rho(x_n, x_{n+1}) = (\alpha + \beta)\rho(x_n, x_{n+1}).$$

[1] Tato konstrukce rozhodně není jediná, místo posloupnosti $1 - \frac{1}{n}$ bychom mohli zvolit libovolnou posloupnost různých celých čísel z intervalu $[-1, 1]$ a stále od sebe budou velmi daleko.

Protože $\alpha + \beta < 1$, můžeme použít stejný postup jako v důkazu Banachovy věty o pevném bodě, čímž získáme, že posloupnost $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ je Cauchyovská. Označme její limitu $L$. Abychom ukázali, že $f(L) = L$, dosadíme do nerovnosti ze zadání $x = x_n$ a $y = L$:

$$\rho(x_{n+1}, f(L)) \leq \alpha\rho(x_n, x_{n+1}) + \beta\rho(x_n, L).$$

Protože máme $\lim x_n = L$, tak $\rho(x_n, x_{n+1}) \to 0$ a $\rho(x_n, L) \to 0$, takže $\rho(x_{n+1}, f(L)) \to 0$, a tedy i $f(L) = \lim x_{n+1} = L$, což jsme chtěli.

Pro jednoznačnost nyní jen dosaďme $x = L$ a libovolné $y \neq L$ a máme:

$$\rho(L, f(y)) \leq \alpha\rho(L, L) + \beta\rho(L, y) = \beta\rho(L, y) < \rho(L, y),$$

kde jsme využili $\beta < 1$ a $\rho(L, y) > 0$. Pokud by platilo $f(y) = y$, muselo by být $\rho(L, f(y)) = \rho(L, y)$, takže $f(y) \neq y$.

Poznámky:
Většina správných řešení postupovala stejně. V těch neúplných řešitelé většinou zapomněli, že nevíme, jestli je funkce $f$ spojitá, a nemůžeme tedy použít pro ověření $f(L) = L$ prohození limity v posloupnosti $\lim f(x_n) = f(\lim x_n)$. Někteří řešitelé se snažili ukázat, že $f$ musí být kontrakce, což však není pravda, i když najít protipříklad zabere chvíli hraní si s kontrakcí, kde se jeden bod zobrazí nespojitě.

*(Patrik Štencel)*

## Úloha 3.

*Nechť $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení mající následující dvě vlastnosti:*

(1) *Pro každý trojúhelník*[2] *$\Delta \subset \mathbb{R}^2$ je*

$$f(\Delta) = \{f(x) \mid x \in \Delta\}$$

*také trojúhelník, přičemž vrcholy $\Delta$ se zobrazí na vrcholy $f(\Delta)$ a strany $\Delta$ se zobrazí na strany $f(\Delta)$.*

(2) *Pro každý trojúhelník $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ mají $\Delta$ a $f(\Delta)$ stejný obsah.*

*Dokažte, že $f$ je spojité (vzhledem ke standardní eukleidovské metrice na $\mathbb{R}^2$).*

Řešení:
Provedeme nejdříve několik geometrických pozorování.

*(I) Zobrazení $f$ je prosté.*

Nechť jsou $X$ a $Y$ různé body. Zvolme bod $A$ mimo přímku $XY$. Pak $AXY$ je trojúhelník s kladným obsahem, takže i trojúhelník s vrcholy $f(A)$, $f(X)$, $f(Y)$ má dle (2) kladný obsah. Z toho ale plyne, že $f(X) \neq f(Y)$, jinak by byl trojúhelník $f(A)f(X)f(Y)$ degenerovaný s nulovým obsahem. Tedy $f$ je prosté.

*(II) Zobrazení $f$ zobrazuje kolineární body na kolineární body.*

Pokud jsou $A$, $B$, $C$ různé body ležící na jedné přímce, pak trojúhelník $ABC$ je degenerovaný, takže má nulový obsah. Díky vlastnosti (2) to znamená, že i trojúhelník s vrcholy $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ má nulový obsah, takže je degenerovaný. To nastane jedině tehdy, když $f(A)$, $f(B)$ a $f(C)$ leží na jedné přímce (z prostoty z *(I)* jsou navíc tyto body po dvou různé).

[2] Za trojúhelník považujeme i degenerovaný trojúhelník (tj. úsečku) a trojúhelníky bereme uzavřené, tedy včetně jejich stran, vrcholů i vnitřků.

*(III) Nechť $ABC$ je nedegenerovaný trojúhelník a $T$ je jeho těžiště. Pak $f(T)$ je těžištěm trojúhelníku $f(A)f(B)f(C)$.*

Těžiště je charakterizováno vlastností, že je to ten jediný bod, pro který jsou obsahy trojúhelníků $ABT$, $BCT$ a $CAT$ stejné a rovny třetině obsahu $ABC$. Tedy pokud $T$ je těžištěm trojúhelníku $ABC$, pak se obsahy trojúhelníků $ABT$, $BCT$ a $CAT$ rovnají, tedy dle vlastnosti (2) se i obsahy trojúhelníků $f(A)f(B)f(T)$, $f(B)f(C)f(T)$ a $f(C)f(A)f(T)$ rovnají, a tudíž musí $f(T)$ být těžištěm trojúhelníku $f(A)f(B)f(C)$.

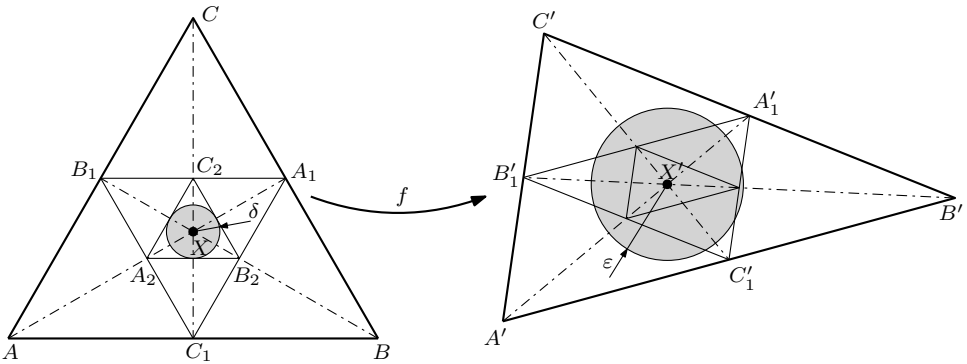
*(IV) Nechť $S$ je středem úsečky $AB$. Pak $f(S)$ je středem úsečky $f(A)f(B)$.*

Zvolme bod $C$ mimo přímku $AB$. Pak $ABC$ je nedegenerovaný trojúhelník, označme jeho těžiště jako $T$. Dle *(II)* leží $f(S)$ na přímce $f(A)f(B)$. Zároveň dle *(II)* leží $f(S)$ na přímce $f(C)f(T)$, neboť střed $S$ leží na těžnici dané body $C$, $T$. Podle *(III)* je však $f(T)$ těžištěm trojúhelníku $f(A)f(B)f(C)$, takže přímka $f(C)f(T)$ definuje těžnici v tomto trojúhelníku. Protože $f(S)$ leží zároveň na těžnici $f(C)f(T)$ a na přímce $f(A)f(B)$, musí již být $f(S)$ středem úsečky $f(A)f(B)$.

Spojitost $f$ nyní dokážeme přímo z definice. Nechť je bod roviny $X$ libovolný, stejně tak buď $\varepsilon > 0$ libovolné. Ukážeme, že dostatečně malé okolí bodu $X$ se zobrazuje nanejvýš $\varepsilon$ daleko od bodu $X' = f(X)$.

Zvolme nedegenerovaný trojúhelník $ABC$ tak, aby $X$ bylo jeho těžištěm – pro jednoduchost buď třeba $ABC$ rovnostranný. Označme $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$. Dle *(III)* je $X'$ těžištěm trojúhelníku $A'B'C'$.

Nyní budeme postupně konstruovat menší trojúhelníky ze středních příček. V prvním kroku buď $A_1$ středem $BC$, $B_1$ středem $CA$ a $C_1$ středem $AB$. Podle *(IV)* jsou pak body $A_1' = f(A_1)$, $B_1' = f(B_1)$ a $C_1' = f(C_1)$ středy příslušných stran v trojúhelníku $A'B'C'$. Proto trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_1'B_1'C_1'$ jsou tvořeny středními příčkami původních trojúhelníků $ABC$, respektive $A'B'C'$. Přitom příčkový trojúhelníček $A_1B_1C_1$ má za těžiště opět bod $X$, stejně tak $A_1'B_1'C_1'$ má za těžiště bod $X'$, neboť je tvořen příčkami trojúhelníku $A'B'C'$ s těžištěm $X'$.




Obecněji můžeme vytvořit posloupnost zmenšujících se příčkových trojúhelníčků $(A_nB_nC_n)_{n=1}^{\infty}$ a odpovídajících trojúhelníčků $(A_n'B_n'C_n')_{n=1}^{\infty}$ takových, že jednak platí $A_n' = f(A_n)$, $B_n' = f(B_n)$, $C_n' = f(C_n)$, jednak $A_n$, $B_n$ a $C_n$ jsou středy stran $B_{n-1}C_{n-1}$, $C_{n-1}A_{n-1}$, $A_{n-1}B_{n-1}$ (a stejně tak pro očárkované body), a navíc $X$ je vždy těžištěm $A_nB_nC_n$ a $X'$ těžištěm $A_n'B_n'C_n'$.

Označme $|A'X'| = a$, $|B'X'| = b$ a $|C'X'| = c$. Těžiště půlí každou těžnici v poměru $2:1$, kde delší strana je ohraničena vrcholem trojúhelníku. To například znamená, že

$$|A_1'X'| = \frac{1}{2}|A'X'| = \frac{a}{2}, \qquad |A_2'X'| = \frac{1}{2}|A_1'X'| = \frac{a}{4},$$

obecně $|A'_n X'| = a/2^n$, a stejně tak $|B'_n X'| = b/2^n$ a $|C'_n X'| = c/2^n$. Pro dostatečně velké $k$ lze tak zajistit, aby byly všechny tři délky $|A'_k X'|$, $|B'_k X'|$ a $|C'_k X'|$ menší než $\varepsilon$. V takovou chvíli je trojúhelník $A'_k B'_k C'_k$ celý uvnitř kruhu $U_\varepsilon(X')$.

To znamená, že body uvnitř trojúhelníku $A_k B_k C_k$ (v obrázku $k = 2$) se všechny zobrazují do $A'_k B'_k C'_k \subset U_\varepsilon(X')$, neboť ze zadání předpokládáme, že $f$ zobrazuje vnitřky trojúhelníků na vnitřky obrazů. Zároveň $X$ jakožto těžiště leží uvnitř $A_k B_k C_k$. Tedy lze (třeba z definice vnitřku, nebo pomocí kružnice vepsané) zvolit $\delta > 0$ takové, že kruh $U_\delta(X)$ je celý obsažen v trojúhelníku $A_k B_k C_k$. V takovou chvíli pro libovolný bod $Y \in U_\delta(X)$ platí, že $f(Y)$ je od $X' = f(X)$ vzdálen méně než $\varepsilon$, což je přesně požadavek spojitosti $f$.

Poznámky:
Myslím, že úloha byla obtížná hlavně svou otevřeností bez jasného začátku, od kterého se odpíchnout. To se projevilo i v přijatých řešeních, kde se vesměs každé řešení pokoušelo úlohu vyřešit jiným způsobem, přičemž se ukázaly být schůdné jak syntetické, tak analytické postupy. Mezi analytickými řešeními stojí za zmínku použití barycentrických souřadnic vůči pevnému trojúhelníku, které mají vzhledem k zobrazení $f$ velmi pěkné vlastnosti. *(Matěj „Pan G“ Gajdoš)*