

# Porovnávání

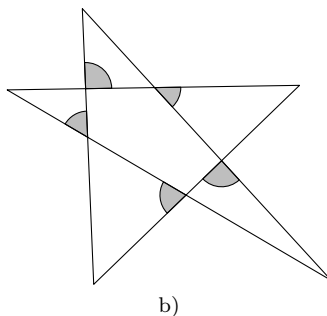
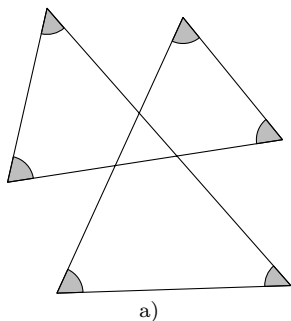
2. PODZIMNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 8. LISTOPADU 2021

ÚLOHA 1.

(3 BODY)

Rozhodněte a zdůvodněte, zda je součet vyznačených úhlů větší v obrázku a), či v obrázku b).



ÚLOHA 2.

(3 BODY)

Nechť  $n \geq 2$  je přirozené číslo. Porovnejte  $\sqrt{n}$  a

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}.$$

ÚLOHA 3.

(3 BODY)

Pravoúhlý trojúhelník má přeponu délky  $c$  a poloměr kružnice vepsané  $r$ . Dokažte, že  $c > 4r$ .

ÚLOHA 4.

(5 BODŮ)

V pravoúhlém trojúhelníku  $ABC$  je  $M$  střed přepony  $AB$ . Zvolíme bod  $P$  na úsečce  $AM$  a bod  $Q$  na úsečce  $MB$  tak, že  $|PQ| = |CQ|$ . Dokažte, že platí  $|AP| \leq 2 \cdot |MQ|$ .

ÚLOHA 5.

(5 BODŮ)

Je dáno přirozené číslo  $m$  a taková  $k$ -tice přirozených čísel  $a_1, a_2, \dots, a_k$  nepřevyšujících  $m$ , že každé z čísel  $1, 2, \dots, m$  je dělitelné nanejvýš jedním  $a_i$  pro  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Dokažte, že platí

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} \leq \frac{3}{2}.$$

ÚLOHA 6.

(5 BODŮ)

PraSestán je tvořen tabulkou s  $m \times n$  políčky, na každém z nich se pase nějaké množství prasat. *Pohraničím* obdélníkové oblasti  $O$  tvořené políčky tabulky rozumíme množinu těch políček, která neleží v  $O$ , ale která s některým políčkem v  $O$  sousedí stranou. Obdélníková oblast  $O$  je *bohatá*, pokud se na každém políčku v  $O$  pase více prasat než na každém políčku v pohraničí  $O$ , které s ním sdílí sloupec či řádek (nemusí však nutně sousedit). Kolik nejvíce bohatých obdélníkových oblastí se může v PraSestánu nacházet, pokud smíme libovolně upravit počty prasat na jednotlivých políčkách?

Například v následující tabulce s počty prasat jsou bohatými právě všechny zvýrazněné obdélníkové oblasti (včetně celého PraSestánu):

5	2	6
4	11	8
1	13	7

ÚLOHA 7.

(5 BODŮ)

Jsou dána kladná reálná čísla  $a, b, c, d$  splňující nerovnosti  $a, c > 1$  a  $b, d < 1$ . Dokažte, že platí

$$\frac{a}{ab + c + 1} + \frac{b}{bc + d + 1} + \frac{c}{cd + a + 1} + \frac{d}{da + b + 1} > 1.$$

ÚLOHA 8.

(5 BODŮ)

U kulatého stolu je na židlích rozesazeno  $n$  reálných čísel. Židli  $z$  nazveme *dobrou*, pokud má nějaká skupinka po sobě jdoucích židlí začínající od  $z$  a pokračující po směru hodinových ručiček nezáporný součet svých čísel. Dokažte, že součet čísel na dobrých židlích je nezáporný.