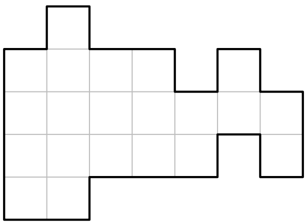
Dělení

2. podzimní série — Termín odeslání: 13. listopadu 2023

Říkáme, že celé číslo x je dělitelem celého čísla y, pokud existuje celé číslo z takové, že $y = xz$. Tuto skutečnost značíme $x \mid y$.

Úloha 1. (3 body)

Káťa a Pepa si koupili křivolakou tabulku čokolády složenou z malých čtverečků jako na obrázku níže, kterou si chtěli co nejférověji rozdělit. Než to však stihli učinit, přišel Matěj a jeden čtvereček jim z tabulky snědl. Který čtvereček mohl sníst, aby si posléze Káťa a Pepa dovedli zbytek tabulky rozdělit na dva shodné útvary? Čokoládu je povoleno dělit pouze řezy podél hran čtverečků.



Úloha 2. (3 body)

Dokažte, že pokud pro celá čísla a, b platí $2024^2 - 1 \mid 2023a + 2025b$, potom též $2024^2 - 1 \mid a \cdot b$.

Úloha 3. (3 body)

Ukažte, že mezi libovolnými 39 po sobě jdoucími přirozenými čísly se vždy nachází alespoň jedno, jehož ciferný součet je dělitelný 11.

Úloha 4. (5 bodů)

Fíla vzal své oblíbené přirozené číslo n a následně na tabuli pro každé z přirozených čísel $n + 1$ až $2n$ napsal jeho největšího lichého dělitele. Určete součet všech čísel na tabuli.

Úloha 5. (5 bodů)

PraSestán má tvar čtverce, který je $n - 1$ svislými a $n - 1$ vodorovnými přímkami rozdělen na n^2 obdélníkových provincí. Řekneme, že provincie A *se vejde* do provincie B, pokud lze B otočit o celočíselný násobek $90°$ a přesunout tak, aby zakryla celou A. Dokažte, že můžeme vybrat $2n$ provincií tak, aby se pro libovolné dvě z nich jedna vešla do druhé.

Úloha 6. (5 bodů)

Je dáno prvočíslo p. Najděte všechny p-tice $(a_1, a_2, \dots, a_p)$ celých čísel takové, že pro každé přirozené číslo n platí

$$p \mid a_1^n + a_2^n + \cdots + a_p^n.$$

Úloha 7. (5 bodů)

Matouš si ve slevě pořídil čtvercovou tabulku 13×13 a všiml si, že $13^2 = 12^2 + 5^2$. Tabulku chce proto rozřezat na několik dílů a následně z nich sestavit dvě nové tabulky o rozměrech 12×12 a 5×5. Řezy lze vézt pouze po hranách políček tabulky (ne nutně však jedním rovným řezem) a vzniklé díly je povoleno otáčet i překlápět. Na kolik nejméně dílů musí Matouš tabulku rozdělit, aby z nich skutečně dovedl sestavit dvě nové tabulky 12×12 a 5×5?

Úloha 8. (5 bodů)

Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla n, k platí

$$(n!)^{1+n+n^2+\cdots+n^{k-1}} \;\Big|\; (n^k)!.$$