Povídání k druhé podzimní sérii

V tomto textu se dozvíš něco málo o posloupnostech. Nejprve si povíme, co to vlastně posloupnost je a zmíníme některé ze způsobů, jak ji lze zadat. Potom se zaměříme na dva významné typy posloupností.

Co je to posloupnost?

Posloupností rozumíme několik (klidně i nekonečně mnoho) ne nutně různých reálných čísel[1], která jsou zadána v určitém pořadí. Členy konečné posloupnosti značíme $a_1, a_2, \ldots, a_n$, pro nekonečnou posloupnost pak píšeme $a_1, a_2, \ldots$ Celou posloupnost značíme $\{a_i\}_{i=1}^{n}$, případně $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, což někdy zkracujeme na $\{a_i\}$.

Pokud není uvedeno jinak, posloupností budeme myslet nekonečnou posloupnost.

Jak lze posloupnost zadat?

Posloupnost lze zadat různými způsoby. Jedním z nich je explicitní vyjádření posloupnosti pomocí vzorce pro n-tý člen.

Příklad. Explicitně vyjádřená je například posloupnost zadaná předpisem $a_n = n^2$ pro $n \geq 1$, tj. $\{n^2\}_{n=1}^{\infty}$. Tuto posloupnost tvoří čísla 1, 4, 9, 16, … v tomto pořadí.

Jinou možností je zadat posloupnost rekurentně. To znamená, že $(n+1)$-ní člen posloupnosti vyjádříme pomocí některých z n předchozích členů. Abychom posloupnost takto mohli vyjádřit, musíme navíc zadat počáteční podmínky.

Příklad. Posloupnost z příkladu výše bychom rekurentně zadali vztahem $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$ pro $n \geq 1$ s počáteční podmínkou $a_1 = 1$.

Příklad. Asi nejznámější rekurentně zadanou posloupností je *Fibonacciho posloupnost*. V té je každý člen součtem předchozích dvou členů, tedy

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

pro $n \geq 1$, přičemž $a_0 = 0$ a $a_1 = 1$. Její explicitní vyjádření, které začíná 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …, nám toho naopak moc neřekne.[2]

Běžně se používají oba způsoby a každý má své výhody a nevýhody. Za určitých podmínek lze oba zápisy mezi sebou převádět, ale obecně však posloupnost nemusí jít vyjádřit žádným z nich.

[1] Tak tomu je alespoň pro naše účely, obecně mohou být členy posloupnosti skoro jakékoliv matematické objekty. Posloupnostmi v tomto obecnějším smyslu se však zabývat nebudeme.

[2] Překvapivě platí, že $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$, kde se číslo $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ nazývá *zlatý řez*.

Vlastnosti posloupností

Vlastnosti posloupností jsou definovány obdobně jako vlastnosti funkcí. Posloupnost $\{a_i\}$ se nazývá *omezená*, pokud existuje konstanta M taková, že pro všechna n je $-M \leq a_n \leq M$.

Posloupnost $\{a_n\}$ je

(i) *rostoucí*, pokud pro $i < j$ je $a_i < a_j$;
(ii) *neklesající*, pokud pro $i < j$ je $a_i \leq a_j$;
(iii) *klesající*, pokud pro $i < j$ je $a_i > a_j$;
(iv) *nerostoucí*, pokud pro $i < j$ je $a_i \geq a_j$.

Posloupnost dále nazveme *monotónní*, pokud je neklesající nebo nerostoucí, a *striktně monotónní*, pokud je rostoucí nebo klesající.

Aritmetické a geometrické posloupnosti

V praxi se nejčastěji setkáváme s aritmetickými a geometrickými posloupnostmi.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazveme *aritmetickou*, jestliže existuje takové reálné číslo d, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Číslu d pak říkáme *diference* aritmetické posloupnosti.

Podobně posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazveme *geometrickou*, jestliže existuje takové nenulové reálné číslo q, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$a_{n+1} = a_n \cdot q,$$

kde číslo q nazýváme *kvocientem* geometrické posloupnosti.

Pro obě posloupnosti známe explicitní vyjádření. Pro aritmetickou posloupnost platí vztah

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

a pro geometrickou

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

Rovněž jsme snadno schopni sečíst členy obou zmíněných posloupností. Součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti lze spočítat pomocí vzorce

$$s_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}.$$

Pro součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti platí

$$s_n = \begin{cases} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} & \text{pro } q \neq 1, \\ n a_1 & \text{pro } q = 1. \end{cases}$$

Pokud navíc kvocient geometrické posloupnosti splňuje $|q| < 1$, pak pro součet $s = a_1 + a_2 + \ldots$ všech jejích členů platí

$$s = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Přejeme Ti hodně zdaru při řešení druhé série!