Symetrie

2. PODZIMNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

V rovině leží po dvou různé body A, B, C a přímka p, která neprochází ani jedním z nich. V nějakém shodném zobrazení se A zobrazuje na A, B na B a p na p. Rozhodněte, zdali se v každé takové konfiguraci musí C zobrazovat na C. *(Honza Nekarda)*

ŘEŠENÍ:

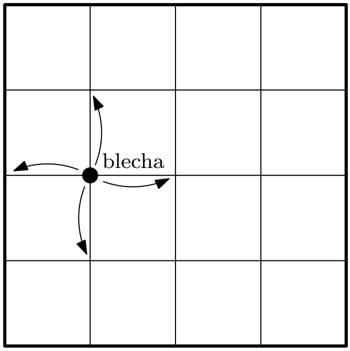
Pokud nalezneme nějakou konfiguraci, pro kterou se bod C nezobrazí sám na sebe, dokážeme tím, že tvrzení neplatí. Pokusme se tedy takovou konfiguraci najít. Všimneme si, že osová souměrnost zobrazí alespoň dva body na sebe, což potřebujeme, aby se A i B mohly zobrazit samy na sebe. Při takovém zobrazení už musí body A a B oba ležet na ose souměrnosti. Nyní si uvědomíme, že přímka se v osové souměrnosti zobrazí sama na sebe, pokud je totožná s osou (to ale nevyhovuje zadání), anebo je na ni kolmá. Pokud tedy p zvolíme jako kolmici na přímku AB tak, aby jejich průsečík byl různý od A a B, dostaneme vyhovující konfiguraci. Zároveň víme, že pouze body na ose se zobrazí samy na sebe, takže bod C lze zvolit kdekoliv mimo přímky p a AB. Tím jsme vytvořili protipříklad a máme hotovo.

POZNÁMKY:

Většina řešitelů si s úlohou poradila dobře a postupovala podobně jako vzorové řešení. Nejběžnější chybou byl závěr, že pokud se přímka zobrazí sama na sebe, platí totéž pro všechny její body, to však neplatí. Řešení, která obsahovala tento omyl, pak zpravidla dokázala, že tvrzení platí, což není pravda, a proto jsem jim body přidělit nemohl. Občas se také objevovaly drobné nedostatky při popisu konstrukce, typicky řešitelé postavili podobnou konstrukci jako v řešení, ale nezmínili, jaké zobrazení používají. Pokud bylo z konstrukce dobře vidět, na jaké zobrazení směřuje, dostala i tato řešení plný počet bodů. Zajímavostí je, že jediné možné zobrazení dokazující, že tvrzení neplatí, je osová souměrnost. To si můžeš zkusit dokázat jako dobrovolné cvičení. *(Honza Nekarda)*

Úloha 2.

Blecha Terka skáče po mřížce 5×5 a začíná tak, jak je zobrazeno na následujícím obrázku. V každém kroku se náhodně rozhodne, jestli skočí do sousedního bodu směrem vlevo, vpravo, nahoru, nebo dolů (všechny směry jsou stejně pravděpodobné). Zastaví se ve chvíli, kdy skočí na obvod mřížky. Víme, že se Terka skutečně někdy zastavila. S jakou pravděpodobností skončila na jedné ze svislých hran obvodu?



(Rado van Švarc)

Řešení:

Nejprve si všimněme, že blecha svou trasu nikdy neskončí v rohu tabulky, protože by se už v předchozím kroku musela nacházet na obvodu, a tedy vždy skončí na právě jedné hraně.

V prvním kroku blecha s pravděpodobností $\frac{1}{4}$ skočí doleva, a zastaví se tak na svislé hraně. Ve zbylých $\frac{3}{4}$ skočí nahoru, doprava nebo dolů, a ocitne se tak v mřížovém bodě, který se nachází na úhlopříčce dané mřížky. Pokud nyní celou mřížku zobrazíme v osové souměrnosti podle úhlopříčky, na níž blecha sedí, tak se prohodí svislé a vodorovné hrany, přičemž pozice blechy v mřížce se nezmění. Ze symetrie podle této úhlopříčky pak musí platit, že pravděpodobnost, se kterou blecha skončí na jedné ze svislých hran, je stejná jako pravděpodobnost, se kterou skončí na jedné z vodorovných hran, tedy $\frac{1}{2}$. Celkem tak blecha skončí na svislé hraně s pravděpodobností $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$.

Poznámky:

Drtivá většina došlých řešení se ubírala velmi podobnou cestou jako vzorové řešení. Někteří si neuvědomili zmíněnou symetrii, čímž si úlohu podstatně ztížili. Každopádně i tak si s ní někteří zvládli poradit a řešení zkrátka „upočítali“. *(Lenka Kopfová)*

Úloha 3.

Označme vrcholy pravidelného 2020-úhelníku A_1 až A_{2020}. Dokažte, že

$$|A_1A_2|^2 + |A_1A_4|^2 + \cdots + |A_1A_{2020}|^2 = |A_1A_3|^2 + |A_1A_5|^2 + \cdots + |A_1A_{2019}|^2.$$

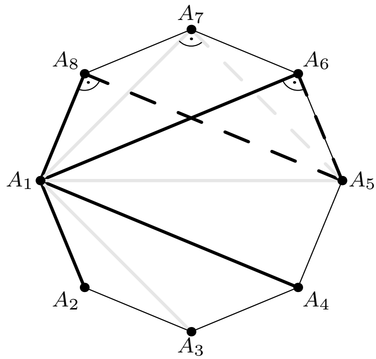
(Josef Minařík)

Řešení:

Pravidelnému 2020-úhelníku jde opsat kružnice s průměrem A_1A_{1011}. To znamená, že je trojúhelník $A_1A_kA_{1011}$ pro $2 \le k \le 1010$ z Thaletovy věty pravoúhlý. Teď si všimněme, že úhlopříčky A_kA_{1011} a A_1A_{1010+k} mají stejnou délku. Díky Pythagorově větě nyní platí

$$|A_1A_k|^2 + |A_1A_{1010+k}|^2 = |A_1A_{1011}|^2.$$

Čísla k a $1010+k$ mají stejnou paritu, proto jsou oba členy $|A_1A_k|^2$ i $|A_1A_{1010+k}|^2$ na stejné straně zadané rovnosti. Tímto způsobem tedy můžeme členy na obou stranách rozdělit do dvojic. Na levé straně získáme 505 dvojic, na pravé straně jenom 504, ale zbude nám tam navíc $|A_1A_{1011}|^2$. Obě strany mají součet $505|A_1A_{1011}|^2$ a úloha je vyřešena.



Poznámky:
Vzorové řešení může být na první pohled trochu neprůhledné – je tam spousta indexů a člověk se v tom snadno ztratí. Naštěstí se to ale dá i docela jednoduše nahlédnout. Můžeme si představit, že polovinu úhlopříček středově zobrazíme na druhou stranu (třeba všechny úhlopříčky A_1A_k pro $k < 1011$). Tím jsme získali spoustu pravoúhlých trojúhelníků a dokazované tvrzení už je vidět.

Většina řešení postupovala víceméně vzorově. Našlo se ale i několik řešení využívajících goniometrii. *(Josef Minařík)*

Úloha 4.

Nenulová reálná čísla a, b, c splňují soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a^2 + a &= b^2, \\ b^2 + b &= c^2, \\ c^2 + c &= a^2. \end{aligned}$$

Dokažte, že $(a-b)(b-c)(c-a) = 1$. *(Pavel Hudec)*

Řešení:
Sečtením všech tří rovnic a odečtením $a^2 + b^2 + c^2$ od obou stran dostaneme vztah $a + b + c = 0$. Nyní můžeme první rovnici upravit do tvaru $a^2 - b^2 = -a$, což lze pomocí známého vzorce pro rozdíl druhých mocnin převést na $(a-b)(a+b) = -a$. Dále můžeme použít vztah, který jsme si výše odvodili, a za $a + b$ dosadit $-c$. Provedením těchto úprav pro každou z rovnic dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} -c(a-b) &= -a, \\ -a(b-c) &= -b, \\ -b(c-a) &= -c. \end{aligned}$$

Vynásobíme-li tyto rovnice, dostaneme

$$-abc(a-b)(b-c)(c-a) = -abc.$$

Jelikož jsou čísla a, b, c ze zadání nenulová, je číslo $-abc$ také nenulové, tudíž jím můžeme vydělit obě strany rovnice. Tím dostáváme, že $(a-b)(b-c)(c-a) = 1$, jak jsme potřebovali.

Poznámky:
Když dělíme rovnici, musíme se ujistit a zmínit v řešení, že dělíme nenulovým číslem. Tuto chybu jsem odpouštěl, jestliže nenulovost byla „celkem jasná“, např. když se dělilo přímo jedním z čísel a, b, c nebo když bylo již dokázáno $a+b+c=0$ a dělilo se $a+b$. Ale klidně jsem nemusel. Jinak byla většina řešení podobných tomu vzorovému. Kdo si chtěl více hrát s výrazy, mohl úlohu dokázat přes mezistupeň $ab+bc+ca=-1$. Úloha také šla vyřešit přímým dosazením a úpravou na kubickou rovnici. Vyjde až na cyklickou záměnu jediné řešení, které je přibližně (0,742, −1,137, 0,395).

(Marian Poljak)

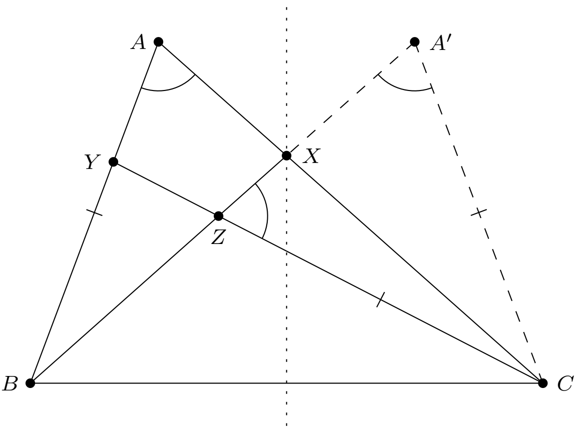
Úloha 5.

V trojúhelníku ABC platí $|AB| < |AC|$. Osa strany BC protíná stranu AC v bodě X. Na straně AB leží bod Y tak, že průsečík Z přímek BX a CY splňuje $|ZC| = |AB|$. Dokažte, že body A, X, Y, Z leží na jedné kružnici. *(Matěj Doležálek)*

Řešení:
Díky podmínce $|AB| < |AC|$ musí bod X ležet uvnitř strany AC. Bod Y ze zadání leží na straně AB a můžeme předpokládat, že není jedním z krajních bodů, protože v takovém případě zadané tvrzení triviálně platí. Tím pádem bod Z musí ležet uvnitř trojúhelníka ABC.

Uvažujme osovou symetrii podle osy úsečky BC. V ní se bod X zobrazí sám na sebe, B na C a A na nový bod A'. Ten musí ležet na přímce BX, neboť A leží na CX. Zároveň vzdálenost bodu A od strany BC je větší než vzdálenost bodu X od BC, což se při symetrii zachová, takže A' leží na polopřímce opačné k XB. Situace tedy, co se pořadí bodů na přímce BX týče, musí vypadat jako na obrázku.

Ze symetrie a zadání platí $|A'C| = |AB| = |CZ|$, takže trojúhelník $ZA'C$ je rovnoramenný. Ze stejné symetrie a dokázané rovnoramennosti pak platí $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle CA'B| = |\sphericalangle CZA'|$. Z toho už ale plyne, že součet úhlů u vrcholů A a Z ve čtyřúhelníku $AXZY$ je roven $180°$. To je ekvivalentní s tím, že je $AXZY$ tětivový, což jsme měli dokázat.



Poznámky:
Většina došlých řešení postupovala nějakou variací na to vzorové, kde si pomocí symetrie nebo přenesení bodů vytvořila nový rovnoramenný trojúhelník, pomocí kterého úlohu už hravě dokončila. Způsobů, jak to udělat, je mnoho a výše je ukázán ten nejčastěji použitý. Další možností bylo vyjádřit si úhly pomocí sinových vět – zde si ale bylo třeba dát pozor na fakt, že z rovnosti $\sin(x) = \sin(y)$ neplyne automaticky rovnost $x = y$.

(Martin Raška)

Úloha 6.

Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC. Na základně BC zvolme libovolný bod X. Dále nechť Y, Z jsou body po řadě na stranách AB, AC splňující $|\sphericalangle BXY| = |\sphericalangle CXZ|$. Rovnoběžka s YZ procházející bodem B protne úsečku XZ v bodě T. Ukažte, že trojúhelník ABC je osově souměrný podle přímky AT.

(Pavel Hudec)

Řešení pomocí podobností:

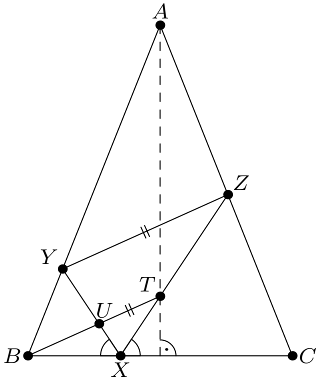
Trojúhelníky BXY a CXZ jsou podobné, neboť se shodují v úhlu u X a v úhlech u vrcholů původního trojúhelníku. Díky této podobnosti platí $\frac{|YX|}{|XB|} = \frac{|ZX|}{|XC|}$, což přepíšeme na $\frac{|YX|}{|ZX|} = \frac{|XB|}{|XC|}$.

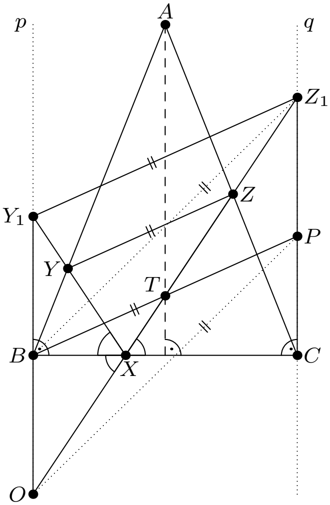
Označme U průsečík úseček BT a XY. Pak je UT rovnoběžná s YZ, díky čemuž jsou i trojúhelníky XUT a XYZ podobné. Z této podobnosti pak dostáváme $\frac{|YX|}{|ZX|} = \frac{|UX|}{|TX|}$.

Dohromady máme $\frac{|UX|}{|TX|} = \frac{|XB|}{|XC|}$, neboli $\frac{|UX|}{|XB|} = \frac{|TX|}{|XC|}$. To ale znamená, že trojúhelníky TXC a UXB jsou podobné podle věty sus. Jejich úhly u B a C jsou proto shodné, neboli

$$|\sphericalangle CBT| = |\sphericalangle XBU| = |\sphericalangle XCT| = |\sphericalangle BCT|,$$

což už značí, že T leží na ose strany BC. Trojúhelník ABC je tedy osově souměrný podle AT, což jsme měli dokázat.





Řešení nalezením rovnoběžníků (podle sester Hanuškových):

Označme p, q kolmice na BC procházející po řadě B, C. Nechť XY protne p v bodě Y_1 a nechť XZ protne q v bodě Z_1. Průsečík přímek BT a q označíme P a průsečík přímek XZ a p označíme O.

Podobně jako v prvním řešení si všimneme podobných trojúhelníků – XBY_1 a XCZ_1 jsou podobné díky shodnosti úhlů u X a pravým úhlům u B a C. Dále i trojúhelníky BXY a CXZ jsou podobné. Z první podobnosti dostaneme $\frac{|Y_1X|}{|XB|} = \frac{|Z_1X|}{|XC|}$, což přepíšeme na $\frac{|Y_1X|}{|Z_1X|} = \frac{|XB|}{|XC|}$. Druhá podobnost nám dává stejně jako v prvním řešení $\frac{|YX|}{|ZX|} = \frac{|XB|}{|XC|}$. Dohromady tedy $\frac{|Y_1X|}{|Z_1X|} = \frac{|YX|}{|ZX|}$, což znamená, že trojúhelníky XYZ a XYZ_1 jsou podobné podle věty sus. Z toho dostáváme, že $Y_1Z_1 \parallel YZ \parallel BP$ neboli BPZ_1Y_1 je rovnoběžník.

V rovnoběžníku jsou protilehlé strany shodné, takže $|Y_1B| = |Z_1P|$. Díky rovnosti úhlů u X ze zadání je přímka XY obrazem přímky XZ v osové souměrnosti podle BC. Pak O je obrazem Y_1

v této osové souměrnosti, neboť $OY_1 \perp BC$. Tedy máme $|BO| = |Y_1B| = |Z_1P|$, z čehož už nutně je OPZ_1B rovnoběžník. V rovnoběžníku se půlí úhlopříčky, takže T je středem BP, a tedy T leží na ose strany BC.

Řešení hýbáním s body (podle Matouše Šafránka):

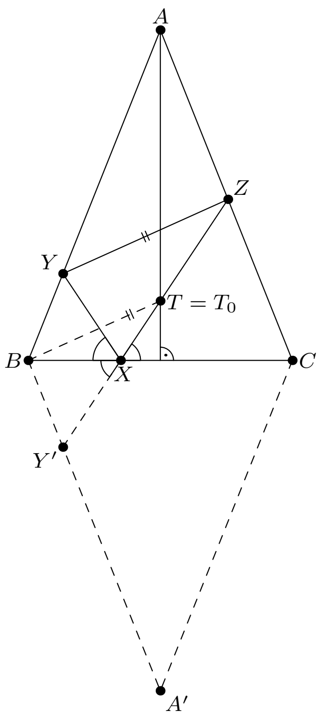
Jelikož T leží na úsečce XZ, bod Z nemůže být blíže od BC než bod Y. Takže X nemůže ležet dále od B než od C.

Zobrazme trojúhelník ABC v osové souměrnosti podle BC. Bod A se zobrazí na A' a Y se zobrazí na Y'. Pak platí $|\sphericalangle BXY'| = |\sphericalangle BXY| = |\sphericalangle CXZ|$, takže body Y', X a Z leží na jedné přímce. Definujme T_0 jako průsečík úseček AA' a XZ, který vždy existuje, protože X leží blíže k B.

Uvažujme T_0 fixní a hýbejme s X, Y a Z. Chceme dokázat, že přímka BT prochází bodem T_0. Pak bude vždy T ležet na ose strany BC a trojúhelník ABC tak bude souměrný podle AT.

Zobrazení, které Z posílá na Y', je stejnolehlost se středem v T_0, neboť Z, T_0 a Y' leží na jedné přímce a poměr $\frac{|ZT_0|}{|T_0Y'|}$ je konstantní. Tato stejnolehlost zároveň zobrazuje A na A', takže na sebe zobrazuje úsečky AZ a $A'Y'$. Proto je poměr jejich délek konstantní. Zároveň $|A'Y'| = |AY|$, protože se jedná o obrazy v osové souměrnosti. Tedy i poměr délek AY a AZ je konstantní, takže přímka YZ má vždy stejný směr. To ale znamená, že přímka BT je fixní, protože má fixní směr a prochází fixním bodem.

Stačí proto ověřit, že přímka BT prochází bodem T_0, pro jediný případ. Zvolme $X, Y \equiv B$. Pak Z bude průsečíkem T_0X a AC. V tomto případě je rovnoběžkou s YZ procházející B přesně BT_0, tedy $T \equiv T_0$, což jsme chtěli dokázat.



Poznámky:

Většina řešitelů si s touto úlohou úspěšně poradila. Vyskytlo se množství myšlenkově odlišných řešení, která můžeme zhruba zařadit do tří kategorií. Část řešitelů úlohu upočítala, což bylo relativně schůdné, jelikož v úloze není žádná kružnice. Další část řešitelů nějak hýbala s body a využívala toho, že když se v této úloze hýbe s nějakými body, ostatní body se hýbou celkem hezky (dost často lineárně). Takovým řešitelům pak většinou stačilo vyřešit několik různých speciálních případů úlohy. Zbývající část řešitelů pak úlohu řešila synteticky. Z nich bych chtěl vyzdvihnout sestry *Hanuškovy* a *Matouše Šafránka*, z jejichž řešení jsem čerpal při psaní vzorového řešení a kterým jsem současně dal $+i$.

Úloha platí, i pokud T definujeme jako průsečík rovnoběžky s YZ procházející B a **přímky** XZ. Úsečka byla přidána do zadání pouze pro zjednodušení argumentace u některých z možných řešení.

(Pavel Hudec)

Úloha 7.

Ve městě stojí 2020^2 domů uspořádaných do čtverce 2020×2020. Z každého domu vede elektrické vedení do všech sousedních domů, přičemž domy považujeme za sousední, pokud jejich parcely mají společnou hranu. Jednoho dne se ale městem prohnala veliká bouře a některé dráty poničila. Elektrikář Rado se lopotil celou noc, aby opravil dost drátů na to, aby libovolné dva domy ve městě byly spojeny elektrickým vedením. Teď mu ale volá starosta Radeček a požaduje důkaz, že jsou skutečně každé dva domy propojené. Rado umí z velína ukázat na dvojici domů ve městě, načež obdrží potvrzení, že dané dva domy skutečně propojené jsou. Určete, kolik nejméně dvojic domů musí Rado ověřit, aby mohl Radečkovi dokázat, že jsou propojeny každé dva domy ve městě.

(Matěj Doležálek)

Řešení:

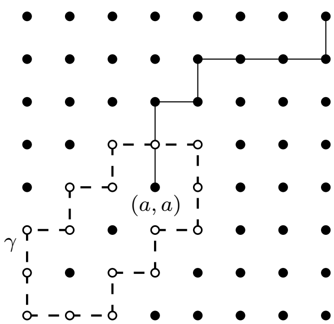
Dotazem na dvojici domů rozumějme informaci, že dané dva domy jsou propojené. Ukážeme, že nejmenší počet dotazů, které Rado potřebuje, je $\frac{2020^2}{2}$. K tomu nejprve dokážeme, že méně dotazů stačit nemůže, a poté uvedeme konstrukci. Zaprvé nahlédněme, že každý dům musí figurovat v alespoň jednom dotazu. Pokud by totiž existoval nějaký dům D, o němž nemáme žádnou informaci, pak se může stát, že jsou opraveny všechny dráty ve městě kromě těch, které vedou z D do jeho sousedů. Pak by všechny domy vyjma D byly navzájem spojeny, takže by byly splněny všechny dotazy, leč D by nebyl s ostatními domy propojen. Máme 2020^2 domů, v každém dotazu figurují dva, takže je nutno použít alespoň $\frac{2020^2}{2}$ dotazů.

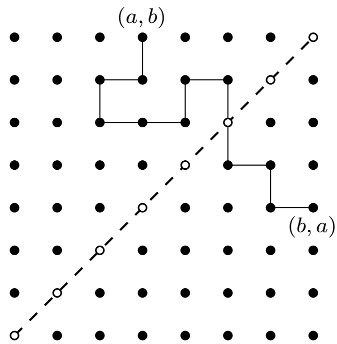
Nyní potřebujeme vyrobit konstrukci takových $\frac{2020^2}{2}$ dotazů, které již zaručují vzájemné propojení všech domů. Ukážeme si dvě.

Konstrukce osovou souměrností:

Domy označujme jejich souřadnicemi v mřížce. Zvolme si úhlopříčku obsahující domy (i,i) a každý dům (a,b) mimo ni propojme v dotazu s jeho obrazem (b,a) v osové souměrnosti podle zvolené úhlopříčky. Pro domy na úhlopříčce pak použijme dotazy na dvojice (i,i) a $(1010+i, 1010+i)$ pro $i \in \{1,\dots,1010\}$.

Nejprve dokážeme, že po potvrzení takovýchto dotazů už musí být navzájem propojeny všechny domy úhlopříčky. Máme nějakou *cestu* mezi $(1,1)$ a $(1011,1011)$, tedy spojení přes funkční dráty. Cestou zde rozumějme takovou posloupnost domů, v níž jsou po sobě následující domy sousední v mřížce města a zároveň jsou *nějak* propojené – ne nutně drátem, který je přímo spojuje. Každý dům této cesty je propojen s $(1,1)$ i $(1011,1011)$ a také se svým obrazem v osové souměrnosti podle úhlopříčky, které jsou taktéž spojeny s $(1,1)$ a $(1011,1011)$. To značí, že obraz cesty, kterou máme zaručenu z dotazu, v převrácení podle úhlopříčky, je také cesta z $(1,1)$ do $(1011,1011)$. Dohromady tyto dvě cesty tvoří množinu domů γ, která je „uzavřenou křivkou“ – rozděluje zbytek mřížky na alespoň dvě oblasti tak, že jakákoliv cesta vedoucí po drátech z jedné oblasti do jiné musí projít nějakým bodem γ.





Ukažme nyní, že každý bod (a,a) pro $a \in \{2,\ldots,1010\}$ na úhlopříčce je propojen s $(1,1)$. Nechť nějaký (a,a) není. Pak určitě neleží na γ, je tedy uzavřen v jedné z oblastí „uvnitř“ γ. Dům $(1010+a, 1010+a)$ však nemůže ležet v té samé oblasti, protože mezi nimi na úhlopříčce leží $(1011, 1011)$, který leží na γ. Ze souměrnosti γ podle úhlopříčky pak γ odděluje (a,a) od $(1010+a, 1010+a)$.

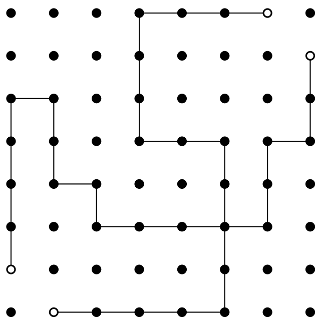
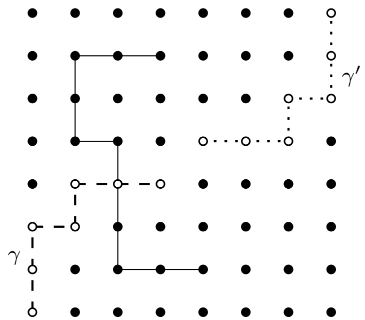
Přitom ale z (a,a) do $(1010+a, 1010+a)$ vede cesta. Ta někde bude muset protnout γ, z čehož už je (a,a) propojen s $(1,1)$. Dohromady s tím, že (i,i) je vždy spojen s $(1010+i, 1010+i)$, jsou tak všechny domy na úhlopříčce spojeny s $(1,1)$, takže i spolu navzájem.

Nyní uvažujme dům (a,b) mimo úhlopříčku. Z něj vede cesta do (b,a). Tyto domy se nachází na opačných stranách úhlopříčky, takže tato cesta musí přes úhlopříčku projít. Každý dům ve městě je tak spojen s úhlopříčkou, takže jsou všechny domy propojeny navzájem.

Konstrukce středovou souměrností:

Opět označujme domy jejich souřadnicemi v mřížce. Položme nejprve dva dotazy, jeden na $(1,1)$ a $(1010, 1010)$, druhý na $(1011, 1011)$ a $(2020, 2020)$. Každý ze zbylých domů pak dejme do dvojice s domem středově souměrným, tedy (a,b) s $(2021-a, 2021-b)$.

Nejprve ukažme, že domy $(1,2)$, $(2,1)$, $(2019, 2020)$ a $(2020, 2019)$ jsou navzájem propojené. Mezi $(1,2)$ a $(2020, 2019)$ vede cesta, a jelikož její koncové domy leží na okraji města, dělí tato cesta město na (alespoň) dvě části. Mezi těmito dvěma částmi vede cesta z $(2,1)$ do $(2019, 2020)$, takže tyto dvě cesty se někde protínají, což už značí, že jsou uvažované čtyři domy navzájem propojené.

Dále si všimněme, že $(1,1)$ je spojený drátem s $(1,2)$ nebo s $(2,1)$, jinak by totiž nemohl být spojen cestou s $(1010, 1010)$. Obdobně je $(2020, 2020)$ spojen s jedním ze svých dvou sousedů, takže z předchozího jsou už $(1,1)$ a $(2020,2020)$ propojeny. Uvažujme nyní cestu γ vedoucí z $(1,1)$ do $(1010,1010)$ a její obraz γ' ve středové souměrnosti. Každý dům na γ' kromě $(1011,1011)$ a $(2020,2020)$ je spojen se svým obrazem ve středové souměrnosti ležícím na γ, takže už je propojen s $(1,1)$. Dále je $(1011,1011)$ propojen s $(2020,2020)$, o kterém už víme, že je propojen s $(1,1)$, takže dohromady jsou všechny domy na γ a γ' propojeny s $(1,1)$, tedy i spolu navzájem.

Cesty γ a γ' nyní dohromady tvoří jednu velkou množinu domů δ, která je souměrná podle středu města a dělí jej na (alespoň) dvě části. Přitom středově souměrné domy musí ležet v různých částech, neboť i δ je středově souměrná. Pak ale cesta spojující dům (a,b) s jeho středově souměrným obrazem musí někde přejít přes δ, takže (a,b) je propojeno s $(1,1)$. Tím už jsou všechny domy ve městě propojeny navzájem, jak se mělo dokázat.

Poznámky:
Došlá řešení byla velice rozmanitá, téměř platilo, že co řešení, to jiná konstrukce. Kromě takových, které byly podobné jedné ze vzorových, se našly i funkční konstrukce využívající např. propojení domů posunutých o 1010 v řádku anebo domů z protějších kvadrantů 1010×1010.

Neúplným řešením jsem uděloval jeden bod za spodní odhad $\frac{2020^2}{2}$. Další bod jsem uděloval za správně dokázané neoptimální konstrukce, které byly *podstatně lepší* než triviální propojení jednoho domu se všemi 2020^2-1 ostatními. Tím se rozumí takové konstrukce, které při „rozumném“ zobecnění pro všechna dostatečně velká města $n \times n$ potřebují méně než cn^2 dotazů pro nějaké $c < 1$. *(Matěj Doležálek)*

Úloha 8.

Pavel a Matěj hrají hru s $n \geq 3$ letišti, mezi kterými na začátku nejsou žádné letecké linky. Matěj začíná a hráči se střídají v tazích. Hráč na tahu vždy propojí libovolná, zatím nespojená, letiště přímou obousměrnou leteckou linkou. Ani jeden z nich nechce být ten, kdo jako první vytvoří cyklus liché délky.[1] *Zjistěte, pro která n může Matěj zajistit, že první lichý cyklus vytvoří Pavel, ať už Pavel hraje jakkoli.* *(Pavel Hudec)*

Řešení:
Nejdříve přeformulujeme podmínku neexistence lichých cyklů ze zadání na možnost obarvení letišť dvěma barvami tak, aby žádná dvě spojená neměla stejnou barvu, a poté ukážeme, že Matěj může zařídit svoji výhru právě tehdy, když n dává zbytek 2 po dělení 4.

Pokud můžeme obarvit letiště dvěma barvami tak, aby nikdy nebyla dvě letiště stejné barvy spojena, pak mezi nimi určitě neexistuje lichý cyklus, neboť by se v něm musely barvy střídat, což ale nevychází.

Naopak pokud mezi letišti neexistuje žádný lichý cyklus, pak ukážeme, že letiště obarvit dvěma barvami jde. Zřejmě pokud jde letiště rozdělit do více souvislých skupin (komponent), mezi kterými se nedá přes spojení dostat, tak nám stačí ukázat, že obarvení existuje pro každou z těchto komponent zvlášť. Vezměme libovolné letiště X a obarvěme ho bíle, následně obarvíme všechna letiště, která jsou s ním spojená, černě. Poté všechna ještě neobarvená letiště spojená s těmito černými bíle. Takto postupujeme dále, dokud neobarvíme všechna letiště (což se nám nakonec určitě povede, protože letišť je konečně mnoho a předpokládáme, že se z každého dá do každého jiného nějakou posloupností linek dostat). Zároveň si u každého letiště zvýrazníme linku, pomocí které jsme ho obarvili.

Stačí nám ukázat, že žádná dvě letiště stejné barvy nejsou nyní spojena leteckou linkou. Předpokládejme pro spor, že tomu tak je a dvě letiště A, B stejné barvy jsou spojena. Pro každé z těchto letišť uvažme posloupnost zvýrazněných linek od něj do X. Tyto dvě posloupnosti mají určitě společné alespoň jedno letiště (X), takže můžeme zvolit letiště, které je z těch vyskytujících se v obou posloupnostech k letištím A, B nejblíže (může to být i jedno z A, B). Toto letiště označme Y. Když

[1] Existence cyklu liché délky znamená, že můžeme začít v nějakém letišti a pomocí lichého počtu letů se do něj dostat zpátky.

pak ale uvážíme cyklus vzniklý tak, že letíme z A do B, pak uvažovanou posloupností linek z B do Y a poté zpět z Y do A, pak dostaneme lichý cyklus (neboť délky posloupností z Y do A a z Y do B mají stejnou paritu, protože mají A, B stejnou barvu). To ale není možné.

Všimněme si navíc, že pokud už se můžeme dostat pomocí linek mezi libovolnými dvěma letišti, existuje pouze jedno možné obarvení (až na prohození barev všech letišť).

Víme tedy nyní, že hra skončí právě tehdy, když po žádném možném spojení dvou letišť už nepůjde letiště obarvit dvěma barvami.

Zamysleme se, v jakém stavu může hra skončit. Dokud existují dvě letiště, mezi kterými se nejde žádnou posloupností linek dostat, může hráč na tahu tato dvě letiště spojit a žádný nový cyklus (natož lichý) určitě nevytvoří. Takže ve finální pozici půjde zvolit jednoznačné obarvení letišť. Pokud nebudou nějaká dvě letiště různých barev spojena, pak je můžeme propojit a nic nezkazíme. Naopak žádná dvě letiště stejné barvy propojit nemůžeme. Na konci každé hry tedy budeme mít k bílých letišť, $n-k$ černých a $k(n-k)$ hran mezi nimi (pro nějaké k od 1 do $n-1$).

Pokud je n liché, pak je alespoň jedno z čísel k, $n-k$ vždy sudé. Tím pádem je i součin $k(n-k)$ sudý. Do finální pozice se tedy dostaneme vždy před tahem Matěje. V této chvíli může hrát Pavel úplně libovolně (vždy propojit libovolná dvě letiště tak, aby nevytvořil lichý cyklus) a vždy vyhraje.

Pro sudé n je situace složitější, neboť parita $k(n-k)$ závisí na tom, zda je k sudé nebo liché. Ukážeme, že každý z hráčů může nehledě na protivníkovy tahy zaručit, že $k=\frac{n}{2}$, čímž dostaneme sudý počet hran, pokud je n dělitelné čtyřmi (výherní strategii pro Pavla) a liché, pokud n čtyřmi dělitelné není (výherní strategii pro Matěje).

Pokud je každá komponenta (maximální souvislá skupina letišť), která obsahuje alespoň dvě letiště, obarvitelná dvěma barvami tak, že je stejně bílých a černých letišť, budeme říkat, že se hra nachází v situaci S.

Ukážeme, že pokud se před Matějovým tahem nachází hra v situaci S a všechna letiště ještě nejsou v jedné komponentě, může Pavel zaručit, že buď Matěj spojí všechna letiště do jedné komponenty tak, že hra zůstane v situaci S, nebo bude před Matějovým dalším tahem hra zase v situaci S. (To samé pak může analogicky zařídit Matěj nezávisle na tazích Pavla.)

Všimněme si, že hra zůstane v situaci S, kdykoliv spojíme dvě letiště ležící ve stejné komponentě (komponenty ani barvy tím nezměníme), dvě osamocená letiště (vytvoříme novou skupinu alespoň dvou letišť, pro kterou podmínka platí), nebo libovolně spojíme dvě komponenty velikosti alespoň dva (pokud měly spojené dva vrcholy různou barvu, pak je všechno splněno, pokud ne, tak jen prohodíme barvy v jedné z komponent).

Pokud tedy Matěj zahraje jeden z tahů tohoto typu a letiště ještě nebudou všechna v jedné komponentě, může Pavel spojit dvě komponenty velikosti alespoň dva, pokud takové existují. A pokud ne, tak musí existovat nějaké osamocené letiště, a jelikož jsou všechny komponenty velikosti alespoň dva sudé, tak musí existovat ještě jedno. Pavel může poté spojit nějaká dvě izolovaná letiště. Žádným z těchto tahů se hra z S nedostane.

Jediná možnost, která zbývá Matějovi, je připojit izolované letiště k nějaké komponentě velikosti alespoň dva. V takovém případě plyne ze sudosti komponent o více než jednom letišti znovu, že existuje ještě jedno izolované letiště, které může Pavel připojit ke stejné komponentě, ale k letišti opačné barvy, než připojoval Matěj, čímž se zase dostane do S.

Pro n dělitelné čtyřmi si touto strategií Pavel zajistí výhru. Před úplně prvním tahem Matěje je hra v S, takže Pavel může zaručit, že ve finálním grafu bude stejný počet bílých a černých letišť, a tedy vyhrát. Naopak pro n dávající zbytek 2 po dělení 4 bude tuto strategii aplikovat naopak Matěj. Prvním tahem spojí libovolná dvě izolovaná letiště, čímž předá hru Pavlovi v S, a může dál aplikovat popsanou strategii, čímž zaručí, že hra skončí s lichým počtem vrcholů každé barvy, a tedy i jeho výhrou.

Poznámky:

Pro řešitele, kteří mají větší zkušenosti s teorií grafu nebo teoretickou informatikou, byla tato úloha určitě jednodušší, neboť ono převedení na obarvení dvěma barvami dost možná znali. S použitím grafové terminologie zní: Graf jde obarvit dvěma barvami právě tehdy, když v něm neexistují liché cykly. Tato věta je opravdu známá a ve vašem řešení ji určitě není třeba dokazovat. Ale i pokud ji člověk nezná, tak se její důkaz dá vymyslet.

Spousta řešitelů se s úlohou poprala výborně. Někteří se bohužel dopustili malých chyb, čemuž se je v podobných úlohách hrozně těžké vyvarovat. I malé chyby ale velmi často bohužel rozbijí celý důkaz. V úlohách, kde se má hledat výherní strategie, si člověk musí dát pozor, aby opravdu odargumentoval, že jeden hráč může vyhrát, ať už hraje jeho protivník jakkoliv vychytrale. Pokud opomenete libovolnou možnost protivníka, tak se může stát, že právě tímto tahem vyhraje. Řešení úlohy by mělo čtenáře přesvědčit, že žádný podobný problém nastat nemůže a že jsme si opravdu jisti, kdo z hráčů za jakých podmínek může vždy vyhrát. *(Filip Bialas)*