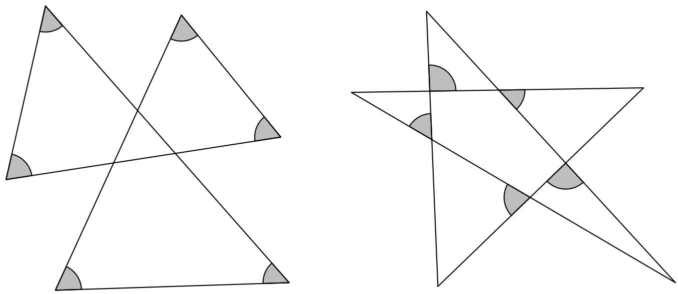
Porovnávání

2. podzimní série | Vzorové řešení

Úloha 1.

Rozhodněte a zdůvodněte, zda je součet vyznačených úhlů větší v obrázku a), či v obrázku b).

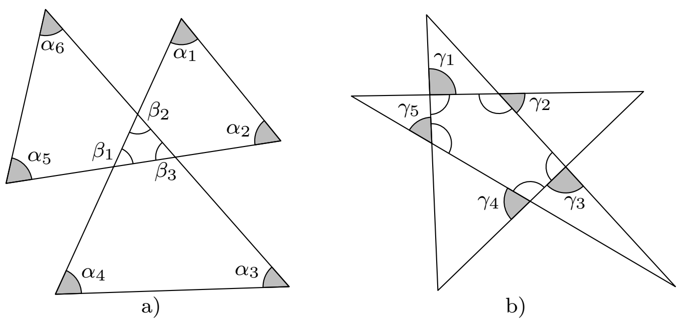


a) b)

(Marian Poljak)

Řešení:

Nejprve spočteme součet vyznačených úhlů v obrázku a). Vyznačené úhly si označíme $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$, dále si označíme β_1, β_2, β_3 vnitřní úhly trojúhelníka vzniklého z úseček na obrázku. Pak platí $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 = 180^\circ$, protože tyto úhly tvoří trojúhelník. Analogicky tuto úvahu provedeme pro další dvě trojice úhlů. Konečně $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 180^\circ$, proto je součet vyznačených úhlů roven $3 \cdot 180^\circ - 180^\circ = 360^\circ$.



a) b)

V obrázku b) úsečky vytvořily pětiúhelník. Vyznačené úhly $\gamma_1, \ldots, \gamma_5$ jsou pak vždy vedlejší úhly k vnitřním úhlům pětiúhelníka. Součet dvou vedlejších úhlů je vždy 180° a součet vnitřních úhlů v pětiúhelníku je 540°. Dohromady je tedy součet vyznačených úhlů $5 \cdot 180^\circ - 540^\circ = 360^\circ$.

Součet vyznačených úhlů v obou obrázcích je tak stejný.

Poznámky:
Většina řešení byla správná a postupem kopírovala vzorové řešení. Nemá-li úloha zadané konkrétní hodnoty, je třeba vždy sepisovat řešení obecně, jinak nelze získat plný počet bodů. Pokud tedy řešení obsahovalo výsledek jen pro konkrétní rozložení přímek, nezískala žádný bod.

(Hedvika Ranošová)

Úloha 2.

Nechť $n \geq 2$ je přirozené číslo. Porovnejte $\sqrt{n}$ a

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}.$$

(Marian Poljak)

Řešení:
Všimněme si, že

$$\frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}}=\frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}}\cdot\frac{\sqrt{i}-\sqrt{i+1}}{\sqrt{i}-\sqrt{i+1}}=\frac{\sqrt{i}-\sqrt{i+1}}{-1}=-\sqrt{i}+\sqrt{i+1}.$$

Dosazením do zadání pak dostáváme

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}=\\&=\left(-\sqrt{1}+\sqrt{2}\right)+\left(-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\cdots+\left(-\sqrt{n-1}+\sqrt{n}\right)=\\&=-1+\sqrt{n}<\sqrt{n}.\end{aligned}$$

Zadaný výraz je tedy ostře menší než $\sqrt{n}$.

Poznámky:
Drtivá většina došlých řešení byla správně a postupovala stejně jako vzorové řešení, případně pomocí indukce.

(Lenka Kopfová)

Úloha 3.

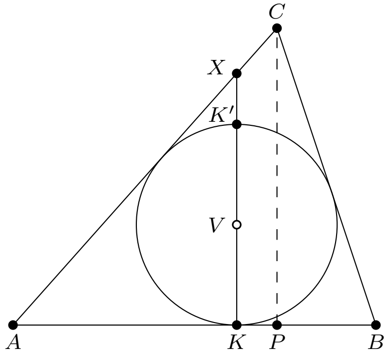
Pravoúhlý trojúhelník má přeponu délky c a poloměr kružnice vepsané r. Dokažte, že $c > 4r$.

(Matěj Doležálek)

Řešení:
Nejprve si ukážeme, že výška v libovolném trojúhelníku je ostře delší než průměr jeho kružnice vepsané.

Uvažme trojúhelník ABC s kružnicí vepsanou k, jejíž střed budeme značit V a poloměr r. Bod dotyku kružnice k se stranou AB označme K. Dále označme v výšku na stranu c. Přímka KV musí trojúhelník ABC protnout v alespoň dvou bodech, z nichž jeden je K. Druhý průsečík bude ležet na straně AC nebo BC (BÚNO můžeme předpokládat, že leží na AC), označme jej X. Nechť K' je druhý krajní bod průměru k, na němž leží K. Protože kružnice vepsaná leží uvnitř trojúhelníku, bude K' také ležet uvnitř trojúhelníku, speciálně $K' \in KX$. Zřejmě $K' \neq K$, ale také $K' \neq X$ (na tečně v K' by ležel bod A, ten však leží na tečně v K a tyto tečny jsou rovnoběžky). Průměr k je tedy ostře menší než $|KX|$. Nyní, protože X leží na AC, můžeme mluvit o úsečce XC (za úsečku budeme považovat i degenerovaný případ $X = C$). Vzdálenost libovolného bodu $L \in XC$ od AB

bude větší nebo rovná $|KX|$. Speciálně tedy vzdálenost C od AB, což je délka výšky v, je větší než $|KX|$, což je delší než průměr.



Nyní uvážíme pravoúhlý trojúhelník ze zadání úlohy, označíme jeho vrcholy A, B, C, aby AB byla přepona o délce c. C leží na Thaletově kružnici nad AB, má proto od AB nejvýše vzdálenost poloměru této kružnice, což je $\frac{|AB|}{2} = \frac{c}{2}$, tedy $\frac{c}{2} \geq v$. Z výše dokázaného tvrzení pak $v > 2r$, z čehož dostáváme $c > 4r$.

Poznámky:
Řešení, která se podobala vzorovému, tj. náhledová, bez větších algebraických úvah, dostávala plný počet a imaginární bod.

Největší část došlých řešení využívala úpravy nerovnosti a použití nějakého vzorce pro poloměr kružnice vepsané. Obvykle taková řešení dosáhla úspěchu, a proto získala plný počet bodů.

Na tomto místě bych chtěl upozornit, že korektní postup je od známých nerovností (např. $x^2 \geq 0$) jejich úpravami až k požadované nerovnosti, nebo explicitně uvést, že provedené úpravy jsou ekvivalentní (a tedy nezáleží na pořadí). Za opačný postup (tedy úpravou kýžené nerovnosti) jsem body nestrhával, ale dávejte si na to prosím pozor.

Častým postupem bylo také nejprve ukázat, že při dané délce přepony je délka poloměru r největší pro rovnoramenný trojúhelník, a poté důkaz $c > 4r$ provést právě pro rovnoramenný trojúhelník. Tato cesta byla více riskantní, neboť půlce takových řešení se nepovedlo korektně ukázat první krok. Objevilo se tu více důkazů pomocí derivací (která buď byla špatně, nebo si vysloužila záporný imaginární bod), nebo důkazů, které se odvolávají na vágně formulované vlastnosti goniometrických funkcí (ta byla v drtivé většině špatně). Řešení, která ukázala pouze situaci v rovnoramenném trojúhelníku bez správného důkazu, že stačí ukázat pouze tento jeden případ, dostala jeden bod. *(Daniel Perout)*

Úloha 4.

V pravoúhlém trojúhelníku ABC je M střed přepony AB. Zvolíme bod P na úsečce AM a bod Q na úsečce MB tak, že $|PQ| = |CQ|$. Dokažte, že platí $|AP| \leq 2 \cdot |MQ|$. *(Pavel Hudec)*

Řešení:
Z trojúhelníkové nerovnosti pro tři body C, Q a M víme, že platí

$$|CQ| + |MQ| \geq |MC|.$$

Protože ABC je pravoúhlý trojúhelník, je střed přepony M zároveň i středem kružnice opsané, tudíž platí $|AM| = |MC|$. Dosadíme-li toto do výše odvozené nerovnosti, získáme

$$|CQ| + |MQ| \geq |AM|.$$

Ze zadání víme, že $|CQ| = |PQ|$, což můžeme znovu dosadit do nerovnosti, abychom dostali

$$|PQ| + |MQ| \geq |AM|.$$

Nyní si uvědomíme, že $|PQ| = |PM| + |MQ|$ a $|AM| = |AP| + |PM|$. Dosadíme, čímž obdržíme

$$\begin{aligned}\Big(|PM| + |MQ|\Big) + |MQ| &\geq |AP| + |PM|,\\ 2|MQ| &\geq |AP|,\end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

Poznámky:
Řešení se nashromáždilo větší množství a vícero druhů. Většina řešitelů se vydala cestou nalezení nějaké nerovnosti a poté její úpravy na námi hledanou anebo opačnou cestou, tedy prve úprava hledané nerovnosti a pak důkaz, že tato upravená platí. Druhá cesta byla výrazně těžší, i přesto všechna řešení byla správná. Jiní řešitelé se vydali cestou hledaní maxim a minim. Taková řešení nemusí být z principu špatná, ale je potřeba řádně odůvodnit, proč vaše minimum je opravdu minimem a maximum maximem, jinými slovy proč z platnosti vašich speciálních případů vyplývá obecná platnost. Většina přijatých důkazů tohoto typu byla špatně. Část řešení se dala na cestu analytické geometrie. Mezi nimi bychom našli elegantnější i pracná, přesto všechna vedla k úspěchu.

(Vojta „Dláža“ Gaďurek)

Úloha 5.

Je dáno přirozené číslo m a taková k-tice přirozených čísel $a_1, a_2, \dots, a_k$ nepřevyšujících m, že každé z čísel $1, 2, \dots, m$ je dělitelné nanejvýš jedním a_i pro $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_k} \leq \frac{3}{2}.$$

(Josef Minařík)

Řešení:
Nerovnost přenásobíme na

$$\frac{m}{a_1} + \frac{m}{a_2} + \dots + \frac{m}{a_k} \leq \frac{3m}{2}$$

a dokážeme tuto ekvivalentní nerovnost.

Vyřešme nejprve případ, kdy se mezi čísly $a_1, \dots, a_k$ vyskytuje číslo 1. BÚNO nechť $a_1 = 1$, potom a_1 dělí všechna čísla $1, \dots, m$. Potom už musí být $k = 1$: kdybychom měli ještě nějaké a_2, pak by ze zadání nepřevyšovalo m, ale přitom by bylo násobkem a_1 i a_2, což je spor se zadáním. Máme tedy $k = 1$ a nerovnost $\frac{m}{a_1} = m \leq \frac{3m}{2}$ zjevně platí. Ve zbytku řešení nyní můžeme předpokládat, že všechna a_i jsou větší než 1.

Označme $N(a_i)$ množinu násobků a_i mezi čísly $1, \dots, m$. Násobkem a_i je každé a_i-té číslo, takže $N(a_i)$ má přesně $\left\lfloor \frac{m}{a_i} \right\rfloor$ prvků.[1] Dále ze zadání víme, že jednotlivé množiny $N(a_i)$ jsou navzájem disjunktní, neboť žádné z čísel $1, \dots, m$ nemá jako dělitele dvě různá a_i. Jelikož navíc předpokládáme, že žádné z a_i není 1, víme, že žádná množina $N(a_i)$ neobsahuje číslo 1. Tím pádem jsou jednotlivé $N(a_i)$ navzájem disjunktní podmnožiny $(m-1)$-prvkové množiny $\{2, 3, \dots, m\}$, takže máme

$$m - 1 \geq |N(a_1)| + |N(a_2)| + \dots + |N(a_k)| = \left\lfloor \frac{m}{a_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{a_2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{m}{a_k} \right\rfloor.$$

[1] Pro reálné číslo x značí $\lfloor x \rfloor$ *dolní celou část* z x, tedy největší celé číslo, které nepřevyšuje x.

Dále využijeme vztahu $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. Díky němu máme odhad na levou stranu dokazované nerovnosti pomocí

$$\begin{aligned}\frac{m}{a_1} + \frac{m}{a_2} + \cdots + \frac{m}{a_k} &\leq \left(\left\lfloor \frac{m}{a_1} \right\rfloor + 1 \right) + \left(\left\lfloor \frac{m}{a_2} \right\rfloor + 1 \right) + \cdots + \left(\left\lfloor \frac{m}{a_k} \right\rfloor + 1 \right) \\ &\leq \left\lfloor \frac{m}{a_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{a_2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{a_k} \right\rfloor + k \leq m - 1 + k.\end{aligned}$$

K dokázání nerovnosti $\frac{m}{a_1} + \frac{m}{a_2} + \cdots + \frac{m}{a_k} \leq \frac{3m}{2}$ už tak stačí, abychom dokázali $k \leq \frac{m}{2} + 1$.

Pro spor tedy předpokládejme, že $k > \frac{m}{2} + 1$. Mezi čísly $1, \ldots, m$ máme přesně $\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ lichých čísel.[2] Rozdělme tedy tato čísla do $\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ skupinek podle jejich největšího lichého dělitele. Dostaneme tak skupinky

$$\begin{array}{rrrrrl} 1, & 2, & 4, & 8, & 16, & \ldots; \\ 3, & 6, & 12, & 24, & 48, & \ldots; \\ 5, & 10, & 20, & 40, & 80, & \ldots; \\ \vdots & & & & & \end{array}$$

Pro horní celou část platí odhad $\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil < \frac{m}{2} + 1$, takže jelikož $k > \frac{m}{2} + 1$, musí už nutně být $k > \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$. Z Dirichletova principu tak v jedné z výše uvedených skupinek musí ležet dvě různá a_i, a_j. BÚNO uvažme $a_i < a_j$. Čísla ve stejné skupince se liší jen přenásobením o nějakou mocninu dvojky, takže $a_j = a_i \cdot 2^r$ pro nějaké přirozené r. To pak ale speciálně znamená, že $a_i \mid a_j$, takže číslo $a_j \leq m$ je násobkem jak a_j, tak a_i, což je spor se zadáním.

Určitě tak muselo platit $k \leq \frac{m}{2} + 1$, což už dohromady s předchozím odhadem dá

$$\frac{m}{a_1} + \frac{m}{a_2} + \cdots + \frac{m}{a_k} \leq \frac{3m}{2},$$

jak jsme chtěli.

Poznámky:
Z došlých devíti řešení byla jen dvě, která si zasloužila nějaké body. Obě z nich vedla až k cíli a více či méně odpovídala vzorovému řešení.

Část ze zbylých řešení rozebrala několik neobecných případů (za což pochopitelně body uděleny nebyly). Opakovalo se taky řešení, které jako $a_1, \ldots, a_k$ vzalo $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor, \ldots, m$, v žádném z nich ale nebyl důkaz optimality (zřejmě proto, že toto není optimální přiřazení), proto za toto řešení též nebyly uděleny žádné body. *(Daniel Perout, Matěj Doležálek)*

Úloha 6.

PraSestán je tvořen tabulkou s $m \times n$ políčky, na každém z nichž se pase nějaké množství prasat. Pohraničím obdélníkové oblasti O tvořené políčky tabulky rozumíme množinu těch políček, která neleží v O, ale která s některým políčkem v O sousedí stranou. Obdélníková oblast O je bohatá, pokud se na každém políčku v O pase více prasat než na každém políčku v pohraničí O, které s ním sdílí sloupec či řádek (nemusí však nutně sousedit). Kolik nejvíce bohatých obdélníkových oblastí se může v PraSestánu nacházet, pokud smíme libovolně upravit počty prasat na jednotlivých políčkách?

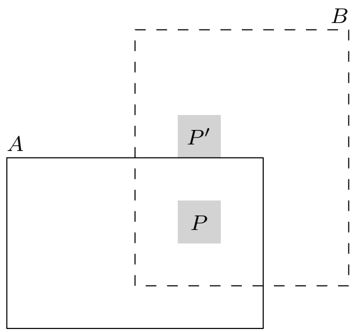
[2] Pro reálné číslo x značí $\lceil x \rceil$ *horní celou část* z x, tedy nejmenší celé číslo, které je větší nebo rovno x.

Například v následující tabulce s počty prasat jsou bohatými právě všechny zvýrazněné obdélníkové oblasti (včetně celého PraSestánu):

$\boxed{5}$	2	6
4	11	8
1	$\boxed{13}$	7

(Pavel Hudec)

Řešení:
Ukážeme, že každé políčko může být nejmenší v nejvýše jedné bohaté oblasti. Předpokládejme pro spor, že políčko P je nejmenší ve dvou různých obdélníkových oblastech, označme je A a B. Nyní se podívejme na políčko P', které je v pohraničí jedné oblasti a zároveň leží uvnitř druhé. Takové políčko vždy existuje, protože oblasti A a B se musí překrývat a zároveň nejsou stejné. Dostáváme spor, protože počet prasat na P má být v obou oblastech minimální, ale zároveň musí být větší než počet prasat na P', aby oblasti byly bohaté. Každé políčko je proto nejmenší v maximálně jedné bohaté oblasti, a bohatých oblastí tak může být nejvýše mn.



Ještě zbývá najít tabulku s právě mn bohatými oblastmi. To je ovšem jednoduché, stačí umístit $x + y$ prasat na políčko o souřadnicích x, y (číslováno od levého horního rohu). Všechny oblasti obsahující pravý dolní roh potom budou bohaté.

2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

Poznámky:

Přibližně polovina řešitelů přišla na to, že maximální počet bohatých oblastní je mn. Nejčastější špatnou odpovědí bylo $\lceil \frac{mn}{2} \rceil$. Důkaz, že více nejde, potom zvládlo ještě méně řešitelů. Většina z nich používala indukci, která sice funguje, ale není příliš elegantní. Úlohu nikdo nevyřešil vzorovým způsobem. *(Josef Minařík)*

Úloha 7.

Jsou dána kladná reálná čísla a, b, c, d splňující nerovnosti $a, c > 1$ a $b, d < 1$. Dokažte, že platí

$$\frac{a}{ab+c+1} + \frac{b}{bc+d+1} + \frac{c}{cd+a+1} + \frac{d}{da+b+1} > 1.$$

(Pavel Hudec)

Trikové (hezké) řešení:

Všimneme si, že pokud máme dvojici reálných čísel (x, y), jež splňují $x > 1 > y$, tak platí $(1-y)(x-1) > 0$, což se po roznásobení upraví na $x + y > xy + 1$. Použijeme-li toto pozorování pro různé dvojice (a, b), (a, d), (c, b) a (c, d), tak dostaneme nerovnosti

$$\begin{aligned} a+b &> ab+1, \\ b+c &> bc+1, \\ c+d &> cd+1, \\ d+a &> da+1. \end{aligned}$$

K dokázání zadané nerovnosti nyní zbývá pouze použít nejprve tyto čtyři nerovnosti a poté kladnost čísel a, b, c, d, abychom odhadli jmenovatele zlomků:

$$\begin{aligned} &\frac{a}{ab+c+1} + \frac{b}{bc+d+1} + \frac{c}{cd+a+1} + \frac{d}{da+b+1} > \\ > &\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} > \\ > &\frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = 1. \end{aligned}$$

Standardní (mírně ošklivé) řešení:

Obdobně jako v prvním řešení můžeme odvodit i nerovnosti $a(a-1)(1-b) > 0$, $b(b-1)(1-c) > 0$, $c(c-1)(1-d) > 0$ a $d(d-1)(1-a) > 0$. Zároveň zjevně platí $ab > 0$, $bc > 0$, $cd > 0$ a $da > 0$. Sečtením těchto osmi nerovností a ekvivalentními úpravami získáváme:

$$\begin{aligned} a(a-1)(1-b) + b(b-1)(1-c) + c(c-1)(1-d) + d(d-1)(1-a) + ab + bc + cd + da > 0, \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2bc + 2cd + 2da > a^2b + b^2c + c^2a + d^2a + a + b + c + d, \\ (a+b+c+d)^2 > a^2b + b^2c + c^2d + d^2a + a + b + c + d + 2ac + 2bd. \end{aligned}$$

Nyní můžeme na levou stranu nerovnosti ze zadání použít CS zlomkobijce[3] po rozšíření všech zlomků jejich čitateli, abychom ji zredukovali na výše dokázanou:

$$\begin{aligned} &\frac{a}{ab+c+1} + \frac{b}{bc+d+1} + \frac{c}{cd+a+1} + \frac{d}{ad+b+1} = \\ > &\frac{a^2}{a^2b+ac+a} + \frac{b^2}{b^2c+bd+b} + \frac{c^2}{c^2d+ca+c} + \frac{d^2}{d^2a+db+d} \geq \\ > &\frac{(a+b+c+d)^2}{a^2b+b^2c+c^2d+d^2a+a+b+c+d+2ac+2bd} > 1. \end{aligned}$$

[3] Pokud ses s touto nerovností dosud nesetkal(a), můžeš si o ní něco přečíst například v prvním dílu seriálu o nerovnostech na *https://prase.cz/archive/29/9.pdf*.

Poznámky:
Většina správných řešení se vydala poněkud pracnější cestou skrz CS zlomkobijce. Proto jsem se rozhodl všechny postupy, které se zcela vyhnuly roznásobování, odměnit kladným imaginárním bodem. Nejčastějším kamenem úrazu v chybných řešeních byla neopodstatněná tvrzení o tom, jaká volba a, b, c, d je optimální (například že můžeme BÚNO brát $b = 0$ nebo $d = 0$). I vyřešením speciálních případů ovšem bylo možné získat částečné body, pokud se použitá metoda dala s trochou práce využít i při důkazu celé nerovnosti (například za pozorování, že platí $(1 - a)(1 - b) < 0$).

(Danil Koževnikov)

Úloha 8.

U kulatého stolu je na židlích rozesazeno n reálných čísel. Židli ž nazveme dobrou, pokud má nějaká skupinka[4] po sobě jdoucích židlí začínající od ž a pokračující po směru hodinových ručiček nezáporný součet svých čísel. Dokažte, že součet čísel na dobrých židlích je nezáporný.

(Pavel Hudec)

Řešení:
Pro každou dobrou židli označíme *vhodnou skupinku* tu nejkratší skupinku židliček, která je od ní po směru hodinových ručiček a jejíž součet je nezáporný. Podívejme na jakoukoliv dobrou židli. Pro ni vhodná skupinka nechť má m židlí, jejichž čísla označíme z_1 (což je číslo na naší vybrané dobré židli) až z_m. Označme z_j číslo na libovolné jiné židli v této skupince.

Jistě platí

$$\sum_{i=1}^{j-1} z_i < 0,$$

jinak by skupinka židlí s čísly od z_1 do z_{j-1} byla kratší. Kdyby platilo $\sum_{i=j}^{m} z_i < 0$, sečtením obou nerovností bychom dostali $\sum_{i=1}^{m} z_i < 0$, což není možné. Jistě tedy platí

$$\sum_{i=j}^{m} z_i \geq 0.$$

To znamená nejen to, že židle s číslem z_j je dobrá, ale zejména to, že vhodná skupinka pro židli s číslem z_j nesahá za židli s číslem z_m. Z toho plyne, že žádné dvě nejkratší skupinky se neprotínají částečně – buď nemají žádnou společnou židli, nebo je jedna z nich podmnožinou druhé.

Prozkoumejme teď ty skupinky dobrých židlí, které nejsou podmnožinou větších skupinek, říkejme jim *maximální vhodné*. Každá dobrá židle je v právě jedné maximální vhodné skupince a všechny židle těchto skupinkách jsou dobré. Sečtením čísel na židlích ve všech maximálních vhodných skupinkách tak získáme celkový součet čísel sedících na dobrých židlích. Přitom každá z maximálních vhodných skupinek má nezáporný součet čísel na jejích židlích (protože sama je vhodná pro nějakou židli), tedy nám musí vyjít nezáporné číslo.

Jiné řešení (trikové):
Nejdříve si všimneme, že všechny židle s nezáporným číslem jsou jistě dobré (stačí vzít skupinku délky 1, ta má jistě nezáporný součet).

Nyní všechny židle, které nejsou dobré, prostě oddělejme od stolu. Protože jsme oddělali jen židle se zápornými čísly, jistě všechny zbylé židle jsou stále dobré. Z pro nich vhodných skupinek jsme totiž možná oddělali nějaká záporná čísla, ale součet skupinky tím jistě nepřestal být nezáporný.

Zbývá ukázat, že nyní je součet čísel na všech zbývajících židlích u stolu nezáporný.

Sedněme si na libovolnou židli. Protože je dobrá, musí pro ni existovat vhodná skupinka. Přesedněme si na první židli za touto skupinkou a celý postup opakujeme. Takto tedy skáčeme kolem stolu, nejpozději po $n + 1$ krocích si však sedneme na židli, kde jsme již seděli.

[4] Skupinkou po sobě jdoucích židlí může být i jedna židle sama o sobě.

Zopakujme celý postup s tím, že první zvolená židle bude právě tato opakující se židle. Budeme si pamatovat číslo s, začneme s $s = 0$. Vždy, když přesedáme, si k číslu s přičteme součet čísel ve skupince, kterou jsme právě přeskočili. Až se vrátíme na židli, kde jsme začali, máme jistě k koleček kolem stolu, kde k je přirozené číslo. Náš celkový součet čísel s je tedy k-násobek součtu všech čísel. Protože celkový součet s je nezáporný (vždyť vznikl sečtením nezáporných skupinek), je jistě nezáporný i součet všech čísel u stolu.

Poznámky:
Na úloze bylo zákeřné to, že dokazované tvrzení působilo velmi triviálně. Někteří řešitelé tak skončili dříve, než bylo potřeba. Za to bohužel nedostali mnoho bodů. *(Václav Janáček)*