Rozdíly a podíly

2. JARNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Pro reálná čísla a, b, c platí, že $a+b$, $a+c$ i $b+c$ jsou (v tomto pořadí) po sobě jdoucí celá čísla a navíc je $a+b$ liché. Dokažte, že a, b, c jsou po sobě jdoucí celá čísla. *(Pavel Hudec)*

ŘEŠENÍ:
Z toho, že $a+b$, $a+c$, $b+c$ jsou po sobě jdoucí celá čísla, plyne

$$a+c=a+b+1 \iff c=b+1,$$
$$b+c=a+c+1 \iff b=a+1.$$

Ze zadání je $a+b$ liché celé číslo, tedy $a+b=2k+1$, kde k je nějaké celé číslo. Už víme, že $b=a+1$, proto $a+b=a+a+1=2a+1$. Z toho plyne $2a+1=2k+1$, tedy $a=k$. O k jsme předpokládali, že je to celé číslo, takže i a je celé.

Z rovnice $b=a+1$ je vidět, že b je o jedna větší než a, a b je tedy celé číslo následující po a. Z $c=b+1$ analogicky vidíme, že c je o jedna větší než b, a proto je c celé číslo následující po b.

Tím jsme dokázali, že a, b, c jsou po sobě jdoucí celá čísla.

POZNÁMKY:
Většina odevzdaných řešení byla zcela správná, v některých postupech ale nebylo dostatečně zdůvodněno, že a, b, c jsou celá čísla. *(Zuzana Svobodová)*

Úloha 2.

U kulatého stolu sedí Radeček a 2021 šimpanzů.[1] *Každý šimpanz vlastní nenulový počet banánů, přičemž žádní dva šimpanzi jich nemají stejně mnoho, zatímco Radeček nemá žádné banány. Rozdíl počtů banánů mezi libovolnými dvěma sousedy u stolu je vždy buďto 2, nebo 3. Určete, kolik nejvíce banánů může nějaký šimpanz vlastnit.* *(Matěj Doležálek)*

ŘEŠENÍ:
Hledané maximum je 3032 banánů.

Šimpanz naproti Radečkovi je od něj vzdálen z obou stran 1011. Spočítáme, kolik nejvíc může mít banánů. Žádní dva šimpanzi nemají stejný počet banánů, takže jeden Radečkův soused musí mít dva banány. S každým dalším šimpanzem se počet banánů zvýší maximálně o tři, takže šimpanz naproti Radečkovi nemá víc než $2+1010\cdot 3=3032$ banánů. Každý jiný šimpanz je od Radečka v nějakém směru vzdálen maximálně 1010, tudíž nemůže mít víc než 3030 banánů.

Šimpanz naproti Radečkovi opravdu může mít 3032 banánů. Sousedům Radečka dáme dva a tři banány. Každý další šimpanz ve směru od Radečka k prostřednímu šimpanzovi bude mít o tři banány víc než šimpanz předchozí. Tedy n-tý šimpanz od Radečka z jedné strany bude mít $3n$ banánů, z druhé strany $3n-1$ banánů. Takto pokračujeme až k 1010. šimpanzům od Radečka, kteří budou mít jeden 3030 a druhý 3029 banánů. Prostřední šimpanz tedy může mít $3030+2=3029+3=3032$ banánů. Zároveň vidíme, že žádní dva šimpanzi nemají stejný počet banánů.

[1] Radeček není šimpanz.

Poznámky:
Většina řešení byla správná s obdobným postupem jako ve vzorovém řešení. V řešeních nehodnocených plným počtem bodů obvykle autoři zapomněli na podmínku ze zadání, že žádní dva šimpanzi nemají banánů stejně. *(Anna Mlezivová)*

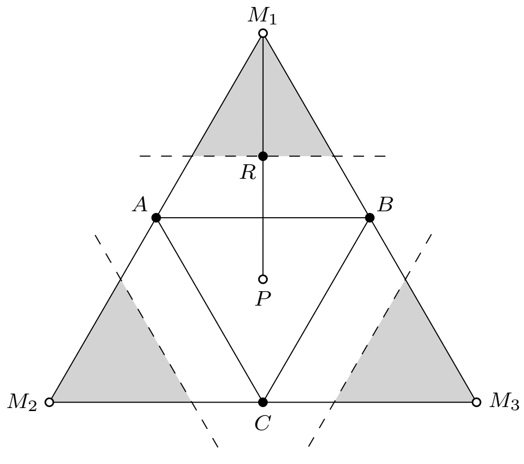
Úloha 3.

Matěj a Pavel se ocitli na planetě tvaru pravidelného čtyřstěnu. Matěj si postavil stan v jednom z vrcholů, zatímco Pavel se utábořil ve středu protilehlé stěny. Oba se mohou pohybovat pouze po povrchu planety. Označme M plochu té části povrchu, kam to má Matěj od svého stanu blíž než Pavel od toho svého. Analogicky označme P plochu té části, kam to má blíž Pavel. Určete hodnotu podílu $\frac{M}{P}$. *(Josef Minařík)*

Řešení:
Nejprve si rozmyslíme, jak vypadají oblasti, které patří Matějovi a Pavlovi, resp. hranice mezi nimi. Označme P bod, kde sedí Pavel, a M vrchol, kde se nachází Matěj. Zvolme libovolný bod X na planetě:

(1) Pokud X leží na stěně, kde táboří Pavel, pak je nejkratší cestou PX úsečka mezi těmito body vedoucí po této stěně. Nejkratší cestou MX je lomená úsečka, která vede přes nejbližší hranu stěny, na níž leží X.
(2) Pokud X leží na jedné ze zbylých tří stěn, pak je nejkratší cestou MX úsečka mezi těmito body. Nejkratší cestou PX je lomená úsečka, která vede přes hranu mezi stěnou obsahující X a stěnou, kde sedí Pavel.

Všechny tyto nejkratší cesty lze znázornit jako úsečky v síti našeho čtyřstěnu, pokud si stěnu, kde sedí Pavel, dáme doprostřed.



Vrchol, kde sedí Matěj, se rozloží do tří vrcholů, označme je postupně M_1, M_2, M_3. Vrcholy stěny, na níž sedí Pavel, označme A, B, C. Potom jsou M_1AB, M_2BC, M_2CA a ABC shodné rovnostranné trojúhelníky.

Hranice mezi územími Pavla a Matěje budou právě osy úseček M_1P, M_2P a M_3P. Středy těchto úseček označme postupně R, S a T. Úsečka M_1P leží na ose úsečky AB a skládá se z těžnice v trojúhelníku M_1AB a třetiny těžnice v trojúhelníku ABC vedoucí od P ke středu strany AB. Označíme-li tedy t délku těžnice v libovolném trojúhelníku, pak $|M_1P| = \frac{4}{3}t$ a $|M_1R| = \frac{2}{3}t$. Pro M_2 a M_3 platí ze symetrie totéž.

Koeficient podobnosti jednoho trojúhelníku z Matějova území a stěny čtyřstěnu je $\frac{2}{3}$. Obsah Matějova území je tak roven $M = 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot S = \frac{4}{3}S$, kde S značí obsah jedné stěny čtyřstěnu. Obsah Pavlova území je roven povrchu čtyřstěnu bez obsahu Matějovo území, tj. $P = 4S - \frac{4}{3}S = \frac{8}{3}S$, a proto $\frac{M}{P} = \frac{4/3}{8/3} = \frac{1}{2}$. *(„madam Verča“ Hladíková)*

Úloha 4.

Mějme prvočíslo ve tvaru $p = 2^{2^n} + 1$ pro nějaké přirozené n. Dokažte, že p se nedá zapsat jako rozdíl dvou pátých mocnin přirozených čísel. (Radek Olšák)

Řešení:

Pro spor nechť existují $a \geq b \geq 1$, $a, b \in \mathbb{N}$ taková, že

$$p = 2^{2^n} + 1 = a^5 - b^5 = (a-b)\left(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4\right).$$

Povedlo se nám prvočíslo vyjádřit jako součin dvou přirozených čísel, nutně tedy jedno z nich je rovno p a druhé 1. Protože a, b jsou přirozená, tak $a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4 > 1$, takže musí platit $a - b = 1$ neboli $a = b + 1$. Dosazením dostáváme

$$p = 2^{2^n} + 1 = (b+1)^5 - b^5 = b^5 + 5b^4 + 10b^3 + 10b^2 + 5b + 1 - b^5.$$

To můžeme dále upravit na

$$2^{2^n} = 5\cdot(b^4 + 2b^3 + 2b^2 + b).$$

Vidíme, že 5 dělí pravou stranu rovnice, takže také $5 \mid 2^{2^n}$. To ale pro žádné přirozené n nemůže platit, tedy jsme dospěli ke sporu.

Poznámky:

Většina došlých řešení se ubírala naprosto stejným směrem jako vzorové řešení. *Zděněk Pezlar* si všiml skutečnosti, že $5 \mid (b+1)^5 - b^5 - 1$ lze také dokázat pomocí malé Fermatovy věty. Modulo 5 z MFV totiž platí $(b+1)^5 - b^5 - 1 \equiv (b+1) - b - 1 \equiv 0 \pmod 5$. *(Lenka Kopfová)*

Úloha 5.

Na stole leží kartičky s čísly $1, 2, 3, \ldots, a+b$ pro nějaká přirozená a, b. Nejprve přijde Hedvika a některé karty ze stolu sebere, avšak ponechá ostře více než polovinu karet. Ukažte, že Lucka poté dovede ze zbylých karet na stole vybrat dvě, jejichž rozdíl je a nebo b. (Radek Olšák)

Řešení:

Řekneme, že dvojice různých kartiček je zajímavá, pokud je rozdíl čísel na těchto kartičkách roven a nebo b. Pro libovolnou kartičku s číslem k platí, že právě jedno z čísel $k-a$, $k+b$ se také vyskytuje na nějaké kartičce. Vskutku, $k-a$ se vyskytuje na kartičce právě tehdy, když je kladné, tedy když $k > a$, zatímco $k+b$ se vyskytuje na kartičce právě tehdy, když $k+b \leq a+b$, což lze přepsat jako $k \leq a$. Vždy tedy nastane právě jedna z těchto možností. Totéž analogicky platí pro $k-b$, $k+a$. Teď rozlišíme dva případy.

Pokud $a \neq b$, tak z úvodního pozorování dostaneme, že každá karta je součástí právě dvou zajímavých dvojic. Jelikož se každá zajímavá dvojice skládá ze dvou karet, máme právě $a+b$ zajímavých dvojic. Každá karta odebraná Hedvikou způsobila, že maximálně dvě zajímavé dvojice přišly o kartu, a tedy, jelikož Hedvika odebrala méně než půlku karet, nějaká zajímavá dvojice zbyla. Tu může Lucka vybrat.

Pokud $a = b$, tak je každá karta součástí právě jedné zajímavé dvojice, tedy těchto dvojic je a a Hedvika odebráním jedné karty připraví maximálně jednu zajímavou dvojici o kartu. Jelikož odebrala méně než polovinu, tedy a, karet, tak Lucka opět může vybrat nějakou zajímavou dvojici.

Poznámky:
Většina řešitelů si s úlohou poradila. Bohužel se v několika případech řešení rozbilo v případě $a = b$, který poté nebyl zvlášť rozebrán, za což jsem strhával bod. Občas se také objevila situace, že v řešení bylo bez důkazu přímo řečeno, že každá karta je v případě $a \neq b$ ve dvou zajímavých dvojicích. To se dá odpozorovat na konkrétních případech, ale je potřeba toto tvrzení pečlivě dokázat. Nakonec bych rád zmínil, že celé řešení se dá pozměnit tím, že se na všechna čísla dívá modulo $a + b$ a tedy rozdíl a a rozdíl b jsou to samé. S tímto nápadem přišel *Samuel Rosiar.* *(Pavel Turek)*

Úloha 6.

Michal má rostoucí k-prvkovou posloupnost prvočísel $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Všiml si, že jisté přirozené číslo d splňuje $p_{i+1} - p_i = d$ pro každé $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ a že navíc $d < k$. Najděte všechny posloupnosti, které může Michal mít. *(Matěj Doležálek)*

Řešení:
Ukážeme, že Michal může mít právě jednu z posloupností $(2, 3)$ a $(3, 5, 7)$. Ty očividně vyhovují zadání, zbývá tak dokázat, že žádná další řešení neexistují.

Nejprve vyřešme případ $d = 1$. Potom $k \geq 2$ a jedno z prvočísel p_1, p_2 je sudé. Jedná se tedy o dvojku, která je nejmenším prvočíslem, takže nutně $p_1 = 2$. Následně $p_2 = 3$ a posloupnost už nelze dále prodloužit, neboť 4 není prvočíslo.

Dále řešme $d = 2$. Potom $k \geq 3$ a prvočísla p_1, p_2, p_3 nabývají po dvou různých zbytků modulo 3. Jedno z nich je tak násobkem tří, takže už se jedná přímo o trojku. Číslo $3 - 2 = 1$ není prvočíslo, takže trojka musí být v posloupnosti prvním členem. Tedy $p_1 = 3$, $p_2 = 5$ a $p_3 = 7$. Tuto posloupnost už dále nelze prodloužit, neboť 9 není prvočíslo.

Konečně ukažme, že vyšší d už nemůže nastat. Pro spor nechť $d \geq 3$. Rozdíl po sobě jdoucích členů Michalovy posloupnosti je vždy d, takže pro $i \in \{1, \ldots, k\}$ platí $p_i = p_1 + (i - 1)d$. Modulo $d - 1$ tato rovnost přejde v kongruenci $p_i \equiv p_1 + i - 1$. Michalova posloupnost tak modulo $d - 1$ navštěvuje po sobě jdoucí zbytkové třídy. Platí $k \geq d + 1$, takže mezi prvočísly $p_2, \ldots, p_d$ najdeme všechny zbytky modulo $d - 1$. Speciálně $d - 1 \mid p_j$ pro nějaké $j \geq 2$. Přitom platí $d - 1 > 1$ a zároveň $p_j = p_1 + (j - 1)d \geq d > d - 1$, takže jsme pro prvočíslo p_j našli dělitele, který není 1 ani p_j samo. To je spor, takže pro $d > 2$ už skutečně žádná vyhovující posloupnost neexistuje.

Poznámky:
Správná řešení se typicky ubírala podobným směrem jako to vzorové. Mnozí si zkomplikovali život tím, že se na posloupnost místo modulo $d - 1$ dívali modulo nějaké prvočíslo $q \leq d$. To funguje podobně, ale požadavek na prvočíselnost je zde celkem zbytečný (bohatě stačí nesoudělnost s d). Příslušná řešení pak byla k úspěšnému dokončení často nucena sáhnout po Bertrandově postulátu, což je ve srovnání s obtížností úlohy neúměrně silná zbraň.

Částečné body jsem uděloval hlavně za identifikování obou vyhovujících posloupností a za vyloučení dalších řešení v případech $d \leq 2$. Naopak jsem z jinak správného řešení body strhával, pokud řešitelé prohlásili, že jedno z $p_1, \ldots, p_k$ musí být násobek $d - 1$ (nebo nějakého prvočísla $q < k$) a to je spor s prvočíselností všech p_i – tento argument totiž opomíjí možnost $p_1 = d - 1$ (resp. $p_1 = q$), kterou je třeba dořešit. *(Matěj Doležálek)*

Úloha 7.

Okolo kruhu je rozmístěno 2^n nezáporných celých čísel. V jednom kroku připíšeme mezi každou dvojici sousedních čísel absolutní hodnotu jejich rozdílu a smažeme původní čísla, máme tedy znovu 2^n čísel. Dokažte, že po konečném počtu kroků dostaneme samé nuly. *(Josef Minařík)*

Řešení:
Nejprve si povšimněme, že maximum v kruhu se nezvětšuje, protože $|a - b| \leq \max(a, b)$ pro $a, b \geq 0$. Dále si všimněme, že kdyby měla všechna čísla nějakého společného dělitele, můžeme je jím vydělit, aniž bychom tím ovlivnili řešení úlohy. Ukážeme, že po nějakém konečném počtu operací budou

všechna čísla dělitelná dvěma. Tím bude úloha vyřešena, protože všechna čísla vydělíme dvěma a tento proces opakujeme. Při každém vydělení se maximum zmenší, to ale nemůže pokračovat do nekončena, takže po nějaké době bude maximum nulové. Úlohu tedy dále řešme modulo 2. Ukážeme si dva způsoby, jak to udělat.

Řešení indukcí:
Budeme postupovat indukcí podle n. Pro $n = 1$ tvrzení určitě platí, nuly dostaneme už po dvou krocích. Předpokládejme, že tvrzení platí pro n, a dokažme jej pro $n+1$. Uvažujme, co se stane po dvou krocích. Využijeme toho, že $a - b \equiv a + b \pmod 2$. Jestliže jsme někde měli vedle sebe a, b, c, na místě b se po dvou krocích objeví $a + 2b + c \equiv a + c \pmod 2$. To je stejné, jako naše původní operace, ale „ob jedna". Tím se nám kruh velikosti 2^{n+1} rozložil na dva velikosti 2^n, které jsou nezávislé, a tvrzení pro ně platí z indukčního předpokladu.

Řešení trikem s polynomem:
Čísla v kruhu interpretujeme jako koeficienty polynomu nad $\mathbb{Z}_2$. Všimněme si, že každý krok odpovídá násobení $1 + x \pmod{x^{2^n} + 1}$. Provedení 2^n kroků je tedy ekvivalentní vynásobení

$$(1 + x)^{2^n} = 1 + x^{2^n} \equiv 0 \pmod{x^{2^n} + 1},$$

protože nad $\mathbb{Z}_2$ platí $(1 + x)^2 = 1 + x^2$. Tím jsme dokázali, že po 2^n operacích dostaneme samé nuly.

Poznámky:
Většina řešitelů neuvažovala dělitelnost dvěma, ale namísto toho dokazovala, že po nějaké době budou okolo kruhu jenom dvě různá čísla. To sice taky funguje, ale je to o něco méně elegantní. Všechna správná řešení úlohu nějakým způsobem zjednodušila na 0 a 1, ale každé potom tento zjednodušený případ vyřešilo nějak jinak. *(Josef Minařík)*

Úloha 8.

Najděte všechny dvojice prvočísel p, q, pro něž jsou oba podíly

$$\frac{(2p^2 - 1)^p + 1}{p + q}, \qquad \frac{(2q^2 - 1)^q + 1}{p + q}$$

celá čísla. *(Danil Koževnikov)*

Řešení:
Ukážeme, že řešeními jsou právě všechny dvojice s $p = q > 2$.

Předpokládejme nejprve, že jsou obě prvočísla stejná. Potom požadujeme, aby platila kongruence $(2p^2 - 1)^p + 1 \equiv 0 \pmod{2p}$. Snadno ověříme, že $p = 2$ nevyhovuje, zatímco pro libovolné liché p platí

$$(2p^2 - 1)^p + 1 \equiv (-1)^p + 1 \equiv -1 + 1 \equiv 0 \pmod{2p},$$

takže v tomto případě vyhovují právě lichá prvočísla.

Teď zbývá ukázat, že neexistuje žádné řešení s $p \neq q$. Ze symetrie můžeme BÚNO předpokládat $p > q$. Označme zbytkovou třídu $2p^2 - 1$ po dělení $p + q$ jako x. Potom první podmínku můžeme přepsat na $x^p + 1 \equiv 0 \pmod{p + q}$. Jelikož $p^2 - q^2 = (p - q)(p + q)$, tak $p^2 \equiv q^2 \pmod{p + q}$, neboli $2q^2 - 1 \equiv x \pmod{p+q}$ a druhá podmínka je ekvivalentní $x^q + 1 \equiv 0 \pmod{p+q}$. Označme nyní řád[2] x modulo $p + q$ jako d. Umocněním zadaných kongruencí na druhou dostáváme, že platí $x^{2p} \equiv x^{2q} \equiv 1 \pmod{p + q}$. Z vlastností řádu pak vyplývá, že $d \mid 2p$, $d \mid 2q$, jelikož jsou p, q různá prvočísla, musí nutně platit $d \mid 2$.

[2] d je tedy nejmenší přirozené číslo, pro nějž platí $x^d \equiv 1 \pmod{p + q}$; pokud jsi o řádech nikdy neslyšel(a), tak se o nich můžeš dozvědět více například na *http://iksko.org/files/sbornik5.pdf.*

To znamená, že $x^2 \equiv 1 \pmod{p+q}$, neboli $(2p^2-1)^2 \equiv 1 \pmod{p+q}$. Spolu s první podmínkou $(2p^2-1)^p \equiv -1 \pmod{p+q}$ to znamená (nezapomínejme, že p je liché, jelikož $p > q \geq 2$), že $2p^2 - 1 \equiv -1 \pmod{p+q}$, neboli $p+q \mid 2p^2$. Jelikož jsou ovšem různá prvočísla nesoudělná, tak platí $\mathrm{NSD}(p+q,p) = \mathrm{NSD}(q,p) = 1$, tedy $p \nmid p+q$. Jedinými děliteli $2p^2$, kteří nejsou dělitelní p, jsou dělitelé dvojky, takže dostáváme $p+q \mid 2$, což je zřejmě spor s $p+q > 2$. Pro různá p, q tedy neexistují žádná řešení a máme hotovo.

Poznámky:

Většina došlých řešení se úspěšně dopracovala k cíli podobným způsobem jako vzorák. Některá z nich si ovšem zbytečně přidělávala nějakou práci navíc. Nejnáročnějším krokem v řešení bylo uvědomit si, že se vyplatí zkoumat řády prvků modulo $p+q$, zbytek úlohy je pak pouze poučným příkladem toho, jak se tato velmi známá a užitečná technika dá využívat v praxi.

(Danil Koževnikov)