Násobky

2. jarní série — Vzorové řešení

Úloha 1.

Najděte sto (ne nutně různých) přirozených čísel, jejichž součet je roven jejich nejmenšímu společnému násobku. *(Lenka Kopfová)*

Řešení:
Řešením jsou například čísla

$$1, \quad 1, \quad \ldots, \quad 1, \quad 2, \quad 2, \quad 101.$$

Jejich součet je $97 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 101 = 202$, což je rovno jejich nejmenšímu společnému násobku $2 \cdot 101 = 202$.

Poznámky:
Úloha má mnoho možných odpovědí, přibližně polovina řešitelů našla to vzorové. Část řešitelů se také snažila popsat, jak na řešení přišla. To však v této úloze vůbec není potřeba.

(Josef Minařík)

Úloha 2.

Uvažujme dvojici přirozených čísel a, b takovou, že $a + 13b$ je násobkem 11 a zároveň $a + 11b$ je násobkem 13. Určete nejmenší možnou hodnotu součtu $a + b$. *(Marian Poljak)*

Řešení:
Ze zadání platí $11 \mid a + 13b$, což můžeme postupně upravit:

$$\begin{aligned} &11 \mid a + 13b,\\ &11 \mid 6 \cdot (a + 13b),\\ &11 \mid 6a + 78b,\\ &11 \mid 6a + b + 7 \cdot 11b,\\ &11 \mid 6a + b. \end{aligned}$$

Obdobně můžeme postupovat pro $13 \mid a + 11b$:

$$\begin{aligned} &13 \mid a + 11b,\\ &13 \mid 6 \cdot (a + 11b),\\ &13 \mid 6a + 66b,\\ &13 \mid 6a + b + 5 \cdot 13b,\\ &13 \mid 6a + b. \end{aligned}$$

Dostáváme tak, že $11 \mid 6a + b$ a zároveň $13 \mid 6a + b$. Jelikož 11 a 13 jsou nesoudělná čísla, platí, že jejich součin dělí $6a + b$, tedy $143 \mid 6a + b$.

Hledáme nejmenší hodnotu $a+b$ a víme, že výraz $6a+b$ je násobkem 143. Začněme od nejmenší možné hodnoty $6a + b = 143$. Pokud $6a + b = 143$, což lze přepsat na $a + b = 143 - 5a$, tak $a + b$ nabývá minimální hodnoty, pokud je a největší číslo takové, které spolu s nějakým b splňuje danou rovnost. Číslo 143 můžeme celočíselně vydělit 6, čímž dostáváme výsledek 23 a zbytek po dělení 5. Tedy $143 = (6 \cdot 23) + 5$, což nám dává dvojici a, b s nejmenším možným součtem: $a = 23$, $b = 5$, $a + b = 28$. Pokud bychom uvažovali větší násobek 143, nenajdeme menší hodnotu součtu $a + b$, což lze snadno ověřit z rovnice $a + b = k \cdot 143 - 5a$ pro $k \in \mathbb{N}$.

Lze snadno ověřit, že platí $11 \mid a + 13b$, neboť když dosadíme $a = 23$, $b = 5$, dostaneme $11 \mid 23 + 65$, tedy $11 \mid 88$. Podobně dosazením do $13 \mid a + 11b$ dostaneme $13 \mid 23 + 55$, tedy $13 \mid 78$. Nejmenší možná hodnota součtu $a + b$ je tedy 28.

Poznámky:

Řešení byla veskrze pestrá a většina z nich vedla k cíli. Velká část řešení vedla na soustavy rovnic s více neznámými, pro které platily různé omezující vlastnosti. V některých řešeních nebylo korektně odůvodněno, proč je nalezené řešení opravdu minimální. *(Klárka Grinerová)*

Úloha 3.

Najděte nejmenší přirozené číslo, jehož ciferný součet je 1000 *a jehož dvojnásobek má ciferný součet* 1010. *(Natália Bátorová)*

Řešení:

Číslo $n = \overline{a_1 a_2 \dots a_k}$ má ciferný súčet $S(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i$. Pozrime sa, ako sa dvojnásobok tohto súčtu $\sum_{i=1}^{k} 2a_i$ bude líšiť od ciferného súčtu čísla $2n$. Pokiaľ $2a_i > 9$, tak do ciferného súčtu $S(2n)$ táto cifra prispeje $2a_i - 10 + 1 = 2a_i - 9$, pokiaľ $2a_i < 10$, tak prispieva $2a_i$.

Nech x je počet takých číslic a_i, že $2a_i > 9$. Potom $S(2n) = 2 \cdot S(n) - 9x$. Po dosadení čísel vidíme, že $2000 - 9x = 1010$, z čoho $x = 110$, takže v hľadanom čísle n je práve 110 číslic väčších ako 4. Ciferný súčet týchto 110 číslic je maximálne $9 \cdot 110 = 990$, a teda ciferný súčet zvyšných číslic menších ako 5 je aspoň $1000 - 990 = 10$, odkiaľ sú tam ešte aspoň 3 cifry ($\lceil \frac{10}{4} \rceil$) a číslo n má aspoň 113 cifier.

Ak by medzi tými tromi ciframi bola jednotka, ciferný súčet týchto číslic by bol maximálne $1 + 2 \cdot 4 = 9 < 10$, čiže minimálnou cifrou je 2 a zvyšné dve cifry sú nutne štvorky, ostatné cifry nutne deviatky.

Hľadaným číslom je $n = 244999\dots$, pričom deviatok je 110.

Poznámky:

Väčšina riešení bola správnych. Niektorí riešitelia, žiaľ, našli číslo spĺňajúce zadanie, no neukázali, že je najmenšie. Mnohí riešitelia rozoberali, ako jednotlivé cifry ovplyvňujú ciferný súčet dvojnásobku čísla, čo riešenie trochu komplikuje, ale väčšina došla nakoniec k správnemu záveru.

(Natália Bátorová)

Úloha 4.

Mějme trojúhelník ABC, ve kterém platí $|AB| > |AC|$ a $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$. Označme H jeho ortocentrum a I střed jeho kružnice vepsané. Dokažte, že

$$2 \cdot |\sphericalangle AHI| = 3 \cdot |\sphericalangle ABC|.$$

(Marian Poljak)

Řešení:
Označme úhel $\sphericalangle ABC$ jako β. Takto můžeme upravit rovnost, kterou máme dokázat, na $|\sphericalangle AHI| = \frac{3}{2}\beta$. Velikost úhlu $\sphericalangle BCA$ je rovna

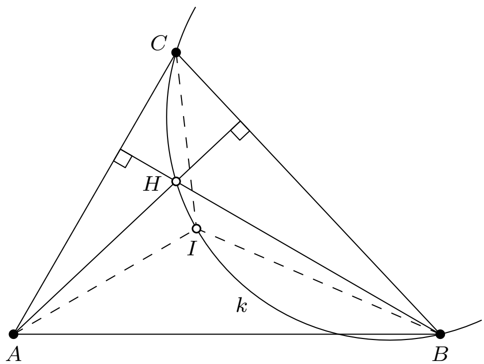
$$180^\circ - |\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle CAB| = 120^\circ - \beta.$$

Nechť k je kružnice opsaná trojúhelníku BIC. Ukážeme, že bod H leží na kružnici k: Velikost úhlu $\sphericalangle BCI$ je rovna polovině úhlu $\sphericalangle BCA$, tj. $60^\circ - \frac{\beta}{2}$, analogicky spočítáme

$$|\sphericalangle CBI| = \frac{1}{2} \cdot |\sphericalangle CBA| = \frac{\beta}{2}.$$

Potom z trojúhelníku BIC je $|\sphericalangle BIC| = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - \left(60^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = 120^\circ$. Nyní rozlišíme tři případy pro ostroúhlý, pravoúhlý a tupoúhlý trojúhelník:

- Pro libovolný ostroúhlý trojúhelník ABC a jeho ortocentrum H platí, že $|\sphericalangle BHC| = 180^\circ - |\sphericalangle BAC|$, speciálně v našem trojúhelníku je $|\sphericalangle BHC| = 120^\circ$. Protože $|\sphericalangle BIC| = |\sphericalangle BHC|$ a H leží v polorovině BCA (trojúhelník je ostroúhlý), ve které leží i I (střed kružnice vepsané leží vždy uvnitř trojúhelníku), musí H ležet na kružnici k.
- V pravoúhlém trojúhelníku není co dokazovat, neboť body C a H splynou, takže H leží na k triviálně.
- Pokud máme tupoúhlý trojúhelník ABC s tupým úhlem u vrcholu C[1] (a s ortocentrem H), pak platí symetricky $|\sphericalangle BHC| = |\sphericalangle BAC|$, v našem trojúhelníku tedy $|\sphericalangle BHC| = 60^\circ$. Nyní ale H leží v polorovině opačné k BCA (kvůli tupému úhlu u C), je čtyřúhelník $BICH$ tětivový, a proto H leží na k.



Obdobně jako jsme vypočetli $|\sphericalangle BHC|$, můžeme spočítat i $|\sphericalangle AHB| = 180^\circ - |\sphericalangle ACB| = 60^\circ + \beta$. (Tento výpočet už platí jak pro ostroúhlé, tak pro tupoúhlé.) Podívejme se, kde leží bod H vzhledem k vnitřnímu úhlu při vrcholu A a jeho ose. Protože ze zadání je $|AC| < |AB|$, musí být výška z vrcholu A mezi stranou AC a osou úhlu při A, proto i H bude ležet v tomto výseku roviny. Protože tedy H leží v polorovině AIC, leží na stejném oblouku k podle tětivy BI jako C.

Z věty o obvodových úhlech[2] potom platí $|\sphericalangle BHI| = |\sphericalangle BCI| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BCA| = 60^\circ - \frac{\beta}{2}$. A konečně můžeme vypočíst

$$|\sphericalangle AHI| = |\sphericalangle AHB| - |\sphericalangle BHI| = 60^\circ + \beta - \left(60^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{3}{2}\beta,$$

čímž je rovnost dokázaná.

---

[1] Tupý úhel musí být skutečně u tohoto vrcholu, protože nemůže být proti straně AC, která (ze zadání) není nejdelší, tj. nemůže být u vrcholu B, a zároveň u A je zadaný ostrý úhel.

[2] Tvrzení je pro pravoúhlý trojúhelník triviální a obvodové úhly nepoužívá, tenhle zápis používáme pro stručnost.

Poznámky:
Hlavní myšlenku, tj. nalezení kružnice k procházející body B, C, H, I, obsahovala všechna úspěšná řešení, dá se říci, že tato myšlenka byla nutná k vyřešení úlohy. Jsem potěšen, že ji tolik řešitelů objevilo, uděloval jsem za ni tři body. Bohužel zadání úlohy připouští jak ostroúhlý, tak pravoúhlý a tupoúhlý trojúhelník, které je nutné prodiskutovat zvlášť, neboť velikosti úhlů ovlivňují zdůvodnění existence kružnice k. Častou chybou také bylo opomenutí argumentace pro správnost rovnic velikostí úhlů, jinými slovy zda určitý bod leží uvnitř nebo vně úhlu a zda se dá úhel rozložit na součet dvou menších. Plný počet si proto zasluhovala pouze řešení, která (alespoň většinou) tyto konfigurace bodů rozlišila či správně okomentovala. *(Daniel Perout)*

Úloha 5.

V čtyřúhelníku $ABCD$ je součet $|BC|$ a $|AD|$ roven dvojnásobku délky úsečky spojující středy AB a CD. Dokažte, že přímky BC a AD jsou rovnoběžné. *(Magdaléna Mišinová)*

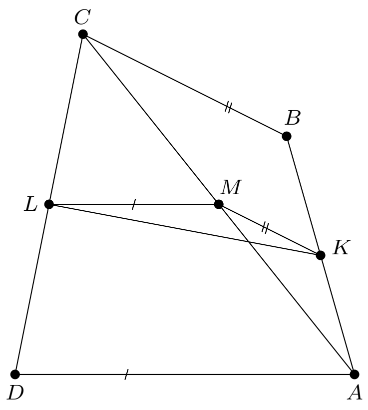
Řešení:
Středy úseček AB, CD, AC postupně označíme K, L, M. Úsečka KM je střední příčkou v trojúhelníku ABC, tudíž $KM \parallel BC$ a $|KM| = \frac{1}{2}|BC|$. Obdobně dokážeme $LM \parallel AD$ a $|LM| = \frac{1}{2}|AD|$. Z trojúhelníkové nerovnosti a ze zadání víme

$$|KL| \leq |KM| + |LM| = \frac{|BC|}{2} + \frac{|AD|}{2} = \frac{|BC| + |AD|}{2} = |KL|.$$

V trojúhelníkové nerovnosti proto musí nastat rovnost, což se stane právě tehdy, když M leží na úsečce KL. Tudíž víme, že přímky KL, KM a LM jsou totožné. Tedy platí

$$BC \parallel KL \parallel AD,$$

což je přesně to, co jsme chtěli dokázat.



Poznámky:
Část řešení se vydala stejným směrem jako vzorové řešení, další část uvážila středovou souměrnost se středem K, což také vedlo na trojúhelníkovou nerovnost. Jinak se kromě analytické geometrie moc úspěšných přístupů neobjevilo. V řešeních se často objevil důkaz opačné implikace, totiž že v lichoběžníku je délka střední příčky aritmetický průměr délek základen. To vskutku platí, ale o úloze nám to toho moc neřekne. Pro srovnání, fakt, že čtverec má všechny strany stejně dlouhé, neznamená, že všechny čtyřúhelníky se stejně dlouhými stranami jsou čtverce.

(Magdaléna Mišinová)

Úloha 6.

Mějme posloupnost přirozených čísel definovanou pomocí $a_1 = 2021$ a vztahu

$$a_{n+1} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 - 1.$$

Dokažte, že a_n má ve svém rozkladu alespoň $2n$ prvočísel včetně násobnosti.[3] *(Pavel Hudec)*

Řešení:
Označme $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$. Pak si můžeme a_n vyjádřit jako

$$a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})^2 - 1 = s_n^2 - 1,$$

což lze podle vzorce $a^2 - b^2$ rozložit na $(s_n + 1)(s_n - 1)$. Obdobně si můžeme vyjádřit

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= (s_n + a_n + 1)(s_n + a_n - 1) = \Big(s_n + 1 + (s_n + 1)(s_n - 1)\Big)\Big(s_n - 1 + (s_n + 1)(s_n - 1)\Big) = \\ &= (s_n + 1)s_n \cdot (s_n - 1)(s_n + 2) = a_n s_n (s_n + 2). \end{aligned}$$

Nyní budeme v řešení postupovat indukcí. Nejprve základní krok: $a_1 = 2021 = 43 \cdot 47$, tedy a_1 má ve svém rozkladu dvě prvočísla, a tvrzení tak platí. Dále

$$a_2 = 2021^2 - 1 = 2020 \cdot 2022 = 2 \cdot 2 \cdot 1010 \cdot 1011,$$

přičemž čísla 1010 a 1011 jsou větší než 1, a tudíž mají ve svém rozkladu alespoň jedno prvočíslo. Číslo a_2 tak má ve svém rozkladu alespoň 4 prvočísla včetně násobnosti, což opět vyhovuje tvrzení.

Pro indukční krok nyní uvažujme $n \geq 2$ a předpokládejme, že a_n má ve svém rozkladu alespoň $2n$ prvočísel včetně násobnosti. Na základě toho budeme chtít dokázat, že a_{n+1} jich má alespoň $2n + 2$. Dle součinového vyjádření výše si můžeme a_{n+1} rozepsat jako $a_n s_n (s_n + 2)$. Z indukčního předpokladu víme, že a_n má v rozkladu alespoň $2n$ prvočísel včetně násobnosti. Víme také, že $s_n \geq a_1$ (protože $n \geq 2$), tudíž je větší než 1, takže čísla s_n a $s_n + 2$ nutně mají každé alespoň jedno prvočíslo ve svém rozkladu.

Celkem tedy získáváme $2n + 2 = 2(n + 1)$ prvočísel (včetně násobnosti) v rozkladu a_{n+1}, což je přesně to, co jsme chtěli dokázat.

Poznámky:
Většina řešení postupovala stejně jako to vzorové. Někteří řešitelé však opomněli ošetřit případ a_2, který byl pro indukci klíčový. Za to jsem nakonec strhávala jeden bod, protože bez této drobnosti indukce nefunguje. Většina řešitelů ale dostala z úlohy plný počet bodů.

(Adéla Karolína „Áďa“ Žáčková)

Úloha 7.

Pro prvočíslo p označme množinu $M_p = \{1, \ldots, p - 1\}$. Nalezněte všechna prvočísla p, pro něž existuje funkce f z M_p do M_p taková, že pro každé $n \in M_p$ je $n \cdot f(n) \cdot f(f(n)) - 1$ násobkem p.

(Matěj Doležálek)

Řešení:
Ze zadání víme, že pro každé $n \in M_p$ platí $n \cdot f(n) \cdot f(f(n)) \equiv 1 \pmod{p}$. Zadaný vztah tak musí platit i pro $f(n)$, tedy také $f(n) \cdot f(f(n)) \cdot f(f(f(n))) \equiv 1 \pmod{p}$. Společně s předchozí kongruencí tak dostáváme

$$n \cdot f(n) \cdot f(f(n)) \equiv f(n) \cdot f(f(n)) \cdot f(f(f(n))) \pmod{p}.$$

[3] Například $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ má v rozkladu 3 prvočísla včetně násobnosti.

Víme, že $f(n)$ i $f(f(n))$ jsou prvky M_p, tedy jsou nesoudělné s p, a můžeme jimi danou kongruenci podělit. Dostáváme tak

$$n \equiv f(f(f(n))) \pmod p,$$

což už nutně znamená, že $n = f(f(f(n)))$ platí pro všechna $n \in M_p$. Pro každé n tak existuje nějaké $b = f(f(n))$, že $f(b) = n$. Funkce f je tedy na (surjektivní), a protože je to funkce na konečné množině M_p, tak už to nutně musí být permutace.

Podívejme se nyní na součin $\prod_{i=1}^{p-1} i \cdot f(i) \cdot f(f(i))$. Ze zadání je to součin samých jedniček, tedy $\prod_{i=1}^{p-1} i \cdot f(i) \cdot f(f(i)) \equiv 1 \pmod p$. Zároveň ale

$$\prod_{i=1}^{p-1} i \cdot f(i) \cdot f(f(i)) \equiv \left(\prod_{i=1}^{p-1} i\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{p-1} f(i)\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{p-1} f(f(i))\right) \equiv$$
$$\equiv (p-1)! \cdot (p-1)! \cdot (p-1)! \equiv ((p-1)!)^3 \pmod p,$$

protože funkce f je permutací. Wilsonova věta[4] nám ale říká, že $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$, tedy i $((p-1)!)^3 \equiv -1 \pmod p$. Dohromady tedy máme

$$1 \equiv \prod_{i=1}^{p-1} i \cdot f(i) \cdot f(f(i)) \equiv -1 \pmod p,$$

takže $2 \equiv 0 \pmod p$, což je možné pouze pro $p = 2$. Pro tento případ máme $M_p = \{1\}$, tedy jediná možná funkce f na této množině je $f(1) = 1$. Lehce ověříme, že tato funkce kongruenci $1 \cdot f(1) \cdot f(f(1)) \equiv 1 \pmod 2$ skutečně splňuje. Jediné vyhovující prvočíslo p je tak $p = 2$.

Poznámky:
Všechna správná řešení se ubírala stejnou nebo velmi podobnou cestou jako to vzorové. Některá trochu opomenula na konci zmínit, že $p = 2$ skutečně vyhovuje. Je to sice triviální pozorování, ale v úplném řešení by mělo zaznít. *(Lenka Kopfová)*

Úloha 8.

Nalezněte všechny dvojice prvočísel p, q, pro něž je $2^p + 2^q$ násobkem čísla pq.

(Matěj Doležálek)

Řešení:
Na začátek uvažme příklad, kdy jedno z prvočísel p, q je rovno 2. Zadání je symetrické, můžeme tak bez újmy na obecnosti uvažovat například $p = 2$. V tomto případě hledáme q splňující $2q \mid 4 + 2^q$, což je ekvivalentní s podmínkou $q \mid 2 + 2^{q-1}$. Pro $q = 2$ je tato podmínka splněna a pro $q > 2$ dostaneme za pomocí Malé Fermatovy věty rovnost

$$0 \equiv 2 + 2^{q-1} \equiv 2 + 1 \equiv 3 \pmod q,$$

která může být splněna pouze pro prvočíslo $q = 3$. Dohromady tak ze symetrie máme tři řešení $(2, 2)$, $(2, 3)$ a $(3, 2)$. Nyní ukážeme, že žádná jiná neexistují.

Předpokládejme tedy, že $p > 2$ a $q > 2$. Výraz $2^p + 2^q$ je dělitelný součinem pq, speciálně je tedy dělitelný i q. Aplikací Malé Fermatovy věty tak dostaneme

$$2^p \equiv -2^q \equiv -2 \pmod q.$$

Z toho díky $q > 2$ plyne, že $2^{p-1} \equiv -1 \pmod q$ a umocněním na druhou dostaneme

$$2^{2(p-1)} \equiv 1 \pmod q.$$

[4] Kdo nezná, najde například zde: *https://cs.wikipedia.org/wiki/Wilsonova_v%C4%9Bta.*

Označme $\mathrm{ord}_q(2)$ řád[5] 2 modulo q. Jak je známo, $\mathrm{ord}_a(m)$ dělí nějaké přirozené číslo b právě tehdy, když $a^b \equiv 1 \pmod{m}$. V našem případě tak z Malé Fermatovy věty platí $\mathrm{ord}_q(2) \mid q-1$. Z výše uvedeného rovněž dostáváme $\mathrm{ord}_q(2) \mid 2(p-1)$ a $\mathrm{ord}_q(2) \nmid p-1$, neboť $2^{p-1} \equiv -1 \pmod{q}$.

Nyní najděme vhodná celá čísla $i, j, k \geq 0$ a lichá čísla A, B, C, že $p-1 = 2^i A$, $q-1 = 2^j B$ a $\mathrm{ord}_q(2) = 2^k C$. Pozorování $\mathrm{ord}_q(2) \mid q-1$ implikuje $k \leq j$. Podobně poznatky $\mathrm{ord}_q(2) \mid 2(p-1)$ a $\mathrm{ord}_q(2) \nmid p-1$ nám dohromady říkají, že $k = i+1$. Dohromady tak dostáváme $i+1 \leq j$ neboli $i < j$, protože i, j jsou celá. Zadání je ovšem v proměnných p a q symetrické, a tak bychom analogicky mohli získat $j > i$. To dohromady dává chtěný spor s předpokladem, že existují $p, q > 2$ splňující zadání.

Jediná řešení úlohy jsou dvojice $(2,2)$, $(2,3)$ a $(3,2)$.

Poznámky:

Všechna došlá řešení zvládla správně najít všechna řešení a rozdiskutovat případ, kde je jedno z prvočísel 2. Správných řešení těžší části úlohy už se sešlo podstatně méně a prakticky všechna nějakým způsobem uvažovala řády a mocniny 2 v prvočíselných rozkladech. *(Martin Raška)*

---

[5] *Řád* prvku a modulo m je nejmenší přirozené číslo k takové, že $a^k \equiv 1 \pmod{m}$.