Kamarádi

2. JARNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Na soustředění přijelo 24 účastníků, z nichž jedna byla Lenka. Někteří účastníci spolu už kamarádili, jiní ještě ne, přičemž kamarádství je vzájemné. Lenka seřadila ostatních 23 účastníků do řady tak, že n-tý účastník se na soustředění kamarádí s právě n účastníky. S kolika účastníky se kamarádí Lenka?

ŘEŠENÍ:
Ukážeme, že každý účastník v řadě má pevně daná kamarádství s ostatními, a z těchto podmínek pak určíme, kolik kamarádů má Lenka. Účastník, který je 23. v řadě, se kamarádí se všemi ostatními. Kamarádí se tak s Lenkou i s prvním účastníkem v řadě. První účastník má ale pouze jednoho kamaráda, a tím pádem se nekamarádí s žádným dalším účastníkem v řadě ani s Lenkou. Účastník, který je 22. v řadě se už kamarádí s 23. účastníkem, ale určitě se nekamarádí s prvním účastníkem, musí se tak kamarádit se zbývajícími 21 účastníky v řadě a s Lenkou. Druhý účastník se kamarádí s 23. a 22. účastníkem v řadě a nemůže se tak kamarádit s nikým dalším.

Stejně můžeme postupovat pro další účastníky od konce řady, tedy pro 21., 20., ... až po 13. účastníka. Ten se kamarádí se všemi 10 účastníky za sebou, účastníky na 11. a 12. místě a s Lenkou. Účastník na 11. místě se tak kamarádí s 11 účastníky na 23. až 13. místě v řadě. Zbývá tak 12. účastník, který se nutně kamarádí se všemi 11 účastníky za sebou a s Lenkou. Lenka se kamarádí s účastníky na 12. až 23. místě v řadě, má tak celkem 12 kamarádů.

POZNÁMKY:
Většina řešitelů si s úlohou hravě poradila stejným postupem jako vzorové řešení. Drobným zádrhelem v některých řešeních byly plus minus jedničkové chyby. *(Klárka Grinerová)*

Úloha 2.

Pět kamarádů v podobě bodů si hraje na schovávanou ve čtverci o rozměrech 10×10, v němž je umístěno pět překážek. Jedna má tvar kruhu se středem uprostřed čtverce a zbylé čtyři jsou čtvrtkruhy se středy v každém z rohů čtverce. Všechny překážky mají poloměr 3. Čtyři kamarádi se schovávají, pátý je hledá. Poraďte jim, jak se schovat, aby pátý kamarád viděl nejvýše jednoho z nich, ať už si ve čtverci stoupne kamkoli.

ŘEŠENÍ:
Čtverec si pojmenujeme $ABCD$ a definujeme $A = (-5, -5)$, $B = (5, -5)$, $C = (5, 5)$ a $D = (-5, 5)$. Kamarády si pojmenujeme Q, W, R, T a umístíme je na kružnici uprostřed tak, aby platilo

$$Q = (-3, 0), \qquad W = (0, -3), \qquad R = (3, 0), \qquad T = (0, 3).$$

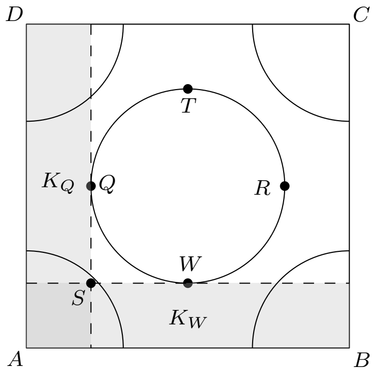
Nyní ukážeme, že ať si pátý kamarád stoupne kamkoliv, tak neuvidí více než jednoho ze čtyř kamarádů.

Vezměme si kamaráda Q a určeme odkud je vidět. Platí, že pokud K_Q je polorovina oddělená tečnou procházející Q neobsahující středový kruh, pak Q může být vidět právě z této poloroviny.

Analogicky můžeme najít poloroviny K_W, K_R a K_T. Všimneme si, že K_Q, K_R se neprotínají a stejně tak K_W, K_T. Všechny ostatní dvojice polorovin se protínají, ale ukážeme, že jejich průnik ve čtverci $ABCD$ leží v nějakém rohovém kruhu, takže si tam pátý kamarád nebude moci stoupnout.

Zvolíme dvě poloroviny K_Q a K_W. Přímky určující dané poloroviny se protínají v bodě $S = (-3, -3)$. Všimneme si, že průnik daných polorovin ve čtverci $ABCD$ je čtverec s úhlopříčkou AS. Délka této úhlopříčky je $\sqrt{8}$, což je méně než 3, tedy daný čtverec leží v rohovém čtvrtkruhu.

Snadno si rozmyslíme, že stejný postup můžeme použít pro libovolnou dvojici.



Poznámky:
Většina řešení byla správně, spousta z nich obsahovala hezké obrázky, za což chválím.

(Vojta „Dláža“ Gaďurek)

Úloha 3.

Na Matfyz přišlo zkouškové. Všech $1 + 2 + \cdots + n$ studentů bude skládat zkoušky v n učebnách, do kterých se vejde po řadě 1, 2, …, n studentů. Zkouškové má následující pravidla:

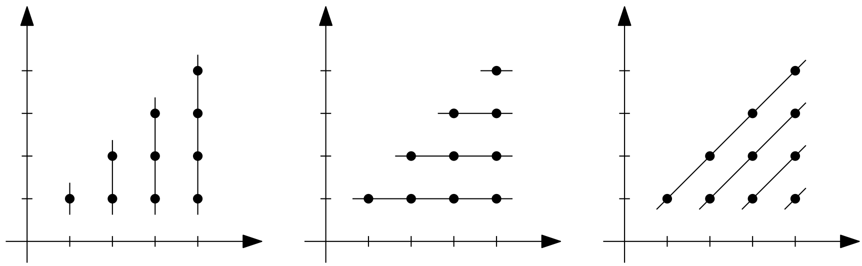
- *Na začátku zkouškového nejsou žádní dva studenti kamarádi.*
- *Každý den zkouškového musí každý student skládat zkoušku v některé z učeben.*
- *Kdykoliv dva studenti složí zkoušku ve stejné učebně, stanou se po jejím skončení už po celý zbytek zkouškového kamarády.*
- *Z příkazu děkana je přísně zakázáno, aby dva studenti, kteří již jsou kamarády, skládali zkoušku ve stejné učebně.*
- *Jakmile v další den nelze studenty rozmístit do učeben tak, aby složili další zkoušku, zkouškové skončí.*

V závislosti na n určete, kolik dní může zkouškové nejdéle trvat.

Řešení:
Pokud $n = 1$, pak zkouškové může trvat donekonečna. Dále předpokládejme, že $n \geq 2$, tedy že učebna s kapacitou 1 a s kapacitou n nejsou jedna učebna.

Označme si učebny dle jejich kapacity U_1, U_2, …, U_n. Dále označme studenta, který byl první den v U_1, jako A a studenty, kteří byli v U_2, jako B, C. Všimněme si, že v kterýkoli den zkouškového vyjma prvního jsou v U_n studenti, kteří všechny předcházející dny – speciálně pak i první den – skládali zkoušku v n navzájem různých učebnách. Kterýkoli den kromě prvního proto bude v U_n právě jeden student z každé učebny $U_1, U_2, \ldots, U_n$ z prvního dne. To znamená, že student A tam musí být každý den vyjma prvního a stejně tak tam musí vždy být jeden ze studentů B, C. Z toho ovšem hned plyne, že zkouškové nemůže trvat déle než tři dny. Druhý den se totiž student A skamarádí s jedním ze studentů B, C, třetí den s druhým z nich a čtvrtý den už pak učebnu U_n nelze zaplnit.

Nyní ukážeme, že tři dny může trvat zkouškové vždy. První den rozdělme studenty do učeben náhodně. Následně každému studentovi přiřaďme uspořádanou dvojici (x, y), kde x značí místnost, ve které student skládal zkoušku první den, a y je jeho pořadové číslo v této učebně (to jim přiřadíme libovolně, třeba dle výšky). Všimněme si, že když tyto dvojice zakreslíme jako (celočíselné) body do kartézského systému souřadnic, tak (nám vznikne hezký trojúhelník a) skutečnost, že dva studenti byli první den ve stejné učebně, odpovídá tomu, že jim příslušné body mají stejnou x-ovou souřadnici (leží tedy na stejné rovnoběžce s osou y). Druhý den pak můžeme studenty rozřadit do učeben tak, aby ve stejné učebně byli právě ti studenti, jejichž příslušné body mají shodnou y-ovou souřadnici (leží na stejné rovnoběžce s osou x). A třetí den tak, aby měli stejnou hodnotu rozdílu $x - y$ (leží na stejné rovnoběžce s přímkou $x = y$).



Při takovémto rozdělení neporušíme příkaz děkana – aby se některý den ve stejné učebně sešli dva kamarádi, musely by příslušnými dvěma body procházet dvě různé přímky, což nelze. Pro $n \geq 2$ tedy zkouškové může trvat nejdéle tři dny.

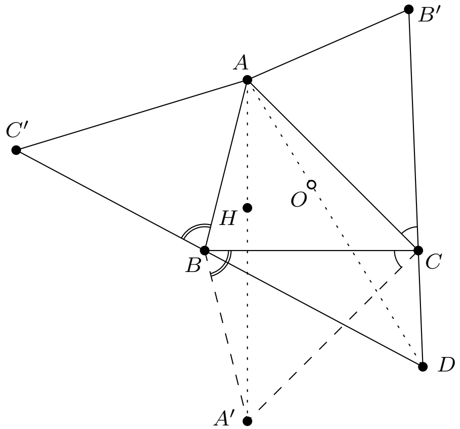
Poznámky:
Skoro všechna došlá řešení správně nahlédla, že se chtějí zaměřit na situaci v největší učebně, a použila podobný argument jako vzorové řešení pro získání horního odhadu tří dnů. Častokrát však už bohužel neukázala, že tři dny zkouškové opravdu trvat může – bez toho není řešení kompletní. Stejně tak si mnoho řešitelů nevšimlo, že tento argument implicitně předpokládá $n > 1$ a případ $n = 1$ je tak třeba rozebrat zvlášť. *(Josef „José“ Soural)*

Úloha 4.

V rovině je dán trojúhelník ABC. Bod B' vznikne překlopením B přes přímku AC, zatímco C' vznikne překlopením C přes přímku AB. Dokažte, že průsečík $B'C$ s $C'B$ leží na jedné přímce s vrcholem A a středem kružnice opsané trojúhelníku ABC.

Řešení:
Průsečík přímek $B'C$ a $C'B$ ze zadání existuje, označme jej tedy D. Dále sestrojíme bod A' jako překlopení bodu A přes přímku BC.

Nejdříve vyřešíme případy, kdy bod D bude splývat s jedním z vrcholů. S vrcholem A nemůže splývat nikdy a pro vrcholy B, C je zadání symetrické, stačí nám tedy vyřešit jen jeden z těchto případů. Bez újmy na obecnosti řekněme, že splývá s vrcholem B. Pak body B, C, B' musí být na jedné přímce, tudíž u vrcholu C musí být pravý úhel. U pravoúhlých trojúhelníků ale leží střed kružnice opsané na přeponě. V našem případě tak leží na úsečce AB, a tedy i na přímce AD, neboť $B = D$. V ostatních případech má smysl hledat kamaráda bodu D v trojúhelníku ABC a my dokážeme, že to musí být bod A'.



Trojúhelníky ABC', $AB'C$ a $A'BC$ vznikly překlopením trojúhelníku přes jeho tři strany a musí s ním tedy být shodné. Díky tomu dostáváme, že úhly $\sphericalangle ABC'$ a $\sphericalangle A'BC$ jsou si rovny, a tedy přímky $C'B$ a $A'B$ jsou izogonálami vzhledem k úhlu $\sphericalangle ABC$. Podobně jsou izogonálami i přímky $B'C$ a $A'C$, protože jsou si rovny úhly $\sphericalangle B'CA$ a $\sphericalangle BCA'$. Dvě z těchto přímek se protnou v D a jejich izogonály v A'. Skutečně jsou tedy tyto body kamarády. To ale znamená, že i jejich spojnice s vrcholem A musí být izogonálami, a to vzhledem k úhlu u A.

Z úvodního textu pak víme, že „O a H jsou kamarádi“, a tedy speciálně tyto body leží na přímkách, které jsou vzájemně izogonálami vzhledem k úhlu u A. My však víme, že spojnice AA' je výška, a tedy na ní leží bod H. Střed kružnice opsané tudíž musí ležet na druhé z izogonál, a to na spojnici AD. Celkem tak dostáváme, že vždy, když průsečík přímek $B'C$ a $C'B$ existuje, skutečně leží na jedné přímce spolu s vrcholem A a středem kružnice opsané.

Poznámky:
Úlohu šlo vyřešit různými způsoby. Asi nejoblíbenějším z nich bylo ukázat, že úhly $\sphericalangle DAC$ a $\sphericalangle OAC$ jsou si rovny. U úhlení bylo třeba dávat si pozor na konfigurace a případně každý případ vyřešit zvlášť. To ovšem někteří řešitelé neudělali, a pak uvažovali pevné pořadí bodů na přímce, které by se ovšem pro jiné konfigurace (například tupoúhlý trojúhelník) mohlo změnit. Na plný počet bodů však stačilo vyřešit jen jednu konfiguraci, protože myšlenkově měly všechny konfigurace stejný postup, jenom některé úhly vyšly jinak. Za pěkné rozebrání všech konfigurací občas šlo získat bod imaginární.

(Martin „Fofík“ Fof)

Úloha 5.

Klárka chová n prasátek, z nichž každá dvě jsou buď vzájemně kamarádi, nebo vzájemně nepřátelé. Každé prasátko má přesně 2024 nepřátel. Navíc pro každé prasátko platí, že nepřítel jeho kamaráda je také jeho nepřítel. Určete všechny možné hodnoty n.

Řešení:
Nejdřív si všimneme, že pokud pro tři prasátka A, B a C platí, že B se přátelí s A i C, pak i A a C jsou přátelé (opačnou možnost vylučuje zadání). Jinými slovy, všichni přátelé libovolného prasátka jsou přátelé navzájem. Tedy každé prasátko má jistou skupinku, v rámci níž se všichni přátelí se všemi. Naopak nikdo mimo tuto skupinku se nepřátelí s kýmkoliv v této skupince, jinak by byl díky předchozímu pozorování její součástí. Prasátka jsou tedy všechna rozdělena na určitý počet takových skupinek a počet přátel kteréhokoliv prasátka je jen velikost jeho skupinky mínus jedna. Protože mají ale všechna prasátka stejně nepřátel, mají také stejně přátel, a tudíž jsou všechny skupinky stejně velké.

Řekněme, že skupinek je j a mají všechny velikost k. Pak počet nepřátel libovolného prasátka bude 2024, ale také $k(j-1)$, protože každé prasátko je nepřítelem prasátek ve všech jiných skupinkách. Tedy velikost skupinek (neboli k) musí dělit 2024 a pro každého dělitele najdeme právě jedno j tak, aby rovnost platila. A počet prasátek je

$$1 + \text{počet přátel} + \text{počet nepřátel libovolného prasátka},$$

tedy $1 + k - 1 + 2024 = 2024 + k$. Všechna možná n jsou tedy 2025, 2026, 2028, 2032, 2035, 2046, 2047, 2068, 2070, 2112, 2116, 2208, 2277, 2530, 3036 a 4048. Z postupu vyplývá, že pro všechny tyto hodnoty lze přátelství navázat popsaným způsobem, protože když k dělí 2024, umíme vytvořit skupinek takový počet, aby bylo nepřátelství 2024 pro libovolné prasátko.

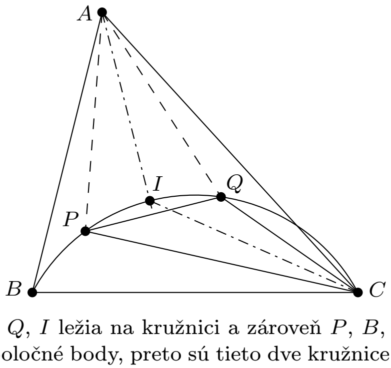
Poznámky:
Většina správných řešení postupovala jako vzorové. Občas se objevila alternativní zdůvodnění rozdělení prasátek do skupinek, například postupným odebíráním úplných skupin, která byla obvykle znatelně složitější. Většina částečných řešení pouze správně uhádla výsledek, ale nezdůvodnila, že jiná n opravdu nevyhovují. *(Vít Hanika)*

Úloha 6.

Uvažme v trojúhelníku ABC kamarády P, Q splňující $|AP| = |AQ|$. Dokažte, že B, C, P, Q leží na kružnici.

Riešenie:
Nech I je stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC. Začneme s využitím podmienky $|AP| = |AQ|$. Z toho, že sú P a Q kamaráti, máme, že priamky AP a AQ sú izogonály v uhle BAC, čo znamená, že sa na seba zobrazia v osovej súmernosti podľa osi uhla BAC, ktorou je priamka AI. To znamená, že AI je zároveň osou uhla PAQ. Ale keďže platí $|AP| = |AQ|$, je trojuholník APQ rovnoramenný, a preto je os AI uhla PAQ totožná s osou úsečky PQ.

Ďalej platí, že CI je osou uhla PCQ. Máme tak, že bod I leží na osi úsečky PQ a zároveň na osi uhla PCQ, preto I je C-Švrčkov bod[1] trojuholníka PCQ, a leží tak na kružnici opísanej tomuto trojuholníku. Analogicky je I B-Švrčkov bod trojuholníka PBQ, a teda leží na kružnici opísanej tomuto trojuholníku.



Máme tak, že body P, C, Q, I ležia na kružnici a zároveň P, B, Q, I ležia na kružnici. Avšak tieto dve kružnice majú tri spoločné body, preto sú tieto dve kružnice totožné a máme tak, že body B, C, P, Q ležia na jednej kružnici.

Poznámky:
Väčšina riešení bola ako to vzorové. Niektorí riešitelia však radšej vyhľadávali úplne iné prístupy, ktoré boli zväčša o dosť zložitejšie. *(Michal Pecho)*

[1]Ak nepoznáš Švrčkov bod, môžeš ho spoznať tu: *https://prase.cz/library/SvrckuvBodAKZ/SvrckuvBodAKZ.pdf*.

Úloha 7.

Je dán trojúhelník ABC, uvnitř kterého leží bod F splňující $|\sphericalangle BFC| = |\sphericalangle CFA| = |\sphericalangle AFB|$. Dokažte, že se přímky, které dostaneme zobrazením přímek AF, BF, CF po řadě v osových souměrnostech dle přímek BC, AC, AB, protnou v jednom bodě.

Řešení:

Úloha se dala řešit mnoha různými způsoby. Téměř žádná dvě z příchozích řešení nebyla stejná. Nastíním zde alespoň dva směry, kterými by se řešení mohlo odvíjet.

Řešení bez známých těžkých tríčků, ale úhlící:

Označme si F_a, F_b a F_c obrazy bodu F postupně podle stran BC, AC a AB. Označme si jako p přímku AF překlopenou přes BC, jako q přímku BF překlopenou přes AC a jako r přímku CF překlopenou přes AB. Pak jistě víme, že F_a leží na p a F_b leží na q. Označme si D průsečík p a q. Budeme chtít dokázat, že bodem D prochází i r.

Označme si K průsečík AF a BC. Všimněme si, že FA je osa nekonvexního úhlu $\sphericalangle BFC$, tedy i FK je osa úhlu $\sphericalangle BFC$, z čehož plyne, že $|\sphericalangle BFK| = |\sphericalangle KFC| = |\sphericalangle KF_aC| = 60°$, kde druhá rovnost plyne z osové souměrnosti. Tedy úhel $|\sphericalangle DF_aC| = 60°$. Obdobně i $|\sphericalangle DF_bC| = 60°$.

Jelikož F_a i F_b jsou obrazy bodu F v osových souměrnostech podle BC a AC, platí $|CF_a| = |CF| = |CF_b|$, tedy je trojúhelník F_aF_bC rovnoramenný a $|\sphericalangle F_aF_bC| = |\sphericalangle F_bF_aC|$, označme jej jako γ. Analogicky označme úhly $|\sphericalangle F_aF_cB| = |\sphericalangle F_cF_aB| = \beta$ a $|\sphericalangle F_cF_bA| = |\sphericalangle F_bF_cA| = \alpha$.

Úsečka F_aF_b tedy svírá s přímkami p i q úhel $60° - \gamma$. Analogicky dokážeme, že F_cF_a svírá s p i r úhel $60° - \beta$ a F_bF_c s q i r úhel $60° - \alpha$.

Pojďme si nyní dopočítat úhly $\sphericalangle F_aF_cF_b$ a $\sphericalangle F_aDF_b$:

$$|\sphericalangle F_aF_cF_b| = 60° - \beta + 60° - \alpha = 120° - \beta - \alpha,$$
$$|\sphericalangle F_aDF_b| = 180° - 2 \cdot (60° - \gamma) = 60° + 2\gamma.$$

Z trojúhelníku $F_aF_bF_c$ pak získáváme $2 \cdot (60° - \alpha + 60° - \beta + 60° - \gamma) = 180°$. Díky tomu $|\sphericalangle F_aDF_b| = 2 \cdot |\sphericalangle F_aF_cF_b|$, a jelikož zároveň víme, že D leží na ose F_aF_b, je nutně středem kružnice opsané trojúhelníku $F_aF_bF_c$. Neboť totéž lze dokázat pro zbylé dva průsečíky dvojic přímek p, q, r, nutně všechny tři body splývají a přímky se tedy protínají v jednom bodě.

Pokud oplýváme znalostí Cevovy věty a její trigonometrické verze, můžeme si poslední část řešení zjednodušit následovně:

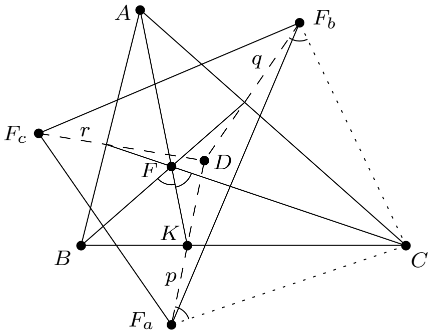
Víme, že pro trojúhelník $F_aF_bF_c$ a pro přímky p, q, r platí

$$\frac{\sin|\sphericalangle F_cF_bq|}{\sin|\sphericalangle qF_bF_a|} \cdot \frac{\sin|\sphericalangle F_bF_ap|}{\sin|\sphericalangle pF_aF_c|} \cdot \frac{\sin|\sphericalangle F_aF_cr|}{\sin|\sphericalangle rF_aF_b|}$$

je rovno jedné, právě tehdy, když se p, q a r protínají v jednom bodě. Jelikož ale

$$\frac{\sin|\sphericalangle F_cF_bq|}{\sin|\sphericalangle qF_bF_a|} \cdot \frac{\sin|\sphericalangle F_bF_ap|}{\sin|\sphericalangle pF_aF_c|} \cdot \frac{\sin|\sphericalangle F_aF_cr|}{\sin|\sphericalangle rF_aF_b|} = \frac{\sin(60° - \alpha)}{\sin(60° - \gamma)} \cdot \frac{\sin(60° - \gamma)}{\sin(60° - \beta)} \cdot \frac{\sin(60° - \beta)}{\sin(60° - \alpha)} = 1,$$

získáváme, že se p, q a r opravdu protínají v jednom bodě.



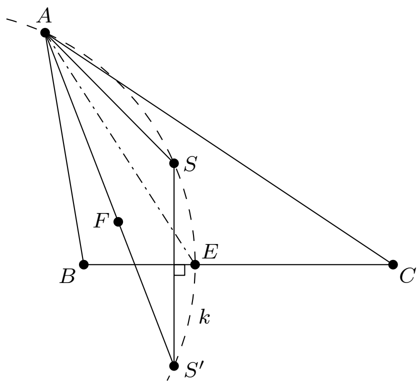
Řešení pomocí Fermatova a izodynamického bodu (inspirované řešením Davida Hromádky): Všimněme si, že F je známý Fermatův bod. Rovněž je známo, že kamarádem Fermatova bodu F je tzv. izodynamický bod (označme jej S). Budeme chtít dokázat, že S bude ležet na každé z inkriminovaných přímek.

Izodynamický bod má spoustu zajímavých vlastností[2]. Mimo jiné tu, že leží v průsečíku tří Apolloniových kružnic vzhledem ke všem třem vrcholům trojúhelníku ABC. Nakresleme si tedy A-Apolloniovu kružnici k a označme E jako patu osy úhlu u vrcholu A na BC.

Jelikož A-Apolloniova kružnice je symetrická podle BC, bude i bod S', který je obrazem bodu S v osové souměrnosti podle BC, ležet na k. Jelikož bod E leží na BC, leží tedy na ose SS'. Zároveň z definice Apolloniovy kružnice leží i na k. Je tedy Švrčkovým bodem trojúhelníku $S'AS$, tudíž AE je osa úhlu $S'AS$. Jelikož je zároveň i osou úhlu FAS (z definice kamarádů), budou body S', F a A ležet na jedné přímce. A jelikož je S obraz bodu S' podle osy BC, bude ležet na obrazu přímky AF podle osy BC, což je to, co jsme chtěli dokázat.

Analogicky pak dokážeme, že S leží i na zbylých obrazech přímek BF a CF, čímž máme důkaz dokončen.

Bod S leží na každé z inkriminovaných přímek, tudíž se všechny protínají v jednom bodě (v S).



Poznámky:
Řešitelé, kteří poslali kompletní řešení, se vždy dopracovali k cíli. Řešení byla vesměs elegantní a pěkně napsaná, udělala mi velkou radost, hezky se četla. :) Mnohá řešení si vybrala jinou vlastnost

[2] Můžeš si o nich přečíst například zde: *https://en.wikipedia.org/wiki/Isodynamic_point*.

izodynamického bodu (než tu, co jsem uvedla výše), která jim pomohla dospět šťastně k cíli, ale všechny způsoby by se mi sem nevešly.

Za částečná řešení jsem udělovala body podle toho, v jaké části řešení vedoucího k cíli se nacházela. *(Adéla Karolína „Áďa“ Žáčková)*

Úloha 8.

Nechť je H ortocentrum ostroúhlého trojúhelníku ABC s kružnicí opsanou ω. Body E a F leží postupně na stranách AB a AC tak, že $AEHF$ je rovnoběžník. Přímka EF protne ω v bodech X a Y. Označme jako Z ten bod, pro nějž je úsečka AZ průměrem ω. Dokažte, že H je ortocentrum trojúhelníku XYZ.

Řešení:

Střed ω označme jako O. Prvním důležitým krokem řešení je ukázat, že střed EF je také středem XY.

Protože O leží na ose úsečky XY, chceme ukázat, že leží i na ose úsečky EF. K tomu by stačilo vědět, že $|\sphericalangle EFO| = |\sphericalangle FEO|$. Díky tomu, že $AEHF$ je rovnoběžník ale víme, že $|\sphericalangle BEH| = |\sphericalangle CFH|$. Rádi bychom tedy ukázali, že EH a EO jsou izogonály v úhlu BEF, obdobně pro FH a FO. O H a O z úvodního textu víme, že jsou kamarádi, ovšem v trojúhelníku ABC. Zároveň není jasné, jak úhly BEF a CFE interpretovat. Jsou to sice vnější úhly trojúhelníku AEF, není ale jasné, jak ukázat, že O a H jsou v AEF kamarádi. Naštěstí se můžeme dívat na BEF a CEF jako na vnitřní úhly čtyřúhelníku $BCFE$ a uvědomit si, že zkoumání kamarádů není omezeno jen na trojúhelníky!

Kamarád bodu v n-úhelníku pro $n > 3$ je definován stejně jako kamarád v trojúhelníku. Tedy konkrétně pro čtyřúhelník $KLMN$ jsou P a Q kamarádi v $KLMN$, pokud jsou následující dvojice přímek izogonály v příslušných úhlech: KP a KQ, LP a LQ, MP a MQ, NP a NQ. Navíc platí následující lemma:

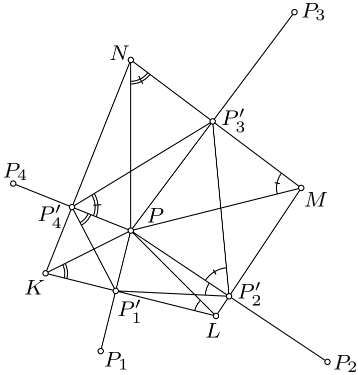
Lemma. *Uvnitř konvexního čtyřúhelníku $KLMN$ leží bod P. Bod P má kamaráda v $KLMN$, právě když $|\sphericalangle KPL| + |\sphericalangle MPN| = 180°$.*

Důkaz. Překlopme P v osové souměrnosti podle stran $KLMN$, označme jeho obrazy postupně P_1, P_2, P_3, P_4. Stejně jako v důkazu tvrzení „Alternativní konstrukce kamaráda“ v úvodním textu lze dokázat, že osa úsečky P_1P_2 je izogonála k LP v úhlu KLM. Obdobně to bude platit pro osy úseček P_2P_3, P_3P_4 a P_4P_1. Tedy P má v $KLMN$ kamaráda právě tehdy, když je $P_1P_2P_3P_4$ tětivový čtyřúhelník.

Nechť $P_1'P_2'P_3'P_4'$ jsou postupně paty z P na strany $KLMN$. Pak je $P_1'P_2'P_3'P_4'$ obraz $P_1P_2P_3P_4$ ve stejnolehlosti se středem P a koeficientem $\frac{1}{2}$. Zároveň $KP_1'PP_4'$ je díky pravým úhlům tětivový, tedy $|\sphericalangle PP_4'P_1'| = |\sphericalangle PKP_1'| = |\sphericalangle PKL|$. Obdobně přeneseme i další úhly a dostaneme

$$\begin{aligned}|\sphericalangle KPL| + |\sphericalangle MPN| &= (180° - |\sphericalangle PKL| - |\sphericalangle PLK|) + (180° - |\sphericalangle PMN| - |\sphericalangle PNM|) = \\ &= 360° - |\sphericalangle PP_4'P_1'| - |\sphericalangle PP_2'P_1'| - |\sphericalangle PP_2'P_3'| - |\sphericalangle PP_4'P_3'| = \\ &= 360° - |\sphericalangle P_1'P_4'P_3'| - |\sphericalangle P_1'P_2'P_3'|.\end{aligned}$$

Levá strana je 180°, právě když je pravá strana 180°, což je právě tehdy, když je $P_1'P_2'P_3'P_4'$ tětivový, přesně jak chceme. □



Protože $AEHF$ je rovnoběžník, za využití známých vlastností ortocentra dostáváme

$$|\sphericalangle EHF| = |\sphericalangle EAF| = |\sphericalangle BAC| = 180^\circ - |\sphericalangle BHC|.$$

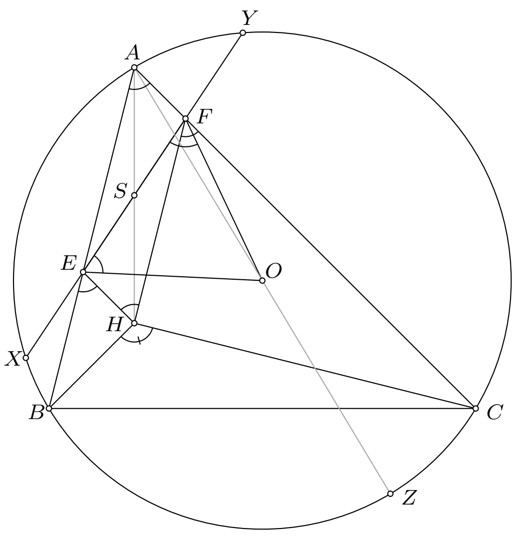
Tedy $|\sphericalangle EHF| + |\sphericalangle BHC| = 180^\circ$. Tudíž H a čtyřúhelník $BCFE$ splňují podmínku z lemmatu.

Použijeme-li tvrzení „OH jsou kamarádi" pro trojúhelník ABC, zjistíme, že BH a BO jsou izogonály v úhlu ABC a CH a CO jsou izogonály v úhlu ACB. Protože průsečík přímek je jen jeden, podle předchozího lemmatu je O kamarád H i v čtyřúhelníku $BCFE$. Protože $AEHF$ je rovnoběžník, dohromady dostáváme

$$|\sphericalangle FEO| = |\sphericalangle BEH| = |\sphericalangle HFC| = |\sphericalangle EFO|.$$

Tedy O leží na ose úsečky EF. Zároveň ale leží na ose úsečky XY, protože je to střed ω. Tudíž středy úseček EF a XY jsou vskutku jeden bod, označme ho S.

Je známo, že obraz ortocentra XYZ podle S (středu úsečky XY) tvoří se Z průměr ω. Bod, který leží na průměru ω se Z, je ze zadání A. Tedy jeho obraz podle S je ortocentrum XYZ. Protože $AEHF$ je rovnoběžník, je tento obraz H, přesně jak jsme chtěli.



Poznámky:
Sešlo se šest řešení a každé bylo svým způsobem jedinečné. Ukázalo se, že úlohu lze vyřešit mnoha různými způsoby, od pouhého (a zdlouhavého) počítání s komplexními čísly, přes dlouhé přenášení úhlů až po využití mocnosti bodu ke kružnici. Ve všech postupech ale hrál důležitou roli fakt, že středy EF a XY jsou totožné.

Mohlo by se zdát, že lemma v řešení je trochu náhodné. Je to ale tvrzení, které už se v soutěžích několikrát objevilo (příkladem je třeba IMO 2018), může tedy být hodné zapamatování samo o sobě.

(Magdaléna Mišinová)