Přirozená čísla

2. jarní série — Vzorové řešení

Úloha 1.

Marian napsal na tabuli přirozené číslo a zeptal se svých třiceti sourozenců na jeho dělitele. Jako odpovědi dostal čísla $2, 3, \ldots, 31$. Právě dvě z těchto čísel nebyla děliteli původního čísla, a dokonce se lišila právě o 1. Určete všechny takové možné dvojice.

(„madam Verča“ Hladíková)

Řešení:

Označme si Marianovo číslo písmenem M. Jelikož dva „nedělitelé“ čísla M jsou po sobě jdoucí přirozená čísla, tak právě jedno z nich je sudé, označme jej s.

Nejprve ukážeme sporem, že s musí být mocninou dvojky. Předpokládejme opak, tedy nechť s lze napsat jako součin 2^k (kde k je nenulové, jelikož s je sudé) a lichého čísla ℓ různého od jedné. Ze zadání však víme, že 2^k a ℓ jsou děliteli čísla M, tudíž i jejich součin s dělí M, což je spor.

Víme tedy, že s je mocninou dvojky. Pokud však $s \in \{2, 4, 8\}$, pak M není dělitelné 16, což je ve sporu s podmínkami v zadání. Jediným možným sudým „nedělitelem“ je číslo 16.

Zbývají nám tedy dvě možné dvojice. Dvojice $\{15, 16\}$ je nevyhovující, jelikož pokud M není dělitelné 15, tak není dělitelné ani 30.

Jedinou vyhovující dvojicí „nedělitelů“ je dvojice $\{16, 17\}$ a podmínky v zadání jsou splněny například pro číslo $M = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 = 2123581660200$.

Poznámky:

Většina řešitelů se dobrala k správnému výsledku, občas jsem však strhával jeden bod za nepřesnou argumentaci při vyřazení některých dvojic.

Kompletní řešení by mělo obsahovat odůvodnění, proč dvojice 16 a 17 splňuje podmínky ze zadání. Takovým odůvodněním může například být uvedení jednoho čísla, které je dělitelné všemi čísly mezi 2 a 31 kromě čísel 16 a 17 (viz vzorové řešení). Jelikož tato část řešení nebyla zásadní, body jsem nestrhával, ale doporučuji se příště zamyslet nad tím, zda je Tvé řešení kompletní.

(Lucien Šíma)

Úloha 2.

Najděte nějaké přirozené číslo takové, že jeho pětinásobek je pátá mocnina přirozeného čísla, jeho šestinásobek šestá a jeho sedminásobek sedmá.

(Rado van Švarc)

Řešení:

Označme x nějaké vyhovující hledané číslo. Zkrácený prvočíselný rozklad x můžeme zapsat ve tvaru $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot n$, kde a, b, c, d a n jsou vhodná nezáporná celá čísla a n je součinem prvočísel větších než 7. Nyní si stačí rozmyslet, co nám vlastně říká zadání. Víme, že pokud x vynásobíme pěti, tak nám vznikne pátá mocnina nějakého přirozeného čísla, což už nutně nastane, pokud $5 \mid a$, $5 \mid b$, $5 \mid c+1$, $5 \mid d$ a n je pátá mocnina. Druhé dvě podmínky lze přeformulovat obdobně. Celkově pro splnění podmínek ze zadání stačí, aby platilo

$$\begin{array}{lll} 5 \mid a, & 6 \mid a+1, & 7 \mid a, \\ 5 \mid b, & 6 \mid b+1, & 7 \mid b, \\ 5 \mid c+1, & 6 \mid c, & 7 \mid c, \\ 5 \mid d, & 6 \mid d, & 7 \mid d+1. \end{array}$$

A navíc n musí být pátou, šestou i sedmou mocninou vhodného přirozeného čísla. Nyní stačí najít libovolné vyhovující konstanty. Pro jednodušší hledání daných čísel si můžeme říci, že $n = 1$, $a = b$, a prozkoušet nějaké násobky 35, 42 a 30, než najdeme nějaké vyhovující. Nejmenšími takovými jsou $a = b = 35$, $c = 84$ a $d = 90$, $n = 1$, čímž dostaneme číslo $5^{84} \cdot 6^{35} \cdot 7^{90}$. Správnost tohoto řešení můžeme snadno ověřit.

Poznámky:
Drtivá většina řešitelů úlohu vyřešila správně a postupovala vesměs stejnou cestou. Lišila se pouze úroveň zdůvodnění postupu. Protože ale úkolem bylo najít libovolné vyhovující číslo a pro dané číslo (pokud je alespoň zapsáno v prvočíselném rozkladu) lze poměrně rychle ověřit správnost řešení, postup zde ani nebyl tolik potřeba. Pokud bychom se ale v úloze ptali například na všechna řešení, formálně se úlohy tohoto typu (kde máme více podmínek dělitelnosti na nějaké přirozené číslo) často řeší pomocí Čínské zbytkové věty. *(Lenka Kopfová)*

Úloha 3.

Jsou dána přirozená čísla a, b taková, že ab i $(a+1)(b+1)$ jsou druhé mocniny přirozených čísel. Dokažte, že existuje přirozené $n > 1$ takové, že $(a+n)(b+n)$ je druhá mocnina přirozeného čísla.

(Pavel Hudec)

Řešení:
V případě $a = b = 1$ je $(1+n)(1+n) = (1+n)^2$ druhou mocninou pro všechna přirozená n. V ostatních případech $ab > 1$ a platí

$$(a+ab)(b+ab) = \big(a(1+b)\big) \cdot \big(b(1+a)\big) = ab(a+1)(b+1).$$

Číslo $(a+ab)(b+ab)$ je tedy jako součin dvou druhých mocnin rovněž druhou mocninou. Z toho položením $n = ab$ vyplývá, že i v těchto případech existuje n splňující zadání.

Poznámky:
Většina došlých řešení si správně zvolila $n = ab$, čímž byla úloha prakticky vyřešena. Velké množství z nich bohužel nevyšetřilo krajní případ, kdy $a = b = 1$, což je pro kompletní řešení vskutku potřeba.

(Martin Raška)

Úloha 4.

Je dána nekonečná posloupnost přirozených čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že pro každá dvě různá přirozená čísla i, j platí $\mathrm{NSD}(i,j) = \mathrm{NSD}(a_i, a_j)$. Dokažte, že $a_n = n$ pro každé přirozené n.

(Filip Čermák)

Řešení správným dosazením:
Můžeme si všimnout, že pokud dosadíme za i a j postupně i a $2i$ pro libovolné i, pak

$$\mathrm{NSD}(a_i, a_{2i}) = \mathrm{NSD}(i, 2i) = i,$$

z čehož dostáváme, že $i \mid a_i$. Tato dělitelnost se dá ekvivalentně zapsat jako $a_i = ki$ pro nějaké přirozené k. Dosaďme nyní za i a j postupně i a ki. Z toho už nám plyne, že

$$i = \mathrm{NSD}(i, ki) = \mathrm{NSD}(a_i, a_{ki}) = \mathrm{NSD}(ik, a_{ik}) = ik.$$

Poslední rovnost plyne z toho, že pro každé n platí $n \mid a_n$, tedy i pro $n = ik$. Jako výsledek dostáváme, že $i = ki$, tedy že $k = 1$, což již nutně znamená, že $a_i = i$ pro každé i přirozené.

Řešení přes prvočísla:
Vezměme si pevné přirozené číslo n a prvočíslo p. Dále se podívejme na nejvyšší mocninu tohoto prvočísla v rozkladu n a označme příslušný exponent k, kde k je nějaké nezáporné celé číslo. Poté víme, že

$$\mathrm{NSD}\left(a_n, a_{p^{k+1}}\right) = \mathrm{NSD}\left(n, p^{k+1}\right) = p^k.$$

Z toho tedy plyne, že mocnina p v a_n je alespoň p^k. Zároveň nemůže být vyšší, protože

$$\mathrm{NSD}\left(a_{p^{k+1}}, a_{p^{k+2}}\right) = \mathrm{NSD}\left(p^{k+1}, p^{k+2}\right) = p^{k+1}.$$

Kdyby tedy byla vyšší, musel by $\mathrm{NSD}\left(a_n, a_{p^{k+1}}\right)$ být alespoň p^{k+1}, což není. Proto je mocnina každého z prvočísel stejná jak v n, tak v a_n, a tedy díky jednoznačnosti prvočíselného rozkladu dostáváme $a_n = n$.

Poznámky:
Většina došlých řešení byla vesměs řešená těmito dvěma způsoby, přičemž první způsob byl mnohem častější. Občas se řešení snažila rozebírat spousty případů, do kterých se posléze zamotala, a nedošla ke správnému výsledku. Převážně byla ale řešení správná a dostala plný počet bodů.

(Filip Čermák)

Úloha 5.

Nechť $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ takové, že pro libovolná prvočísla $p, q \in \mathbb{P}$ platí

$$f(p)^{f(q)} + q^p = f(q)^{f(p)} + p^q.$$

(Radek Olšák)

Řešení:
Nejprve ukážeme, že funkce f je prostá. Pokud $f(p) = f(q)$ pro nějaká prvočísla p, $q \in \mathbb{P}$, pak

$$f(p)^{f(p)} + q^p = q^p + f(p)^{f(p)},$$
$$q^p = p^q,$$

a jelikož p a q jsou prvočísla, tak $p = q$.

Pokud $p = 2$ a $q > 2$, potom

$$f(2)^{f(q)} + q^2 = 2^q + f(q)^{f(2)},$$
$$f(2)^{f(q)} - f(q)^{f(2)} = 2^q - q^2.$$

Pravá strana této rovnice je lichá, a levá strana proto musí být také lichá. Takže právě jedno z čísel $f(q)$ a $f(2)$ je sudé. Pokud je sudé $f(q)$, pak je sudé pro všechna $q > 2$. A protože jediné sudé prvočíslo je 2, pak $f(q) = 2$ pro všechna $q > 2$, což je ve sporu s tím, že f je prostá. Takže nutně $f(2)$ je sudé, a tedy $f(2) = 2$.

Pro všechna prvočísla $q > 2$ tedy platí

$$2^{f(q)} + q^2 = 2^q + f(q)^2,$$
$$2^{f(q)} - f(q)^2 = 2^q - q^2.$$

Nyní zavedeme funkci $g\colon \mathbb{N}_{\geq 3} \to \mathbb{Z}$ danou předpisem $g(n) = 2^n - n^2$. Pak z rovnice výše máme pro všechna prvočísla $q > 2$

$$g(f(q)) = g(q).$$

Nakonec ukážeme, že funkce g je rostoucí, tedy prostá, a proto $f(q) = q$:

$$g(n+1) - g(n) = 2^{n+1} - (n+1)^2 - 2^n + n^2 = 2^n - 2n - 1.$$

To je pro všechna $n \geq 3$ větší než 0 (můžeme ukázat jednoduchou indukcí). Takže g je opravdu rostoucí a $f(q) = q$ pro všechna prvočísla. Tato funkce zjevně vyhovuje a je tak jediná vyhovující.

Poznámky:
Většina řešitelů si s úlohou poradila dobře a postupovala podobně jako vzorové řešení. Lišil se většinou způsob, kterým ukázali, že funkce $2^x - x^2$ je rostoucí. Pokud tam žádné zdůvodnění nebylo, tak jsem odebíral jeden bod. *(Jáchym Solecký)*

Úloha 6.

Najděte polynom P stupně alespoň 2020 s celočíselnými koeficienty takový, že pro libovolné přirozené n jsou

$$n,\ P(n),\ P(P(n)),\ P(P(P(n))),\ \dots$$

po dvou nesoudělná čísla.

(Rado van Švarc)

Řešení:
Ukážeme, že polynom $n^{2020} - n + 1$ vyhovuje. Označme

$$P^{(i)}(n) = \underbrace{P(P(\dots P(}_{i\text{-krát}} n) \dots)),$$

tedy jako i-tou iteraci P na n. Indukcí dokážeme, že $P^{(i)}(n) \equiv 1 \pmod{n}$. Pak díky Euklidovu algoritmu platí $\mathrm{NSD}(n, P(n)) = \mathrm{NSD}(n, 1) = 1$, a tedy $P^{(i)}(n)$ je nesoudělné s n pro každé $i \in \mathbb{N}$.

(i) Pro $i = 1$:

$$P(n) = n^{2020} - n + 1 \equiv 1 \pmod{n}.$$

(ii) Pro $i > 1$ pak z indukčního předpokladu:

$$P^{(i)}(n) = \left(P^{(i-1)}(n)\right)^{2020} - P^{(i-1)}(n) + 1 \equiv 1^{2020} - 1 + 1 \equiv 1 \pmod{n}.$$

Nyní pro každá $i, j \in N$, $i < j$ ukažme, že $\mathrm{NSD}\left(P^{(i)}(n), P^{(j)}(n)\right) = 1$. Označme $P^{(i)}(n) = m$. Pak

$$P^{(j)}(n) = P^{(j-i)}\left(P^{(i)}(n)\right) = P^{(j-i)}(m),$$

a proto víme, že platí

$$1 = \mathrm{NSD}\left(P^{(j-i)}(m), m\right) = \mathrm{NSD}\left(P^{(j)}(n), P^{(i)}(n)\right).$$

Poznámky:
Tohle je pouze jeden z mnoha vyhovujících polynomů, obecně fungují polynomy tvaru $x(x-1)R(x)+1$ nebo $x(x+1)R(x)-1$, kde $R(x)$ je libovolný nenulový polynom. *(„madam Verča“ Hladíková)*

Úloha 7.

Radeček si vybral liché přirozené číslo $n > 1$ a napsal na tabuli čísla $n, \ldots, 2n-1$. Pak přišel Danil a zlomyslně mu jedno z nich smazal. Dokažte, že mohl zvolit takové, že součet zbylých čísel není dělitelný žádným z čísel, která byla původně na tabuli.

(Pavel Hudec)

Řešení:
Součet čísel na tabuli je $\frac{n(3n-1)}{2}$, po smazání jednoho z čísel může součet být libovolné číslo z intervalu $\frac{n(3n-1)}{2} - 2n + 1$ až $\frac{n(3n-1)}{2} - n$. To je n po sobě jdoucích čísel, takže každé číslo na tabuli dělí nejvýše jedno z nich (kdyby dělilo dvě různá, muselo by dělit i jejich rozdíl, což by byl spor). Bude nám stačit najít součet, který je dělitelný dvěma různými čísly na tabuli. Potom bude z Dirichletova principu existovat součet, který není dělitelný žádným. Uvažme součet $\frac{n(3n-1)}{2} - n = n \cdot \frac{3(n-1)}{2}$, který dostaneme škrtnutím n. Protože je n liché, musí být $n-1$ sudé a čísla $\frac{3(n-1)}{2}$ i n jsou určitě napsána na tabuli. Pro $n \geq 3$ jsou tato čísla různá. Už jenom musíme dořešit případ $n = 3$, kdy můžeme škrtnout třeba 5. Tím je úloha vyřešena.

Poznámky:
Většině řešitelů úloha nedělala problémy a snadno si s ní poradili. *(Josef Minařík)*

Úloha 8.

Jsou dána přirozená čísla n, k taková, že pro libovolné prvočíslo p existuje celé číslo a splňující $p \mid a^k - n$. Rozhodněte, zdali nutně musí n být k-tou mocninou přirozeného čísla.

(Danil Koževnikov)

Řešení:
Ne, nemusí. Ukážeme, že polynom $P(x) = x^8 - 16$ má kořen modulo libovolné prvočíslo p, ačkoliv 16 zřejmě není osmou mocninou přirozeného čísla. Pro $p = 2$ funguje $x = 2$. Dále předpokládejme, že p je liché prvočíslo. V tom případě můžeme rozložit P na součin kvadratických polynomů s celočíselnými koeficienty:

$$P(x) = (x^4 - 4)(x^4 + 4) = (x^2 - 2)(x^2 + 2)\Big((x^2 + 2)^2 - 4x^2\Big) =$$
$$= (x^2 - 2)(x^2 + 2)\Big((x - 1)^2 + 1\Big)\Big((x + 1)^2 + 1\Big).$$

Stačí tedy ukázat, že alespoň jeden z činitelů má kořen modulo p neboli že alespoň jedno z čísel -1, 2, -2 je kvadratickým zbytkem modulo p. K tomu se dá použít multiplikativita Legendreových symbolů[1]: označíme-li Legendreův symbol pro prvočíslo p jako $\left(\frac{a}{p}\right)$, pak platí $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$.

Předpokládejme, že -1 a 2 jsou kvadratické nezbytky. Použitím Legendreových symbolů to znamená $\left(\frac{-1}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right) = -1$. Potom $\left(\frac{-2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^2 = 1$, takže -2 je kvadratický zbytek modulo p. Proto alespoň jedno z těchto tří čísel musí být kvadratickým zbytkem, což jsme chtěli dokázat.

Poznámky:
Patrně nejtěžší částí úlohy bylo rozmyslet si, že zadané tvrzení není pravdivé, ačkoliv vypadá velmi přesvědčivě. Většina neúspěšných řešení se tak snažila dokazovat něco, co ani neplatí. Poučením pro příště budiž, že se u takovýchto „otevřených“ tvrzení vyplatí alespoň chvilku přemýšlet nad oběma možnostmi, i když se jedna z nich tváří mnohem lákavěji.

Jenom pro zajímavost dodám, že pokud se například omezíme pouze na bezčtvercová k, tak n skutečně musí být k-tou mocninou, ale důkaz tohoto tvrzení už vyžaduje notnou dávku pokročilé vysokoškolské teorie. *(Danil Koževnikov)*

[1] Pokud ses s nimi ještě nikdy nesetkal(a), tak se můžeš podívat například na první a druhý díl seriálu Teorie čísel z 33. ročníku, *https://prase.cz/archive/33/serial.pdf*.