

Teorie nejen čísel 1

1. SERIÁLOVÁ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 7. PROSINCE 2020

V úlohách lze používat všechna tvrzení (i cvičení) ze seriálu. K využití nějaké vlastnosti některého okruhu, která v seriálu nebyla ukázána, je třeba ji dokázat.

ÚLOHA 1. (5 BODŮ)

Najděte všechny dvojice prvočísel p, q , které splňují $p^4 + p^2 + 1 = q^3$.

ÚLOHA 2. (5 BODŮ)

Najděte všechna celočíselná řešení rovnice $x^2 + x = y^3 - 3$.

ÚLOHA 3. (5 BODŮ)

Je dáno přirozené číslo n . Dokažte, že přirozená čísla x, y splňující

$$x(x + 1) + y(y + 1) = n(n + 1)$$

existují právě tehdy, když je $2n^2 + 2n + 1$ složené číslo.