Analytická geometrie I

1. SERIÁLOVÁ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Dokažte, že pro každý tětivový čtyřúhelník $ABCD$ platí

$$\frac{|AC|}{|BD|} = \frac{|AB| \cdot |DA| + |BC| \cdot |CD|}{|AB| \cdot |BC| + |DA| \cdot |CD|}.$$

(Zdeněk Pezlar)

ŘEŠENÍ:
Označme $|\sphericalangle DAB| = \alpha$, $|\sphericalangle ABC| = \beta$. Dle rozšířené sinové věty (věta 35 v 1. díle seriálu) platí

$$\frac{|AC|}{\sin\beta} = \frac{|BD|}{\sin\alpha} = 2r,$$

kde r značí poloměr kružnice opsané. Odtud máme $\frac{|AC|}{|BD|} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

Jednou z vlastností funkce sinus je fakt, že $\sin\alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$ (tvrzení 30 v 1.díle seriálu) pro libovolné $\alpha \in (0, 180^\circ)$. Jelikož čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, součet jeho protějších úhlů je vždy 180°. Tedy platí

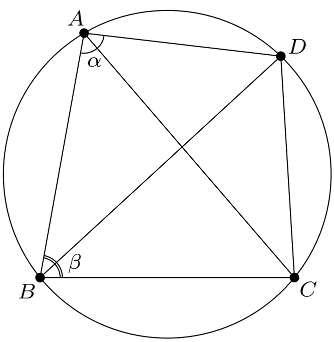
$$\sin\sphericalangle BCD = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\sin\sphericalangle CDA = \sin(180^\circ - \beta) = \sin\beta.$$

Dle známého vzorce pro výpočet obsahu trojúhelníků (věta 33 v 1. díle seriálu) pak máme

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |BC| \cdot \sin\beta, \qquad S_{DAB} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |DA| \cdot \sin\alpha,$$
$$S_{CDA} = \frac{1}{2}|DA| \cdot |CD| \cdot \sin\beta, \qquad S_{BCD} = \frac{1}{2}|BC| \cdot |CD| \cdot \sin\alpha.$$

Dále si uvědomme, že $S_{ABC} + S_{CDA} = S_{DAB} + S_{BCD} = S_{ABCD}$. Odtud máme rovnost:

$$\frac{1}{2}|AB| \cdot |BC| \cdot \sin\beta + \frac{1}{2}|DA| \cdot |CD| \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}|AB| \cdot |DA| \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}|BC| \cdot |CD| \cdot \sin\alpha.$$



Můžeme dále upravovat:

$$(|AB| \cdot |BC| + |DA| \cdot |CD|) \cdot \sin\beta = (|AB| \cdot |DA| + |BC| \cdot |CD|) \cdot \sin\alpha.$$

Což je ekvivalentní s

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{|AB| \cdot |DA| + |BC| \cdot |CD|}{|AB| \cdot |BC| + |DA| \cdot |CD|}.$$

Odtud již ovšem plyne rovnost, kterou jsme chtěli dokázat:

$$\frac{|AC|}{|BD|} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{|AB| \cdot |DA| + |BC| \cdot |CD|}{|AB| \cdot |BC| + |DA| \cdot |CD|}.$$

Poznámky:

Valná většina řešitelů úlohu zdárně pokořila stejným či podobným způsobem jako vzorové řešení. Někteří řešitelé se rozhodli úlohu upočítat pomocí kosinové věty, či využili mocnosti bodu ke kružnici. Jeden řešitel se dokonce vydal cestou řešení pomocí vln ze seriálu. *(Vendula Onderková)*

Úloha 2.

Buďte ω_1 a ω_2 kružnice, které mají vnitřní dotyk v bodě A, přičemž ω_2 leží uvnitř ω_1. Zvolme tětivu BC kružnice ω_1, která se dotýká kružnice ω_2. Dokažte, že poměr délky úsečky BC a obvodu trojúhelníka ABC nezávisí na volbě tětivy BC. *(Matouš Šafránek)*

Řešení:

Nechť pro bod X na kružnici ω_1 značí t_X délku tečny z X k ω_2. Podle důkazu tvrzení 86 v seriálu je poměr $\frac{t_X}{|AX|}$ konstantní nehledě na polohu X, označme ho k.[1] Speciálně pak platí $\frac{t_B}{|AB|} = \frac{t_C}{|AC|} = k$. Všimněme si, že úsečka BC je bodem doteku s ω_2 rozdělena na tečnu z B a tečnu z C, čili $|BC| = t_B + t_C$. Teď už stačí jen trochu počítání a máme hotovo.

Nejprve ukážeme, že

$$\frac{|BC|}{|AB| + |AC|} = \frac{t_B + t_C}{|AB| + |AC|}$$

je konstanta. Máme $t_B = k \cdot |AB|$ a $t_C = k \cdot |BC|$, to sečteme na $t_B + t_C = k(|AB| + |AC|)$ a vydělením $|AB| + |AC|$ dostaneme

$$\frac{t_B + t_C}{|AB| + |AC|} = k.$$

Z toho už plyne, že i

$$\frac{|BC|}{|AB| + |BC| + |AC|}$$

je konstanta, jak máme ukázat. To proto, že

$$\frac{|BC|}{|AB| + |BC| + |AC|} = \frac{1}{\frac{|AB|+|BC|+|AC|}{|BC|}} = \frac{1}{1 + \frac{|AB|+|AC|}{|BC|}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{k}}.$$

Poznámky:

Většina řešení postupovala zhruba takhle. Někteří řešitelé hýbali moc volně; pohyblivý bod je třeba si vybrat a typicky bude jen jeden. Musí se totiž hýbat „stálou rychlostí“, takže když si třeba řekneme, že jeden konec tětivy bude pohyblivý, druhý už být nemůže. Dva epičtí řešitelé už naopak pochopili duch seriálu, řekli si: „nemůže to nevyjít“ a postupovali analyticky v souřadnicích.

(Matouš Šafránek)

[1] V seriálu se tento fakt odvodí z linearity mocnosti a použije se v důkazu, že je-li X pohyblivý, je t_X vlna. Jelikož má t_X i AX nulu v $X = A$, jde z toho i zpětně odvodit, že je $\frac{t_X}{|AX|}$ konstanta.

Úloha 3.

Na straně BC obdélníka $ABCD$ leží bod P takový, že $|\sphericalangle APD| = 90°$. Na přímce AD mimo úsečku AD leží body Q a R takové, že $|AQ| = |BP|$ a $|DR| = |CP|$. Kružnice k prochází body Q, D a středem kružnice opsané trojúhelníka DPQ. Obdobně kružnice ℓ prochází body A, R a středem kružnice opsané trojúhelníka APR. Dokažte, že jedna z kružnic, které se dotýkají přímky AD a kružnic k a ℓ, má poloměr $2 \cdot |AB|$. *(Zdeněk Pezlar)*

ŘEŠENÍ:

Označme P_0 patu kolmice z bodu P na úsečku AD a uvažme bod S takový, že P je středem SP_0. Ukážeme, že S je střed hledané kružnice. Všimněme si, že bod S je od přímky AD vzdálený přesně dvojnásobek délky úsečky AB, stačí nám tedy ukázat, že kružnice m s poloměrem $2|AB|$ a středem v S se dotýká kružnic k a ℓ. Použijeme trochu fikaně kartézské souřadnice.

Využijeme trik – rozmysleme si následující podmínku, kdy se dvě kružnice dotýkají. Použít ji bude jednodušší než počítat průsečíky kružnic.

Lemma. *Mějme dané dvě kružnice K, L se středy O_K a O_L a poloměry $r_K > r_L$ takové, že O_L leží uvnitř K. Pokud platí $|O_K O_L| = r_K - r_L$, mají kružnice vnitřní dotyk.*

Důkaz. Dejme tomu, že platí $|O_K O_L| = r_K - r_L$. Pak pro libovolný bod $P \in L$ platí z trojúhelníkové nerovnosti $|PO_K| \leq |PO_L| + |O_K O_L| = r_L + r_K - r_L = r_K$, tedy P leží uvnitř kruhu s hraniční kružnicí K. Pro bod $P \in L$ ležící na přímce $O_K O_L$ jako jediný nastane rovnost, je to tedy jediný průsečík kružnic K a L. Kružnice se proto dotýkají. $\square$

Teď už máme cíl, pusťme se do toho. Zavedeme si šikovně souřadnou soustavu tak, že $A = (-2c, -1)$, $B = (-2c, 1)$, $C = (2c, 1)$ a $D = (2c, -1)$ pro nějaké kladné reálné c. Bod P leží na kružnici nad průměrem AD, která má rovnicové vyjádření $x^2 + (y+1)^2 = 4c^2$. Její průsečík s přímkou BC, tedy $y = 1$, bude splňovat $x = \pm 2\sqrt{c^2 - 1}$. Speciálně pokud bod P existuje, tak $c \geq 1$. Označme $t = \sqrt{c^2 - 1}$ a mějme tedy $P = (2t, 1)$. Bod S má pak souřadnice $(2t, 3)$ a kružnice m rovnici $(x-2t)^2 + (y-3)^2 = 4^2$. Ukážeme, že kružnice m se dotýká kružnice k. K tomu nebudeme nijak potřebovat bod R, proto si s ním nebudeme lámat hlavu.

Počítejme – zjevně $AQ \parallel BP$ a dle zadání $|AQ| = |BP|$, čtyřúhelník $APBQ$ je tak rovnoběžník, bod Q tudíž můžeme spočítat souřadnicově jako $Q = A + B - P = (-4c - 2t, -1)$.

Nyní označme O_1 bod se souřadnicemi $(-c - t, -2)$. Ukážeme, že O_1 je střed kružnice opsané DPQ. Jistě platí $|O_1 D| = |O_1 Q|$, protože osa úsečky DQ má rovnici $x = -c - t$, je totiž kolmá na přímku AD a prochází středem DQ. Dále spočítáme pomocí $c^2 = t^2 + 1$

$$|O_1 D| = \sqrt{(-3c - t)^2 + 1} = \sqrt{9c^2 + 6ct + t^2 + 1} = \sqrt{c^2 + 6ct + 9t^2 + 8 + 1} = \sqrt{(-c - 3t)^2 + 9},$$

což je rovno $|O_1 P|$. Platí tedy $|O_1 Q| = |O_1 D| = |O_1 P|$ a O_1 je hledaný střed.

Nyní spočítáme střed kružnice k. Tvrdíme, že bod $O_3 = (-c - t, v)$, kde $v = 5c^2 + 3ct - 2$, je tímto středem. Protože O_3 má stejnou x-ovou souřadnici jako O_1, tyto dva body leží na stejné kolmici k AD, tedy na ose DQ. Pro naše zvolené v pak zatneme zuby a ověříme, že O_3 leží na ose úsečky $O_1 D$. Počítejme

$$|O_3 O_1| = v + 2 = \sqrt{v^2 + 4v + 4} = \sqrt{(v+1)^2 + 2v + 3} = \sqrt{(v+1)^2 + 2(5c^2 + 3ct - 2) + 3} =$$
$$= \sqrt{(v+1)^2 + 9c^2 + 6ct - 1 + c^2} = \sqrt{(v+1)^2 + 9c^2 + 6ct + t^2} = \sqrt{(v+1)^2 + (3c + t)^2},$$

což je rovno $|O_3 D|$. Proto je O_3 opravdu střed kružnice opsané.

Poloměr kružnice k, jakožto kružnice opsané $O_1 DQ$, bude $|O_3 O_1| = v + 2$. Pojďme ověřit, že můžeme použít lemma. Ukážeme, že bod S leží uvnitř kružnice k. Ekvivalentně upravujme potřebnou nerovnost

$$\begin{aligned} |O_3S| = \sqrt{(-c-t-2t)^2+(v-3)^2} &\overset{?}{\leq} v+2, \\ c^2+6ct+9t^2 &\overset{?}{\leq} (v+2)^2-(v-3)^2 = 10v-5 = 10(5c^2+3ct-2)-5, \\ 9t^2+25 &\overset{?}{\leq} 49c^2+24ct, \end{aligned}$$

což je jasné, protože (jak jsme již zmínili) platí $c \geq t$ a $c \geq 1$. Bod S tedy leží uvnitř kružnice k. Dále poloměr k je $v+2 = 5c^2+3ct > 4$, což je poloměr m. Konečně, absolutní hodnota rozdílu poloměrů kružnice k a m je rovna $|v+2-4| = v-2$. Stačí nám ověřit, zda platí rovnost

$$\begin{aligned} (-c-t-2t)^2+(v-3)^2 = |O_3S|^2 &\overset{?}{=} (v-2)^2, \\ (-c-3t)^2 = (-c-t-2t)^2 &\overset{?}{=} (v-2)^2-(v-3)^2 = 2v-5 = 2(5c^2+3ct-2)-5, \\ c^2+9t^2+6ct &\overset{?}{=} 10c^2+6ct-9, \\ 9 &\overset{?}{=} 9(c^2-t^2), \end{aligned}$$

což vskutku platí. Podle lemmatu se tak kružnice m a k dotýkají. Symetrickým postupem bychom dokázali, že m se dotýká i druhé uvažované kružnice, jsme proto hotovi.

Poznámky:

Úloha byla těžší. Důležitou částí bylo správně zvolit podmínky, jinak řečeno vhodně zvolit souřadnou soustavu, a neztratit se v moři výrazů. Žádné ze tří řešení se vzorovou cestou nevydalo, nicméně řešitelé pochopili duch seriálu a řádně počítali. *(Zdeněk Pezlar)*