

Distanční výuka

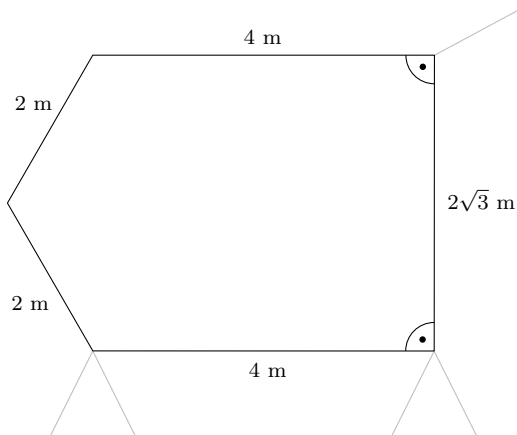
1. PODZIMNÍ SÉRIE

TERMÍN ODESLÁNÍ: 5. ŘÍJNA 2020

ÚLOHA 1.

(3 BODY)

Učebna má tvar konvexního pětiúhelníku jako na obrázku níže. Jak do ní můžeme umístit devět studentů¹ tak, aby mezi každými dvěma byla vzdálenost alespoň dva metry?



ÚLOHA 2.

(3 BODY)

Kuba dostal za distanční domácí úkol procvičit si násobení a sčítání. Vyrobil si na to čtyři kartičky s reálnými čísly. Když si s nimi chvíli hrál, zjistil, že pokaždé, když z nich vytvoří výraz

$$\square \cdot \square + \square \cdot \square,$$

vyjde mu stejný výsledek. Ukažte, že na alespoň třech kartičkách je stejné číslo.

ÚLOHA 3.

(3 BODY)

V turnaji v distančním fotbalu se utkalo 2020 družstev. Každé hrálo s každým právě jednou, za výhru tým obdržel jeden bod, za prohru či remízu neobdržel žádný. Po odehrání všech zápasů skončily všechny týmy se stejným bodovým ziskem. Určete, kolik nejméně muselo nastat remíz.

ÚLOHA 4.

(5 BODŮ)

V hodině distanční výtvarné výchovy dostal Franta za úkol obarvit každý bod roviny jednou z n barev tak, aby se na libovolné přímce vyskytovaly body nanejvýš dvou barev a aby každou barvou byl obarven alespoň jeden bod. Určete největší n , pro které se mu to může podařit.

¹Studenty můžeme považovat za body a můžou ležet i na obvodu učebny.

ÚLOHA 5.

(5 BODŮ)

Radeček si v hodině distančního dějepisu během výkladu o křížových výpravách krátí dlouhou chvíli následující kratochvílí: Nakreslí si tabulku $n \times n$ a následně některá její pole vyplní křížky tak, aby neexistovala trojice křížků A, B, C taková, že A a B leží ve stejném sloupci, B a C leží ve stejném řádku a zároveň B leží pod A a nalevo od C (přičemž B s nimi nemusí nutně sousedit). V závislosti na n určete, kolik nejvýše křížků dovede do tabulky umístit.

ÚLOHA 6.

(5 BODŮ)

Konvexní n -úhelník M byl rozdělen na trojúhelníkové ohrádky s rohy ve vrcholech M , přičemž v každém vrcholu M sedí jeden luskoun. Rozmístění některých $n - 2$ luskounů do ohrádek nazveme *distanční*, pokud je v každé ohrádce právě jeden luskoun, který navíc původně seděl v jednom z rohů této ohrádky. Dvojici luskounů nazveme *karanténní*, pokud umíme distančně rozmístit zbylé luskouny právě jedním způsobem.² Kolik existuje karanténních dvojic?

ÚLOHA 7.

(5 BODŮ)

Učitelky zdravotědy nedodržíjí karanténu, a proto pro každou dvojici kantorek existuje právě jedna, se kterou si obě podaly ruce. Ukažte, že existuje jedna učitelka, co si podala ruku se všemi.

ÚLOHA 8.

(5 BODŮ)

Honza dostal při hodině distanční matematiky liché prvočíslo p a $(p+1)$ -prvkovou množinu S celých čísel. Dokažte, že z S dovede zvolit po dvou různá čísla a_1, a_2, \dots, a_{p-1} taková, že

$$1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \dots + (p-1) \cdot a_{p-1}$$

je násobkem p .

²Rozmístění je určeno jen tím, který luskoun je ve které ohrádce.