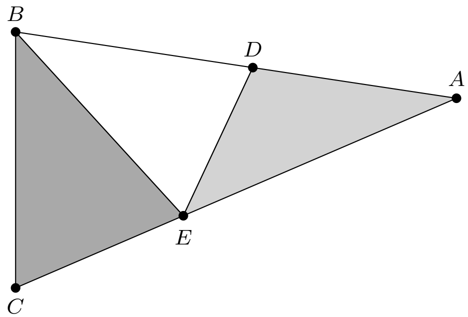
Cesta kolem světa

1. PODZIMNÍ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 2. ŘÍJNA 2023

ÚLOHA 1. (3 BODY)

Během Daníkovy pěší túry Himálajem vypukla v Nepálu bouřlivá debata o nové podobě státní vlajky. Daník do této debaty jakožto nadšený vexilolog přispěl návrhem vlajky ve tvaru trojúhelníku ABC, na jehož stranách AB, AC leží postupně body D, E. Tyto body dělí vlajku na barevné trojúhelníky ADE, DEB, BCE se stejnými obsahy. Určete hodnotu $\frac{|AE|}{|AC|}$.



ÚLOHA 2. (3 BODY)

Orgové na jarním soustředění uspořádali hru se stanovišťmi označenými $1, 2, \ldots, 2023$. Na stanovišti 2023 se nachází cíl se spoustou nadívaných žampiónů, kdežto na každém stanovišti $i \in \{1, 2, \ldots, 2022\}$ měl ležet papír s instrukcí „Jdi na stanoviště $i + 1$“. Jenže orgové jsou nešikové a během rozvěšování těchto 2022 papírů pomíchali a na těchto 2022 stanovišť je rozvěsili v nějakém jiném pořadí. Pokud účastníci začínají na stanovišti 1, lze s jistotou říct, že někdy dojdou do cíle?

ÚLOHA 3. (3 BODY)

Čtyři PraSátka se odstěhovala do australské buše a postavila si domečky ve vrcholech obdélníku, jehož strany mají délky 4 a 6. Šimonovi se po nich stýská, a proto by si chtěl postavit v buši chatrč tak, aby měla od všech zbylých PraSátek racionální vzdálenost. Může se mu to povést?

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

Marian nalezl při potápění v Mariánském příkopě dva kvadratické polynomy $P(x)$ a $Q(x)$ takové, že polynom $P(Q(x))$ má čtyři reálné kořeny $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Dokažte, že musí platit $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Pepa se účastní Rallye Sahara na svém závodním dromedárovi. Na okružní trase je rozmístěno několik artézských studní, které však nemají mnoho vody. Ve všech studních dohromady se nachází přesně tolik vody, kolik jí Pepův velbloud spotřebuje na zdolání trasy. Vždy, když Pepa dorazí ke studni, velbloud vypije všechnu vodu, která je k dispozici (jeho hrb má neomezenou kapacitu), ale pokud mu voda dojde, zastaví se a nepůjde dál. Dromedárova spotřeba vody je přímo úměrná vzdálenosti, kterou urazí, přičemž na začátku závodu nemá žádnou vodu a potřebuje se napít ze studny, u které začíná. Dokažte, že když si Pepa zvolí správnou počáteční studnu, podaří se mu zdolat celou trasu.

Úloha 6. (5 bodů)

Šošo během své návštěvy New Yorku obdivuje místních n mrakodrapů, z nichž každý má kladnou celočíselnou výšku. Pro každé dva mrakodrapy si Šošo do svého notýsku poznamenal rozdíl jejich výšek. V závislosti na n určete, kolik nejvíce různých mocnin dvojky mohl Šošo na konci svého výletu v notýsku mít.

Úloha 7. (5 bodů)

Majda si zařizuje pas na cestu kolem světa. Pas má tvar nějakého konvexního n-úhelníku s obsahem S a obvodem o. Majda má kruhovou fotografii s poloměrem $\frac{S}{o}$. Víme jistě, že se fotografie do pasu vejde?

Úloha 8. (5 bodů)

Na pobřeží Antarktidy má každý z k států jednu či více vědeckých základen, dohromady jich mají 2023. Každá základna patří právě jednomu státu. Najděte největší možné k takové, aby mohla platit následující podmínka. Pro každou základnu z a stát S, který je jedním z našich k států, existuje souvislá část pobřeží, na které leží z a na níž alespoň polovina základen patří státu S.