

ÚLOHA 5.

(5 BODŮ)

Na stole leží n hromádek oschlých knedlíků. Na začátku tvoří každou hromádku jeden knedlík. Kuchařka si v každém kroku vybere dvě hromádky a spojí je do jedné. Za spojení hromádek obsahujících x a y knedlíků dostane kuchařka $x \cdot y$ korun. Kolik si může kuchařka nejvýše vydělat postupným splácáním všech knedlíků na jednu hromadu?

ÚLOHA 6.

(5 BODŮ)

V písmenkové polévce plave sedm různých lichých prvočísel. Malý Kubíček si myslel, že pro každou dvojici p, q prvočísel z polévky platí, že zbylých pět prvočísel dělí hodnotu $p^8 - q^8$. Ukažte, že se Kubíček spletl.

ÚLOHA 7.

(5 BODŮ)

Anička si do ovesné kaše nakreslila rovnostranný trojúhelník ABC a označila M střed strany AB . Přišel Fila a nakreslil na stranu AC bod D a na stranu BC bod E tak, aby $\angle DME = 60^\circ$. Ukažte, že platí $|AD| + |BE| = |DE| + \frac{1}{2}|AB|$, ať už Fila vybral body jakkoli.

ÚLOHA 8.

(5 BODŮ)

Na $2n$ stolech školní jídelny po obědě zbyly hromádky rýže. Školník s uklízečkou hrají následující hru. Pravidelně se střídají v tazích, přičemž školník začíná. Hráč na tahu si musí zvolit některých n neprázdných stolů a z každého z nich sníst libovolný nenulový počet zrněk rýže (nemusí ze všech stolů sníst stejný počet). Kdo nemůže táhnout, prohrál. V závislosti na počtu stolů a zrněk rýže na nich určete, kdo má vyhrávající strategii.