Historky ze školní jídelny

1. podzimní série — Vzorové řešení

Úloha 1.

Při pohledu na zmenšující se porce masa ve školní jídelně Pavla napadlo, jestli by nešlo nahradit každé z písmen M, A, S, O číslicí (ne nutně každé jinou) tak, aby platilo:

$$\begin{array}{r} M\,A\,S\,O \\ M\,A\,S \\ M\,A \\ M \\ \hline 2\,0\,1\,9 \end{array}$$

Poraďte mu, jak na to.

(Marian Poljak)

Řešení:
Zadání přepíšeme do tvaru jedné rovnice, kde M, A, S a O jsou celá čísla od nuly do devíti:

$$1111M + 111A + 11S + O = 2019.$$

Když bude $M = 0$, součet bude roven nejvýše $999 + 99 + 9 = 1007 < 2019$. Takže $M \neq 0$. Pokud však $M \geq 2$, tak jen člen $1111M \geq 2222$, což je víc než 2019. Tedy jestli rovnice má mít řešení, M musí být 1. Dosadíme do původní rovnice $M = 1$ a zjednodušíme:

$$111A + 11S + O = 2019 - 1111 = 908.$$

Kdyby bylo $A \leq 7$, levá strana by byla maximálně $777 + 99 + 9 = 885$, tedy méně než pravá strana. Jestliže $A = 9$, bude sám člen $111A = 999$ příliš velký. Získali jsme tedy nutně $A = 8$.

Opět dosadíme do předchozí rovnice:

$$11S + O = 908 - 888 = 20.$$

Jelikož O je nejvýše devět, nesmí se S rovnat nule. Také kdyby S bylo alespoň dva, muselo by být O záporné. Takže $S = 1$ a lehce dopočteme $O = 20 - 11 = 9$.

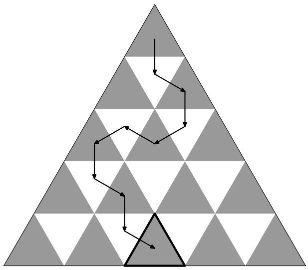
Jediné vyhovující řešení je $M = 1$, $A = 8$, $S = 1$ a $O = 9$. Jeho správnost snadno ověříme zkouškou.

Poznámky:
K získání plného počtu bodů bylo potřeba kromě nalezení vyhovujících číslic také dostatečně popsat postup řešení nebo provést zkoušku. Naprostá většina řešitelů si s úlohou hravě poradila, nejčastěji pomocí uvedeného postupu nebo rozebíráním možností, které číslice lze pod sebou sečíst, aby po přičtení vznikla daná cifra čísla 2019. Při tomto postupu bylo často opomíjeno zmínění a vyvrácení možnosti, že při sčítání může teoreticky vzniknout přenos dvojky, za což jsem však body nestrhávala.

(Lucka Kundratová)

Úloha 2.

Terka se pohybuje po trojúhelníkové podlaze jídelny tvořené 25 *dlaždičkami jako na obrázku. Začíná na horní dlaždičce a vždy může přejít na dlaždičku sousedící hranou. Nesmí ale dvakrát vstoupit na stejnou dlaždičku ani chodit směrem nahoru. Kolika způsoby může Terka doskákat na prostřední dlaždičku ve spodní řadě?*



Podlaha jídelny se zakreslenou jednou možnou cestou.

(Martin Raška)

Řešení:

Rozdělme si podlahu na pět pater, která očíslujeme shora dolů jedna až pět. Jelikož Terka nesmí chodit nahoru, jakmile nějaké patro opustí (směrem dolů), už se do něj nemůže vrátit. Také snadno vidíme, že každé patro může opustit z libovolné, avšak pouze šedé, „výstupní" dlaždičky. Ta je v prvním patře jen jedna, ve druhém patře jsou dvě, ve třetím tři a ve čtvrtém čtyři.

Představme si nyní, že v každém patře vybereme jednu výstupní dlaždičku, přičemž v pátém patře vybereme tu cílovou. Jistě existuje cesta, která pro opuštění jednotlivých pater použije právě tyto dlaždičky, vždy po vstupu do nižšího patra se totiž stačí vydat správným směrem (doleva či doprava) za další výstupní dlaždičkou. A co víc, taková cesta je daná jednoznačně, protože Terka se nemůže vydat opačným směrem nebo výstupní dlaždičku přejít – musela by se vracet nebo opustit patro jinde.

Ukázali jsme tedy, že vybrat cestu pro Terku je to samé, jako vybrat v každém patře jednu šedou dlaždičku (a v pátém patře tu cílovou). Výběry v jednotlivých patrech jsou nezávislé, takže počty možností musíme násobit. Proto má Terka na výběr $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ různých způsobů jak doskákat na prostřední dlaždičku ve spodní řadě.

Poznámky:

Většina řešitelů postupovala stejně jako vzorové řešení. Ovšem ne všichni své výpočty dostatečně uspokojivě odůvodnili. Je lepší do řešení napsat pozorování, která se Ti zdají zřejmá, než odevzdat řešení, kde si opravovatel musí z napsaného výpočtu většinu postupu domyslet.

Někteří řešitelé vypisovali všechny možné cesty. Sami jistě uznají, že to dalo dost práce, a to už u pěti pater. U třiceti pater by takovou práci nechtěl ani počítač, zato vzorové řešení se dá snadno zobecnit. *(Dominik Stejskal)*

Úloha 3.

Po obvodu talíře je napsáno 2018 *celých čísel se součtem* 1. *Martínek zkoumá souvislé úseky tvořené 1 až 2017 čísly. Úsek nazývá nemastný, pokud má kladný součet. V opačném případě mu říká neslaný. Ukažte, že nemastných úseků je stejně jako neslaných.*

(Fíla Čermák)

Řešení:

Ke každému úseku, který Martínek zkoumá, existuje jeho *doplněk*, tedy úsek obsahující všechna čísla, jež nejsou obsažena ve zkoumaném úseku. Zřejmě je tento doplněk vždy také souvislým úsekem a zároveň je tvořen 1 až 2017 čísly, neboť všech čísel na talíři je 2018.

Součet čísel v obou úsecích je ze zadání roven jedné. Z toho vyplývá, že vždy právě jeden ze zkoumaného úseku a jeho doplňku je nemastný a právě jeden je neslaný. Kdyby totiž oba byly nemastné (s kladným součtem), pak by jejich součet musel být alespoň 2. A naopak, pokud by byly oba neslané (s nekladným součtem), pak by jejich součet musel být nejvýše 0. Každý úsek tak umíme jednoznačně spárovat s jeho doplňkem, přičemž v páru je vždy nemastný a neslaný úsek. A protože je párování jednoznačné, úseků obou typů musí být stejný počet.

Poznámky:

Drtivá většina došlých řešení byla správně nebo alespoň obsahovala správnou myšlenku. Na co si bylo při důkazu obzvlášť potřeba dát pozor, bylo opravdu dokázat oba směry implikace. Některá řešení dokázala, že pokud je Martínkem zkoumaný úsek nemastný, pak jeho doplněk musí být neslaný. To ale na kompletní důkaz ještě nestačí. Je potřeba také ukázat, že pokud je první úsek neslaný, pak druhý musí být nemastný. *(Lenka Kopfová)*

Úloha 4.

Ve frontě na oběd stojí n lidí, z nichž někteří jsou pravdomluvní a ostatní lháři. Pravdomluvní vždy mluví pravdu a lháři vždy lžou. Každý z nich tvrdí, že před ním je více lhářů než za ním pravdomluvných. Určete, kolik stojí ve frontě lhářů.

(Jakub Löwit)

Řešení:

Ukážeme, že ve frontě je $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ lhářů. Vzhledem k tomu, že první ve frontě má před sebou 0 lhářů a za sebou více než -1 pravdomluvných, musí jít o lháře, tedy počet lhářů $l \geq 1$. Pokud máme ve frontě l lhářů, pak nám výrok nejzadnějšího z nich řekne, že počet lhářů před ním $(l-1)$ je *menší než nebo roven* počtu pravdomluvných za ním. Tedy celkový počet $n \geq 2l-1$. Dostaneme $l \leq \frac{n+1}{2}$.

Obdobně mějme p pravdomluvných. Pro $n = 1$ není ve frontě žádný pravdomluvný, dále tedy předpokládáme $n \geq 2$. Vzhledem k tomu, že poslední ve frontě má za sebou 0 pravdomluvných a před sebou alespoň jednoho lháře, musí jít o pravdomluvného, tedy v každé takové frontě je $p \geq 1$. Ten z nich, který stojí nejvíce vepředu, nám říká, že počet lhářů před ním je větší než počet pravdomluvných $(p-1)$ za ním. Z toho už $n > (p-1) + 1 + (p-1) = 2p - 1$ Protože $p = n - l$, dostaneme

$$\begin{aligned} n &> 2n - 2l - 1, \\ 2l + 1 &> n, \\ l &> \frac{n-1}{2}. \end{aligned}$$

Kombinací odhadů pro p a pro l získáváme $l = \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Ještě je potřeba ověřit, že takový počet lhářů umíme do fronty nějak postavit. Zjevně pokud postavíme nejprve $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ lhářů a za ně $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ pravdomluvných, půjde o validní pořadí se správným počtem lhářů.

Alternativní (a mnohem častější) řešení:

Indukcí na k ukážeme, že prvních k je lhářů a posledních k je pravdomluvných, kde $0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$:

(1) Pro $k = 0$ tvrzení platí.

(2) Pokud $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, pak má člověk na pozici $k+1$ před sebou k lhářů a za sebou nejméně k pravdomluvných. Jeho výrok (pro připomenutí „počet lhářů přede mnou je *větší než* počet pravdomluvných za mnou“) nemůže platit, pročež musí jít o lháře. Podobně člověk na $(k+1)$-tém místě od konce má za sebou k pravdomluvných a před sebou nejméně k lhářů, jeho výrok jistě platí, a jde tedy o pravdomluvného.

Konečně pro n liché nám zbývá jeden člověk, o němž jsme nerozhodli. Ježto je počet lhářů před ním stejný jako počet pravdomluvných za ním, musí jít o lháře. Obecně tedy máme $\lfloor \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \rfloor = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ lhářů.

Poznámky:
Úloha sváděla k několika typům řešení, které nakonec nikam nevedly nebo řešiteli extrémně ztěžovaly práci při zápisu:

Někteří chtěli řadu *vystavět* induktivně. To je obtížné, nejen proto, že není hned jasné, že řada délky $n+1$ musí mít nějaké snadno určitelné úseky společné s řadou délky n, ale hlavně proto, že každý nově přidaný strávník může měnit pravdivost výroků velkého množství ostatních. Přinejmenším bylo třeba dokázat, že umíme přidávat na takové místo, kde toto nenastane, ale to neudělal asi nikdo. Použitelná indukce vedla pro pevně dané n a od obou krajů postupně *rozhodovala* o strávnících na jednotlivých místech, tedy jako ve vzoráku. Jedno z dobrých řešení tohohle typu měl *Karel Chwistek*. Hodně lidí mělo stejnou myšlenku (první lhář, poslední pravdomluvný, pak totéž obecně s k-tým a $(n-k)$-tým), ale zapomněli si ošetřit například situaci $k = n-k$ a tak se jim řešení rozbíjelo minimálně pro všechna lichá n, ne-li pro všechna n. Dost lidí předkládalo konstrukci (ta je tady dost snadno odhadnutelná), aniž pak dokázali, že vede na jediný možný počet, či že vůbec funguje. Speciálně se objevovaly pokusy argumentovat případy pro několik malých n, kterým ovšem chyběla jakákoli zobecňující myšlenka.

Co většinou dopadalo dobře byla řešení, která dokázala, že mezi strávníky nemůže stát lhář za pravdomluvným, po čemž už zbytek úvah byl triviální. Nicméně to je stále spousta zbytečné práce oproti řešením pomocí nerovností (popř. obhajování odhadů) získaných od dvou vhodně vybraných strávníků, která měla tu ohromnou výhodu, že se jinak nemusela vůbec starat o pořadí lidí ve frontě (zadání se přeci ptá jen na počet) a ušetřila si spousty zmatku s logikou a vůbec. Takové velmi svižné řešení měl třeba *Jonáš Havelka*. *(Ondra Tkaczyszyn)*

Úloha 5.

Na stole leží n hromádek oschlých knedlíků. Na začátku tvoří každou hromádku jeden knedlík. Kuchařka si v každém kroku vybere dvě hromádky a spojí je do jedné. Za spojení hromádek obsahujících x a y knedlíků dostane kuchařka $x \cdot y$ korun. Kolik si může kuchařka nejvýše vydělat postupným splácáním všech knedlíků na jednu hromadu?

(Pavel Hudec)

Řešení indukcí:
Dokažme, že maximální možný výdělek pro n knedlíků je $\frac{n(n-1)}{2}$. Pro $n = 1$ to zřejmě platí, nemůžeme spojit nic, a tím vyděláme přesně $\frac{1(1-1)}{2} = 0$ korun.

Mějme tedy n knedlíků. V posledním kroku, kterým spojíme všechny knedlíky na jednu hromádku, spojíme dvě zbývající hromádky o velikostech k a $n-k$. Za toto spojení tedy dostaneme $k(n-k)$ korun. Protože obě hromádky obsahují méně než n knedlíků, víme z indukčního předpokladu, že za hromádku velikosti k jsme získali nejvýše $\frac{k(k-1)}{2}$ a za hromádku velikosti $n-k$ nejvýše $\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$. Za hromádku velikosti n tedy získáme maximálně

$$\frac{k(k-1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} + k(n-k) = \frac{k(k-1) + (n-k)(n-k-1) + 2k(n-k)}{2} =$$

$$= \frac{k^2 - k + n^2 - nk - n - nk + k^2 + k + 2nk - 2k^2}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

což jsme chtěli dokázat.

Alternativní řešení:
Všimněme si, že když spojujeme dvě hromádky, vyděláme přesně tolik korun, kolik existuje různých dvojic knedlíků takových, že jeden knedlík je z první hromádky a druhý knedlík z druhé hromádky. Kuchařka tedy v každém kroku vydělá právě jednu korunu za každou dvojici knedlíků, kterou v daném kroku spojí. Vzhledem k tomu, že hromádky nelze rozpojovat, zůstanou tyto dva knedlíky ve stejné hromádce, a potkají se tak nejvýše jednou.

Protože na začátku jsou všechny knedlíky rozdělené a na konci všechny v jedné hromádce, je zřejmé, že každý knedlík se potkal s každým jiným alespoň jednou. Kuchařka tudíž každé dva knedlíky spojila právě jednou a za každé takovéto spojení vydělala jednu korunu. Proto nezáleží na pořadí, v jakém kuchařka hromádky spojuje – vždy vydělá stejně korun, jako existuje neuspořádaných dvojic knedlíků, tedy $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Poznámky:
Velká část z Vás úlohu zvládla vyřešit, ať už pomocí indukce, kombinatorického nahlédnutí či jiného důkazu, že na pořadí nezáleží. Bohužel spousta lidí jen spočítala, kolik si kuchařka vydělá, když bude přidávat knedlíky postupně po jednom, a nedokázala, že je to nejvyšší možný výdělek, což je zřejmě dokázáno, pokud ukážeme, že na pořadí nezáleží a vydělá vždy stejně. *(Ondřej Krabec)*

Úloha 6.

V písmenkové polévce plave sedm různých lichých prvočísel. Malý Kubíček si myslel, že pro každou dvojici p, q prvočísel z polévky platí, že zbylých pět prvočísel dělí hodnotu $p^8 - q^8$. Ukažte, že se Kubíček spletl.

(Marian Poljak)

Řešení:
Ze sedmice prvočísel plovoucích v Kubíčkově polévce zvolme nejmenší dvě a označme je p, q tak, aby platilo $p > q$. Ukážeme, že $p^8 - q^8$ nemůže mít pět různých prvočíselných dělitelů větších než p.

Rozložme
$$p^8 - q^8 = (p-q)(p+q)(p^2+q^2)(p^4+q^4).$$

Obě p, q jsou lichá, takže všechny činitele v součinu na pravé straně tohoto rozkladu jsou kladná (platí $p > q$) sudá čísla. Budeme chtít ukázat, že závorky na pravé straně rozkladu mohou mít po řadě nejvýše 0, 0, 1 a 3 různé prvočíselné dělitele větší než p. Využijeme toho, že pokud je přirozené číslo b násobkem přirozeného a, pak už nutně $a \leq b$.

Pro libovolné prvočíslo $r > p$ platí
$$p - q < p < r,$$
takže žádné takové r nemůže dělit $p - q$.

Stejné pozorování učiníme i o $p+q$: jedná se o sudé číslo, takže pokud je (liché) prvočíslo $r > p$ jeho dělitelem, musí dělit i $\frac{p+q}{2}$. Přitom ale díky $p > q$ máme
$$\frac{p+q}{2} < \frac{p+p}{2} = p < r,$$
takže žádné takové r nemůže dělit $p + q$.

Dále ukažme, že nejvýše jedno prvočíslo $r > p$ dělí $p^2 + q^2$. Pro spor nechť je tento činitel dělitelný dvěma různými prvočísly $r_1, r_2 > p$. Potom musí $p^2 + q^2$ být násobkem nejmenšího společného násobku čísel r_1, r_2. Tím je $r_1 r_2$, jelikož se jedná o různá prvočísla. Pak ale z jejich lichosti musí $r_1 r_2$ dělit i $\frac{p^2+q^2}{2}$, což dá spor v podobě
$$r_1 r_2 \leq \frac{p^2+q^2}{2} < \frac{p^2+p^2}{2} = p \cdot p < r_1 r_2.$$

Obdobně ukážeme, že nejvýše tři prvočísla $r_1, r_2, r_3 > p$ dělí $p^4 + q^4$. Pro spor nechť je tento činitel dělitelný čtyřmi po dvou různými prvočísly $r_1, r_2, r_3, r_4 > p$. Pak je díky jejich různosti a lichosti $\frac{p^4+q^4}{2}$ násobkem $r_1 r_2 r_3 r_4$, což dá spor v podobě

$$r_1 r_2 r_3 r_4 \leq \frac{p^4 + q^4}{2} < \frac{p^4 + p^4}{2} = p \cdot p \cdot p \cdot p < r_1 r_2 r_3 r_4.$$

Nyní už stačí jen pozorování, že každý prvočíselný dělitel čísla $p^8 - q^8$ musí dělit alespoň jednoho činitele na pravé straně rozkladu tohoto výrazu. Přitom ale každé ze zbylých pěti prvočísel z Kubíčkovy polévky je větší než p a zároveň jsme ukázali, že závorky na pravé straně rozkladu mohou takových prvočíselných dělitelů mít po řadě nanejvýš 0, 0, 1 a 3, tedy dohromady $4 < 5$. Některé ze zbylých pěti prvočísel tedy nedělí $p^8 - q^8$, jak se mělo dokázat.

Řešení pro šest prvočísel (volně podle Václava Janáčka):
Dokážeme, že znění úlohy platí, pokud místo sedmi lichých prvočísel uvažujeme pouze šest – tedy i pokud by si Kubíček myslel, že pro každá p, q ze šesti prvočísel v polévce dělí čtyři zbylá hodnotu $p^8 - q^8$.

Nahlédněme, že pro prvočíslo p a celá čísla a, b platí, že pokud $a^2 \equiv b^2 \pmod{p}$, pak už určitě $a \equiv b \pmod{p}$ nebo $a \equiv -b \pmod{p}$. První kongruence znamená $p \mid \left(a^2 - b^2\right) = (a-b)(a+b)$, takže pro prvočíslo p musí nastat jedna z možností $p \mid (a-b)$, $p \mid (a+b)$, což přesně odpovídá kongruencím, které chceme vyvodit. Z tohoto pozorování speciálně plyne, že pro dané d existují nejvýše dva možné zbytky, které může celé číslo c splňující $c^2 \equiv d \pmod{p}$ dávat modulo p.

Pro spor předpokládejme, že se Kubíček nemýlí, a označme m to největší ze šesti prvočísel a $p_1, \ldots, p_5$ zbylých pět. Potom má m dělit každé $p_i^8 - p_j^8$ pro $i, j \in \{1, \ldots, 5\}$, což značí

$$p_1^8 \equiv p_2^8 \equiv \cdots \equiv p_5^8 \pmod{m}.$$

Z pozorování výše existují nejvýše dva zbytky, které můžou $p_1^4, \ldots, p_5^4$ dávat mod m. Pak jsou z Dirichletova principu jednomu z těchto zbytků kongruentní alespoň tři z čísel $p_1^4, \ldots, p_5^4$. BÚNO jsou to p_1^4, p_2^4, p_3^4. Pak ale analogicky máme $p_1^4 \equiv p_2^4 \equiv p_3^4 \pmod{m}$, takže existují nejvýše dva zbytky, které mohou p_1^2, p_2^2, p_3^2 dávat mod m. Dirichletovým principem dvě z nich dávají stejný zbytek, BÚNO jsou to p_1^2 a p_2^2.

Máme tedy $m \mid (p_1^2 - p_2^2) = (p_1 - p_2)(p_1 + p_2)$. To značí, že m dělí alespoň jedno z $p_1 - p_2$, $p_1 + p_2$, resp. dokonce alespoň jedno z $\frac{p_1 - p_2}{2}$, $\frac{p_1 + p_2}{2}$ (obě závorky jsou sudá čísla a m je liché). Pamatujme však, že m jsme zvolili jako největší prvočíslo v polévce, takže $m > p_1, p_2$, z čehož i $m > \frac{p_1 - p_2}{2}$, $\frac{p_1 + p_2}{2}$. To je spor, takže Kubíček se vskutku mýlil. Jelikož se musel mýlit už pro šest prvočísel v polévce, musel se nutně mýlit i pro sedm.

Poznámky:
Většina pětibodových řešení využívala volbu nejmenších dvou prvočísel p, q ze sedmice. Někteří řešitelé se pokusili využít naopak největší z daných prvočísel, ale pouze *Václav Janáček* a *Zdeněk Pezlar* toto zvládli bez chyb. Prvý jmenovaný si vysloužil $+i$ za to, že úlohu vyřešil dokonce jen s šesti prvočísly namísto sedmi. Mnozí řešitelé po vhodné volbě p, q zvládli ošetřit činitele $p - q$ a $p + q$, ale zasekli se na $p^2 + q^2$ a $p^4 + q^4$. V takových případech jsem uděloval částečné body za rozklad

$$p^8 - q^8 = (p-q)(p+q)(p^2+q^2)(p^4+q^4),$$

rozumnou extremální volbu prvočísla či prvočísel ze sedmice nebo využití sudosti všech $p^n \pm q^n$.

(Matěj Doležálek)

Úloha 7.

Anička si do ovesné kaše nakreslila rovnostranný trojúhelník ABC a označila M střed strany AB. Přišel Fíla a nakreslil na stranu AC bod D a na stranu BC bod E tak, aby $|\sphericalangle DME| = 60°$. Ukažte, že platí $|AD| + |BE| = |DE| + \frac{1}{2}|AB|$, ať už Fíla vybral body jakkoli.

(Marian Poljak)

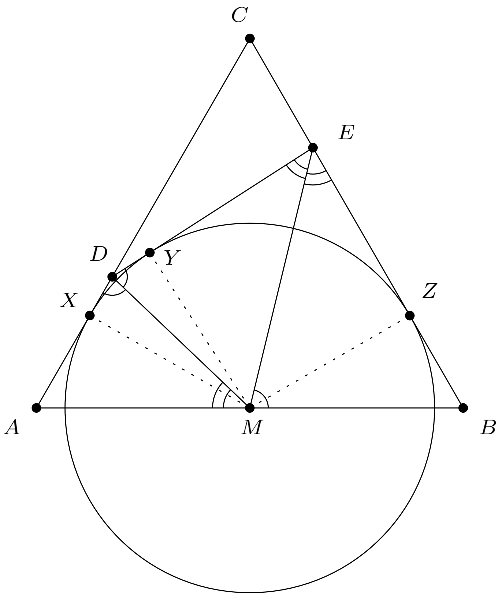
Řešení:

Označme si α velikost úhlu $\sphericalangle BME$ a β velikost úhlu $\sphericalangle MEB$. Podívejme se nyní na trojúhelník MEB, kde je velikost úhlu $|\sphericalangle MBE| = 60°$, a proto $\alpha + \beta = 120°$. Stejně tak $|\sphericalangle DME| = 60°$, dopočteme:

$$|\sphericalangle AMD| = 180° - |\sphericalangle DME| - \alpha = 120° - \alpha = \beta.$$

Obdobně:

$$|\sphericalangle ADM| = 180° - 60° - \beta = 120° - \beta = \alpha.$$



Nyní předpokládejme, že bod M je středem kružnice k připsané straně DE trojúhelníku CDE. Nechť X, Y, Z jsou po řadě body dotyku k s přímkami DC, DE a EC. Úsečky EZ a EY jsou tečny ke kružnici k z bodu E a obdobně DY a DX jsou tečny z bodu D, tudíž mají tyto dvojice stejnou délku. Už nám jenom stačí říct, že trojúhelník AMX je pravoúhlý s úhly $60°$, $30°$, $90°$, a proto musí platit $|AX| = \sin 30° \cdot |AM| = \frac{1}{2}|AM|$. Obdobně u trojúhelníku BMZ platí $|BZ| = \frac{1}{2}|BM|$.

Nyní už stačí dosadit naše výsledky do původní rovnice a dostaneme hledanou rovnost:

$$|AD| + |BE| = |XD| + |XA| + |EZ| + |ZB| = |DY| + \frac{1}{2}|AM| + |EY| + \frac{1}{2}|BM| =$$
$$= |AM| + |DY| + |EY| = \frac{1}{2}|AB| + |DE|.$$

Zbývá dokázat, že M je skutečně středem k. Uvedeme si dva způsoby, jak to udělat.

Řešení pomocí podobnosti:
Z vypočítaných velikostí úhlu plyne, že trojúhelníky AMD a BEM jsou podobné dle věty uu. Z podobnosti a rovnosti $|MB| = |MA|$ ze zadání dostáváme, že $\frac{|DM|}{|ME|} = \frac{|DA|}{|MB|} = \frac{|DA|}{|MA|}$. Zároveň platí $|\sphericalangle DME| = |\sphericalangle MAD| = 60°$, proto jsou trojúhelníky AMD a MED podobné podle věty sus. Z podobnosti víme, že $|\sphericalangle DEM| = \beta$ a $|\sphericalangle MDE| = \alpha$, což znamená, že ME je osa úhlu $\sphericalangle DEB$ a DM je osa úhlu $\sphericalangle ADE$. Tedy M je skutečně střed kružnice připsané.

Řešení přes správný úhel:
Označme M' střed kružnice k. Ten musí ležet na ose úhlu u C, což je přímka CM. Dále musí ležet na osách vnějších úhlů, tedy platí

$$|\sphericalangle DM'E| = 180° - |\sphericalangle M'DE| - |\sphericalangle M'ED| = 180° - \left(\frac{|\sphericalangle ADE|}{2} + \frac{|\sphericalangle BED|}{2}\right) =$$
$$= 180° - \left(180° - \frac{|\sphericalangle CDE|}{2} - \frac{|\sphericalangle CED|}{2}\right) = 90° - \frac{|\sphericalangle DCE|}{2} = 60°.$$

Stejně tak ovšem známe i $|\sphericalangle DME| = 60°$. Takový bod je však na polopřímce CM pouze jediný, tedy už nutně $M \equiv M'$.

Poznámky:
Řešení přišlo opravdu hodně a většina z nich byla správná. Někteří se vydali počítací cestou. Občas použili přímo analytickou geometrii nebo upravovali dlouhé algebraické výrazy vycházející z kosinové věty, což byla velice náročná cesta. I přesto byla spousta řešení syntetická nebo málo počítací a většina vyšla na plný počet bodů. Bylo třeba dávat si pozor na odmocňování, u kterého mnozí špatně odůvodnili ekvivalenci úpravy, tudíž jim byl stržen bod. *(Filip Čermák)*

Úloha 8.

Na $2n$ stolech školní jídelny po obědě zbyly hromádky rýže. Školník s uklízečkou hrají následující hru. Pravidelně se střídají v tazích, přičemž školník začíná. Hráč na tahu si musí zvolit některých n neprázdných stolů a z každého z nich sníst libovolný nenulový počet zrnek rýže (nemusí ze všech stolů sníst stejný počet). Kdo nemůže táhnout, prohrál. V závislosti na počtu stolů a zrnek rýže na nich určete, kdo má vyhrávající strategii.

(Filip Čermák)

Řešení:
Hra zřejmě musí někdy skončit a výsledkem nemůže být remíza, v každé pozici tedy musí mít některý z hráčů vyhrávající strategii. Pozice hry rozdělme na *vyhrávající* (to jsou ty, kde má hráč na tahu vyhrávající strategii) a *prohrávající* (hráč, který není na tahu, má vyhrávající strategii). Potřebujeme rozhodnout, které pozice jsou prohrávající, a dokázat, že pro naše rozdělení platí několik následujících podmínek. Když jsme ve vyhrávající pozici, měli bychom být schopni táhnout tak, aby potom byl soupeř v prohrávající pozici. Naopak když je soupeř v prohrávající pozici, měli bychom po jeho tahu být v pozici vyhrávající, ať už táhne jakkoli. A samozřejmě pozice, ve kterých není možné táhnout, musí být podle zadání prohrávající. Pokud najdeme rozdělení, které tyto podmínky splňuje, bude už nutně správné.

Označme počet zrnek na nejmenší hromádce k. Nechť jsou prohrávající pozice právě ty, ve kterých je na více než n stolech právě k zrnek rýže. Pokud jsme ve vyhrávající pozici, můžeme vybrat n hromádek, na kterých je více než k zrnek, a zmenšit je tak, aby na každé z nich bylo zrnek právě k. Když jsme v prohrávající pozici, musíme kvůli Dirichletovu principu zmenšit aspoň jednu hromádku, kde je k zrnek. Nové minimum tedy bude menší než k. My jsme ale mohli zmenšit jenom n hromádek, nová pozice je tedy vyhrávající (nejmenších hromádek je maximálně n). Koncové pozice obsahují aspoň $n+1$ prázdných hromádek, jsou tedy prohrávající. Tím jsme ukázali, že naše rozdělení pozic na vyhrávající a prohrávající splňuje požadované podmínky a je skutečně správné.

Školník má vyhrávající strategii právě tehdy, když je nejmenších hromádek nejvýše n. V opačném případě má vyhrávající strategii uklízečka.

Poznámky:
Úlohu odevzdalo poměrně velké množství řešitelů a většina z nich si s úlohou poradila. Na první pohled nemusí být jasné, jak nás ve vzorovém řešení napadlo vybrat zrovna tyhle prohrávající pozice. Stačí se podívat na pozice, kde jsou hromádky s málo zrnky (nejmenší hromádka má třeba 0-2 zrnka). Z těchto snadno řešitelných případů už je možné odhadnout, jak budou obecně vypadat prohrávající pozice. Pokud Tě tato úloha zaujala a chtěl(a) by ses o teorii her dozvědět něco víc, můžeš se podívat na seriál o teorii her z 32. ročníku.[1] *(Josef Minařík)*

[1] Seriál najdeš na adrese *https://mks.mff.cuni.cz/archive/32/12.pdf*.