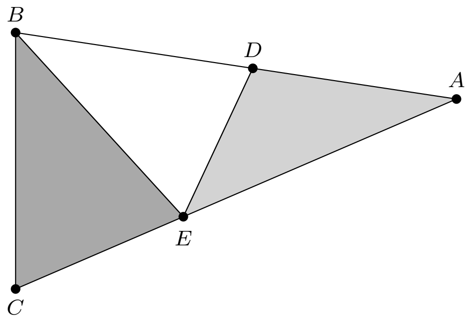
Cesta kolem světa

1. PODZIMNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Během Daníkovy pěší túry Himálajem vypukla v Nepálu bouřlivá debata o nové podobě státní vlajky. Daník do této debaty jakožto nadšený vexilolog přispěl návrhem vlajky ve tvaru trojúhelníku ABC, na jehož stranách AB, AC leží postupně body D, E. Tyto body dělí vlajku na barevné trojúhelníky ADE, DEB, BCE se stejnými obsahy. Určete hodnotu $\frac{|AE|}{|AC|}$.



(Magdaléna Mišinová)

ŘEŠENÍ:

Trojúhelník CEB tvoří třetinu obsahu trojúhelníku ABC a tyto dva trojúhelníky mají stejnou výšku z vrcholu B (označíme ji v). Pro jejich obsahy platí

$$S_{ABC} = \frac{|AC| \cdot v}{2},$$
$$S_{CEB} = \frac{|CE| \cdot v}{2},$$
$$\frac{|AC| \cdot v}{2} = 3 \cdot \frac{|CE| \cdot v}{2}$$

a po úpravě

$$|AC| = 3 \cdot |CE|.$$

Z toho už plyne, že bod E leží ve třetině strany AC blíže k bodu C a tedy $\frac{|AE|}{|AC|} = \frac{2}{3}$.

Poznámky:

Všechna došlá řešení získala plný počet bodů. Většina řešitelů úlohu řešila stejným způsobem jako vzorové, někteří využili k řešení místo trojúhelníku CEB trojúhelník AED nebo BDE. Našla se i hezká řešení využívající podobnosti trojúhelníků při spuštění výšek na BC z vrcholů A a E.

Jediné chyby, které se objevily, byly až v posledním kroku, kdy někteří místo hodnoty $\frac{|AE|}{|AC|}$ uvedli hodnotu $\frac{|AE|}{|EC|} = 2$. I těmto řešením jsem ale udělila plný počet bodů, protože postupovala správně a odhalila, že bod E leží ve třetině strany AC. *(Jolana Štraitová)*

Úloha 2.

Orgové na jarním soustředění uspořádali hru se stanovišťmi označenými $1, 2, \ldots, 2023$. *Na stanovišti* 2023 *se nachází cíl se spoustou nadívaných žampiónů, kdežto na každém stanovišti* $i \in \{1, 2, \ldots, 2022\}$ *měl ležet papír s instrukcí „Jdi na stanoviště* $i + 1$*“. Jenže orgové jsou nešikové a během rozvěšování těchto* 2022 *papírů pomíchali a na těchto* 2022 *stanovišť je rozvěsili v nějakém jiném pořadí. Pokud účastníci začínají na stanovišti* 1*, lze s jistotou říct, že někdy dojdou do cíle?*

(Matěj Doležálek)

Řešení:

Protože počet stanovišť je konečný, nedojdou účastníci do cíle jen za předpokladu, že navštíví nějaké stanoviště dvakrát, a tím pádem se dostanou do cyklu. Ukážeme, že to není možné.

Nejdříve si uvědomme, že na každé stanoviště $\{2, 3, \ldots, 2023\}$ je možno dostat se právě jedním způsobem. Navíc na stanoviště 1 se účastníci nikdy nevrátí, protože neexistuje papír, který by je tam navedl.

Nyní předpokládejme, že účastníci jdou ze startu a navštěvují nová a nová stanoviště až do doby, než přijdou na dosud nenavštívené stanoviště A, které je odkáže na stanoviště B, na němž již byli. Původně se ale účastníci do B dostali z nějakého jiného stanoviště C. Vzniká nám tedy spor, protože do B nám vedou dvě různé cesty ze dvou různých stanovišť A a C.

Dokázali jsme, že se účastníci nikdy nemohou vrátit na již navštívené stanoviště, což nutně znamená, že někdy musí navštívit cílové stanoviště.

Poznámky:

Většina řešení postupovala podobně jako vzorové řešení. Někteří zapomněli zmínit, že zpátky do prvního stanoviště účastníky žádný papír nenavede, a tím pádem se nemohou dostat do cyklu hned na začátku. Za to jsem ale body nestrhával. *(Antonín Španiel)*

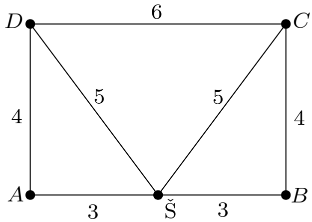
Úloha 3.

Čtyři PraSátka se odstěhovala do australské buše a postavila si domečky ve vrcholech obdélníku, jehož strany mají délky 4 *a* 6*. Šimonovi se po nich stýská, a proto by si chtěl postavit v buši chatrč tak, aby měla od všech zbylých PraSátek racionální vzdálenost. Může se mu to povést?*

(Josef Minařík)

Řešení:

Ukážeme si, že se to Šimonovi povést může. Nechť A, B, C, D jsou body zobrazující PraSátka v buši. Když si Šimon $(\check{S})$ umístí chatrč ve středu úsečky AB, bude jeho vzdálenost k PraSátkům v bodech A, B rovna 3. Vzdálenost k PraSátkům C a D bude z Pythagorovy věty $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, takže dané umístění chatrče vyhovuje zadání.



Poznámky:
Všechna řešení odhalila, že střed delší strany obdélníku splňuje zadání, a dostala za to plný počet bodů.
(Káťa Danilina)

Úloha 4.

Marian nalezl při potápění v Mariánském příkopě dva kvadratické polynomy $P(x)$ a $Q(x)$ takové, že polynom $P(Q(x))$ má čtyři reálné kořeny $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Dokažte, že musí platit $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$.
(Matěj Doležálek)

Řešení:
Nechť $P(x) = \alpha(x-m)(x-n)$, kde $\alpha, m, n \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$, a $Q(x) = ax^2+bx+c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Potom rovnici hledající kořeny $P(Q(x))$ zapíšeme jako $P(Q(x)) = \alpha(Q(x) - m)(Q(x) - n) = 0$. Ze zadání víme, že $P(Q(x))$ musí mít právě čtyři reálné kořeny. To znamená, že každá kvadratická rovnice $Q(x) - m = 0$ a $Q(x) - n = 0$ musí mít dva reálné kořeny. Rozepišme tyto rovnice:

$$Q(x) - m = ax^2 + bx + (c - m) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c-m}{a} = 0, \tag{1}$$

$$Q(x) - n = ax^2 + bx + (c - n) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c-n}{a} = 0. \tag{2}$$

Nechť x_i a x_j jsou řešením rovnice (1) a x_k a x_l jsou řešením rovnice (2). Z Viétových vztahů plyne z rovnice (1), že $x_i + x_j = -\frac{b}{a}$, a z rovnice (2), že $x_k + x_l = -\frac{b}{a}$. Zjevně tedy $x_i + x_j = x_k + x_l$.

Nyní už jen zbývá ukázat nerovnost mezi kořeny. Víme, že x_i, x_j, x_k, x_l jsou čtyři různá řešení. Jelikož to tedy nejsou stejná čísla, můžeme mezi nimi BÚNO zapsat pár nerovností. Nechť $x_i < x_j$. Tím jenom říkáme, že jeden z kořenů rovnice (1) je větší než druhý. Obdobně pak ať $x_k < x_l$, čímž zase pouze říkáme, že kořeny kvadratické rovnice (2) jsou rozdílné. A také ať $x_i < x_k$. Touto nerovností říkáme, že jeden z kořenů rovnice (1) nám nemůže vyjít jako jeden z kořenů rovnice (2), protože jinak bychom neměli čtyři různá řešení. Už víme, že platí $x_i + x_j = x_k + x_l$. Když x_k na pravé straně nahradíme x_i, pravá strana se zmenší a dostaneme nerovnost

$$x_i + x_j > x_i + x_l \implies x_j > x_l.$$

Vezměme nerovnost $x_i < x_k$. Víme, že $x_k < x_l$, a také jsme dokázali, že $x_l < x_j$. Porovnáním dostáváme, že $x_i < x_k < x_l < x_j$. Když toto porovnáme se zadáním, kde $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, dostáváme, že $i = 1$, $k = 2$, $l = 3$, $j = 4$, což znamená, že $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$. Což je přesně, co jsem chtěli dokázat.[1]

Poznámky:
Našla se spousta úspěšných a povedených řešení. Byly čtyři typy řešitelů. Někteří zvolili přístup vzorového řešení s Viétovými vztahy, mnoho řešitelů využilo symetrie paraboly skrz osu procházející extrémem. Pár řešení zvolilo přístup přes diskriminant. Mezi nimi byla pěkná řešení, která zaznačila diskriminant písmenem D, mezitím co některá řešení úlohu umlátila hromadou algebry.
(Jaromír Potůček)

[1] Kdybychom nerovnosti, které jsme předpokládali z povahy zadání, zadali jinak, mohli bychom přehodit značení a opět by vše vyšlo.

Úloha 5.

Pepa se účastní Rallye Sahara na svém závodním dromedárovi. Na okružní trase je rozmístěno několik artézských studní, které však nemají mnoho vody. Ve všech studních dohromady se nachází přesně tolik vody, kolik jí Pepův velbloud spotřebuje na zdolání trasy. Vždy, když Pepa dorazí ke studni, velbloud vypije všechnu vodu, která je k dispozici (jeho hrb má neomezenou kapacitu), ale pokud mu voda dojde, zastaví se a nepůjde dál. Dromedárova spotřeba vody je přímo úměrná vzdálenosti, kterou urazí, přičemž na začátku závodu nemá žádnou vodu a potřebuje se napít ze studny, u které začíná. Dokažte, že když si Pepa zvolí správnou počáteční studnu, podaří se mu zdolat celou trasu. *(Matouš Šafránek)*

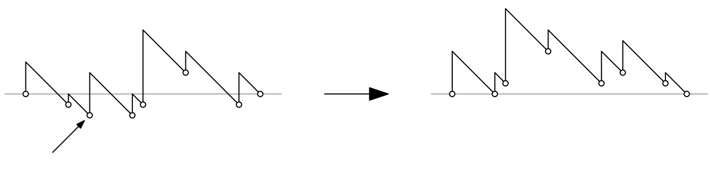
Nejčastější řešení:
Na začátek si rozmysleme, že na jakémkoli okruhu existuje studna, jejíž zásoba vody stačí k přechodu k následující studně na okruhu. Pokud by totiž žádná taková neexistovala, obsahovaly by všechny studny v součtu méně vody, než je třeba ke zdolání součtu všech těchto úseků mezi studnami (tj. ke zdolání celé okružní trasy rallye), což je spor se zadáním.

Uvažme tedy takovou studnu A, od které se dá dojít alespoň ke studně B. Následně si představme, že veškerou vodu z B přelijeme do studny A. Všimněme si, že vzdálenost, kterou je dromedár schopen od studně A urazit, se nijak nezmění, pouze místo „doplnění vody“ u studně B dostane vodu z obou studní již u studně A. Uvažovaný závodní okruh je tudíž zdolatelný, pokud je zdolatelný tento zjednodušený okruh, kde studna B vůbec neexistuje.

V tomto novém okruhu navíc opět musí existovat studna, od které se dá přejít ke studni následující. Popsané přelití a smazání studny můžeme proto provést znovu a uvažovanou trasu dále zjednodušit. Následně již není těžké nahlédnout, že takto redukovat budeme až do doby, kdy nám na celém okruhu zbyde pouze jedna studna. Při startu od této studny Pepa určitě zdolá celou trasu (obsahuje veškerou vodu na okruhu, tj. právě tolik, kolik jí dromedár potřebuje). To ovšem znamená (jelikož naše umazávání nijak nemění vzdálenost, kterou dromedár od dané studny urazí), že při startu od této studny zdolá Pepa celou trasu i na původním, nezredukovaném okruhu. Tím je úloha hotová.

Řešení dle hintu:
Představme si, že dromedárovi umožníme pokračovat i se záporným množstvím vody v hrbu. Následně ho od libovolné studny necháme obejít celý závod, přičemž si do grafu poznamenáme vývoj množství vody v jeho hrbu v závislosti na poloze na okruhu. Pokud toto množství nikdy neklesne do záporu, je zvolená studna hledanou počáteční studnou.

V opačném případě nalezneme na trase bod, kde měl dromedár vody nejméně, a necháme dromedára závod obejít ještě jednou s tím, že bude startovat v libovolném takovém bodě (ten nutně musí být studnou, jinak by od něj dromedár mohl popojít ještě o pár kroků dál a měl by méně vody než je minimum, což je spor). Nově nakreslený graf pak bude mít stejný průběh jako graf původní (množství vody mu bude klesat i stoupat stejně jako předtím), ovšem tím, že jsme začali v bodě minimální hodnoty, bude tato hodnota nově rovna nule. Množství vody v dromedárově vaku proto nikdy neklesne do záporu. To znamená, že se dromedárovi podaří obejít celou trasu, aniž by mu došla voda, a zvolený startovní bod je hledanou počáteční studnou. Tím je úloha hotová.



Poznámky:
Velká část řešitelů pracovala s nějakou obdobou „umazávání“ studen a postupného zjednodušení na okruh s jednou studnou. Zde někteří bohužel opomněli alespoň poznamenat, že takový případ platí triviálně, za což jsem strhával bod. *(Josef „José“ Soural)*

Úloha 6.

Šošo během své návštěvy New Yorku obdivuje místních n mrakodrapů, z nichž každý má kladnou celočíselnou výšku. Pro každé dva mrakodrapy si Šošo do svého notýsku poznamenal rozdíl jejich výšek. V závislosti na n určete, kolik nejvíce různých mocnin dvojky mohl Šošo na konci svého výletu v notýsku mít. *(Josef Minařík)*

Řešení:

Ukážeme si, že maximální počet zapsaných mocnin dvojky je $n-1$. Jako první popíšeme možné výšky mrakodrapů, jejichž rozdíly nám $n-1$ mocnin dvojky opravdu dají. Výšky mrakodrapů označme m_1 až m_n a volme $m_i = 2^i$. Potom pro všechny i, $1 \leq i < n$ platí

$$2^{i+1} - 2^i = 2^i(2-1) = 2^i,$$

což je mocnina dvojky různá od všech ostatních, přičemž takových rozdílů bude $n-1$.

Dále dokážeme, že více mocnin dvojek v notýsku Šošo mít nebude. Vytvořme si graf[2] $G = (M, R)$ kde M je množina všech mrakodrapů a R je množina dvojic mrakodrapů takových, že $(m_j, m_k) \in R$ právě když $m_j - m_k$ nebo $m_k - m_j$ je mocnina dvojky. Pokud by platilo, že $m_{j_1} - m_{k_1} = m_{j_2} - m_{k_2} = \cdots = m_{j_r} - m_{k_r} = 2^i$, BÚNO do grafu zařadíme pouze jednu z těchto hran. Sporem ukážeme, že tento graf nemůže obsahovat cyklus. Označme mrakodrapy v takovém cyklu jako $m_{c_1}, m_{c_2}, \ldots, m_{c_r}$ tak, aby platilo $m_{c_{i+1}} - m_{c_i} = \pm 2^{d_i}$ kde d_i jsou po dvou různá. Dále $m_{c_r} - m_{c_1} = 2^d$. BÚNO $2^d > 2^{d_i}$. Potom platí

$$2^d = \pm 2^{d_1} \pm \cdots \pm 2^{d_r}.$$

Jenže je známé, že $2^d = 1 + \sum_{k=0}^{d-1} 2^k$, což je kvůli různosti všech d_i ostře větší než výraz $\pm 2^{d_1} \pm \cdots \pm 2^{d_r}$, čímž dostáváme spor. Graf neobsahuje cyklus, tím pádem se jedná o strom nebo les. O těch je známo, že obsahují nanejvýš $n-1$ hran a důkaz je tak hotov.

Poznámky:

Většina správných řešení postupovala obdobně jako vzorové. Odchylky nastávaly pouze v argumentu, že mocnina dvojky nelze zapsat jako kombinace jiných mocnin dvojek – dá se např. odvolat na jednoznačnost reprezentace čísel v binární soustavě nebo výraz vydělit nejmenším společným dělitelem a dostat spor s paritou. Někteří řešitelé zapomněli napsat, proč pro $n-1$ různých mocnin dvojky správné výšky mrakodrapů zvolit lze (případně jak), za což jsem strhával bod. Pouze za popis konstrukce jsem naopak bod udělil. Za pouhé konstatování, že mocnin dvojek je $n-1$ jsem body neuděloval. *(Jakub Vlček)*

Úloha 7.

Majda si zařizuje pas na cestu kolem světa. Pas má tvar nějakého konvexního n-úhelníku s obsahem S a obvodem o. Majda má kruhovou fotografii s poloměrem $\frac{S}{o}$. Víme jistě, že se fotografie do pasu vejde? *(Natália Bátorová)*

Řešení:

Budeme ukazovat, že se fotografie do pasu vejde.

Sestrojme nad každou stranou obdélník, který má délku druhé strany $\frac{S}{o}$ a je celý v polorovině směrem dovnitř našeho n-úhelníku (viz obrázek). Každý z těchto obdélníků má obsah $a_i \cdot \frac{S}{o}$, kde a_i je délka i-té strany n-úhelníku, tedy součet jejich obsahů je

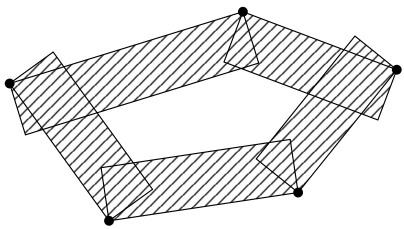
$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \frac{S}{o} = o \cdot \frac{S}{o} = S.$$

[2] Tento důkaz využívá trochu odbornější pojmy jako „graf“, „hrana“ či „strom“. Pokud jsi o teorii grafů v životě neslyšel, doporučil bych ti se mrknout na prasečí seriál *https://prase.cz/archive/34/serial.pdf*, který toto téma pokrývá velmi dobře. Nabyté znalosti se ti budou určitě ještě mnohokrát hodit!

Ale pokud vyšrafujeme oblast, kterou pokrývají, obsah této oblasti bude ostře menší než součet obsahů obdélníků, protože u každého vrcholu dochází k jejich překryvu (všechny vnitřní úhly jsou konvexní). Tudíž nějaká část pasu zůstane nevyšrafovaná.

Dále si uvědomme, že vzdálenost vnitřního bodu k obvodu je v konvexním mnohoúhelníku kolmice na nejbližší stranu. Kdyby to nebyla kolmice, pak vzdálenost po kolmici na tu stranu bude díky trojúhelníkové nerovnosti menší než minimální. A pokud kolmice nejbližší stranu neprotne, pak díky konvexitě našeho n-úhelníku protne sousední (nebo nějakou další) stranu dříve než prodloužení té nejbližší. Pak je ovšem ta strana bodu blíže než ta původní, takže nešlo o nejbližší stranu. Tudíž víme, že body se vzdáleností k obvodu menší rovnou $\frac{S}{o}$ budou součástí obdélníku nad nejbližší stranou.

Střed fotografie tedy můžeme umístit do kteréhokoliv bodu v nevyšrafované části pasu.



Poznámky:

Většina správných řešení postupovala podobně jako vzorové. Většina nesprávných řešení ukazovala, že do pravidelných n-úhelníků se fotografie vejde, ale žádnému se nepovedlo říct, jak z toho vyplývá, že se vejde i do obecného konvexního mnohoúhelníku. *(Vít Hanika)*

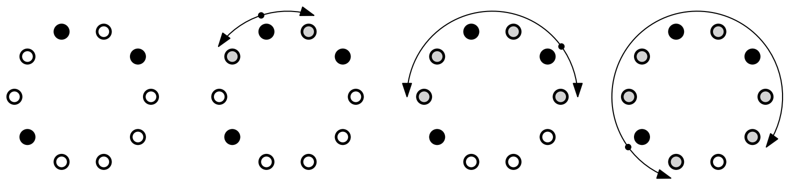
Úloha 8.

Na pobřeží Antarktidy má každý z k států jednu či více vědeckých základen, dohromady jich mají 2023. Každá základna patří právě jednomu státu. Najděte největší možné k takové, aby mohla platit následující podmínka. Pro každou základnu z a stát S, který je jedním z našich k států, existuje souvislá část pobřeží, na které leží z a na níž alespoň polovina základen patří státu S. *(Magdaléna Mišinová)*

Řešení podle Davida Hromádky:

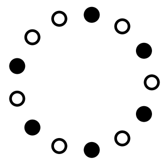
Nejprve ukažme, že pro $k \geq 3$ podmínka ze zadání určitě splněna být nemůže.

Uvažme stát S, který má na Antarktidě nejméně základen. Základny státu S obarvěme černě a všechny ostatní základny nechme pro začátek bílé. Nyní budeme postupně přebarvovat bílé základny na šedé. Pro každou základnu z státu S provedeme následující operaci: najdeme nejbližší bílou základnu ve směru po a proti směru hodinových ručiček od z a přebarvíme je obě na šedé.



Pro $k \geq 3$ má stát S na Antarktidě nejvýše $\left\lfloor \frac{2023}{k} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{2023}{3} \right\rfloor = 674$ základen. To ale znamená, že jsme šedě přebarvili nejvýše $2 \cdot 674$ základen, takže černých a šedých je dohromady maximálně $3 \cdot 674 = 2022$ a zbývá aspoň jedna bílá, označme ji z. Ukážeme, že základna z nesplňuje podmínku ze zadání. Předpokládejme, že existuje souvislá část pobřeží P obsahující z, kde je aspoň polovina základen černých. Odstraněním základny z se nám P rozpadne na dvě části, z nichž aspoň jedna musí obsahovat ostře více než polovinu černých základen. V přebarvovací fázi jsme uvážili každou z těchto černých základen a přebarvili nejbližší bílou základnu v obou směrech (zejména tedy ve směru k z) na šedou. To je ovšem spor, protože bychom museli přebarvit z, což se nestalo.

Zbývá ukázat, že pro $k = 2$ může být podmínka splněna. Na to nám stačí pravidelně střídat základny obou států – někde nám vyjdou dvě základny jednoho státu vedle sebe, protože 2023 je liché, ale to nevadí. Každá základna tak sousedí s aspoň jednou základnou jiného státu. Vždy, když tedy dostaneme nějaký stát a nějakou základnu, můžeme jako část pobřeží vybrat tuto základnu a jejího souseda z jiného státu. V takové části pobřeží mají oba státy přesně polovinu základen.



Poznámky:
Správných řešení bylo několik, ale zdaleka nejelegantnější bylo to od *Davida Hromádky*, které jsme si právě popsali. Mnoho řešitelů mělo víceméně správnou myšlenku, ale nedokázali ji formulovat dostatečně formálně, typicky používali vágní argumenty o tom, proč každá základna pokryje jenom dvě další. Nemálo řešitelů také zapomnělo popsat konstrukci pro $k = 2$. *(Josef Minařík)*