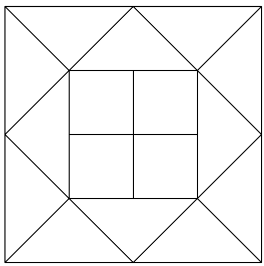
Strašidla

1. PODZIMNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Čarodějnice Klárka rozlámala čtvercovou tabulku čokolády o délce strany 1 na 12 shodných trojúhelníků a 4 shodné čtverce jako na obrázku. Určete obsahy jednotlivých dílků.



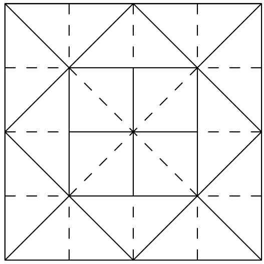
(„madam Verča“ Hladíková)

ŘEŠENÍ:

Všimněme si, že nejdelší strana v trojúhelnících se na straně velkého čtverce nachází dvakrát. Její délka je tedy $\frac{1}{2}$. Prostřední čtverec, tvořený čtyřmi malými čtverci, má všechny strany společné s nejdelší stranou nějakého trojúhelníka, má tedy také délku strany $\frac{1}{2}$. Strana prostředního čtverce je dále tvořena dvěma stranami malých čtverečků, které tudíž mají délku strany $\frac{1}{4}$. Obsah každého malého čtverečku je proto $\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$. Obsah celé čokolády je 1, tedy obsah všech trojúhelníčků dohromady je $1 - 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{4}$. Vydělením výrazu celkovým počtem trojúhelníků dostaneme obsah každého trojúhelníku: $\frac{3}{12 \cdot 4} = \frac{1}{16}$. Každý dílek, ať už čtvercový nebo trojúhelníkový, má tudíž obsah $\frac{1}{16}$.

ALTERNATIVNÍ ŘEŠENÍ:

Pokud si každý čtvereček rozpůlíme úhlopříčně a každý trojúhelníček podle výšky na přeponu, dostaneme 32 shodných trojúhelníčků, z nichž každý má obsah $\frac{1}{32}$. Každý dílek se skládá ze dvou těchto trojúhelníčků, tedy všechny dílky mají shodný obsah $\frac{1}{16}$.



Poznámky:

Sešlo se velké množství správných řešení, ke správnému výsledku vedlo i mnoho jiných postupů. Několik řešitelů se pokoušelo dokázat i to, že trojúhelníkové dílky musí být pravoúhlé a rovnoramenné, aby mohly být takto uspořádány, což se nikomu nepovedlo, ale body jsem za to nestrhával.

(Benedikt Bareš)

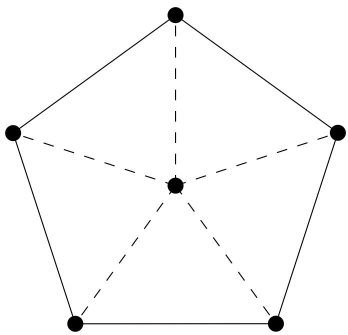
Úloha 2.

Vodník Pepa chce rozmístit svých šest hrníčků s dušičkami na rovném dně rybníka tak, aby každé tři z nich tvořily vrcholy rovnoramenného trojúhelníku. Najděte způsob, jak toho může docílit.

(Josef Minařík)

Řešení:

Nejprve si uvědomme, že jakékoli dva body na dané kružnici tvoří s jejím středem rovnoramenný trojúhelník. Toho můžeme využít i při naší konstrukci. Vyhovuje pak rozmístění pěti hrníčků do vrcholů pravidelného pětiúhelníku a šestého do středu kružnice jemu opsané.



Poznámky:

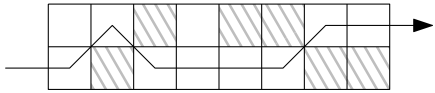
Velká většina řešitelů úlohu vyřešila správně konstrukcí ze vzorového řešení. Někteří řešitelé zapomněli zmínit, že pětiúhelník musí být pravidelný. *(Vendula Onderková)*

Úloha 3.

Hrobař Radeček je hrdým správcem obdélníkového hřbitova, na němž je rozmístěno $2{\times}8$ čtvercových hrobů. Každou noc o půlnoci chodí od jedné z kratších hřbitovních zdí k té druhé, přičemž vždy může vstoupit pouze na hrob, který s tím, na němž zrovna stojí, sousedí stranou nebo vrcholem.

Radečkův hřbitov však není jen tak ledajaký – v každém hrobu dřímá jeden upír. Při každém úplňku se nějaká skupinka upírů rozhodne, že při soumraku otevřou své hroby a vydají se trýznit smrtelníky. S úsvitem se pak všichni upíři vrátí do svých hrobů a opět je zavřou.

Radeček se při svých nočních obchůzkách neodvažuje vkročit na otevřený hrob. Určete, pro kolik různých skupinek upírů, kteří vylezou z hrobů, ještě Radeček zvládne projít hřbitovem. Na obrázku je příklad jedné situace, kde šrafované čtverečky značí otevřené hroby, mezi nimiž Radeček dovede projít.



(Josef Minařík)

Řešení:
Rozdělíme si hřbitov na 8 sloupců 2×1. Radeček může z libovolného hrobu v jednom sloupci přejít na libovolný zavřený v dalším. Tedy Radeček může celým hřbitovem projít právě tehdy, když je v každém sloupci minimálně jeden hrob zavřený. V každém sloupci máme 3 přípustné varianty pro průchod: oba dva hroby zavřené, nebo první hrob otevřený a druhý zavřený, nebo první hrob zavřený a druhý otevřený. Všechny sloupce jsou na sobě nezávislé, tedy podle pravidla kombinatorického součinu dostáváme počet $3^8 = 6561$ možných různých skupinek upírů.

Jiné řešení (sčítání možností):
Stejně jako v předchozím případě si uvědomíme, že pro průchod stačí zavřený jeden hrob v každém sloupci. Je zde 8 sloupců, dohromady tedy Radeček pro průchod potřebuje minimálně 8 (vhodně uspořádaných) zavřených hrobů. Na řešení přijdeme součtem skupinek pro 0 až 8 otevřených hrobů.

Spočítejme, kolik je různých skupin upírů při n otevřených hrobech, kde $0 \leq n \leq 8$.

Jelikož nemohou být dva otevřené hroby v jednom sloupci, musí být n otevřených hrobů právě v n sloupcích. Nejprve tedy potřebujeme vybrat n sloupců z 8, což dává $\binom{8}{n}$ možností.[1] V každém sloupci s otevřeným hrobem dostáváme dvě možnosti pro otevřený hrob (horní, nebo spodní pole), tj. dalších 2^n možností. Tedy pro počet různých skupin u právě n otevřených hrobů platí, že se rovná $\binom{8}{n} \cdot 2^n$.

Celkový počet různých skupinek upírů je

$$\sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} \cdot 2^k = 1 + 16 + 112 + 448 + 1120 + 1792 + 1792 + 1024 + 256 = 6561.$$

Poznámky:
Většina došlých řešení byla správná. Chyby, pokud se vyskytly, spočívaly většinou v určení špatného postupu pro získání počtů skupinek upírů u druhého řešení.

Část řešitelů v řešení nezapočítávala možnost skupiny, pokud v ní nebyl žádný nebo jen jeden upír. Za to jsem body nestrhávala, ale i prázdná skupina, tedy prázdná množina upírů, je skupinou.

(Markéta Hanušková)

[1] Symbol $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ je označení pro kombinační číslo, které udává počet *kombinací*, tj. způsobů, jak vybrat k prvků z n prvkové množiny.

Úloha 4.

Bílá paní Hedvika strašila několik nocí na hradě, bezhlavý rytíř Daník strašil o sto nocí víc než Hedvika. Zjistili, že počet nocí, kdy strašila Hedvika, je kladný a má lichý počet dělitelů. Totéž platí o počtu nocí, kdy strašil Daník. Zjistěte, kolik nocí mohla Hedvika strašit (a dokažte, že to jsou všechny možnosti). *(Josef Minařík)*

Řešení:
Ze zadání víme, že počty nocí, kdy Hedvika i Daník strašili, mají lichý počet dělitelů. Co znamená, že číslo má lichý počet dělitelů?

Je-li d dělitel čísla n, musí i $\frac{n}{d}$ být dělitelem čísla n. Každému děliteli d, který splňuje $d < \sqrt{n}$, lze jednoznačně přiřadit číslo $\frac{n}{d}$, pro které platí $\frac{n}{d} \cdot d = n$ a $\frac{n}{d} > \sqrt{n}$. Má-li být počet dělitelů lichý, musí existovat dělitel d splňující $\frac{n}{d} = d$, neboli $d = \sqrt{n} \in \mathbb{N}$. Lichý počet dělitelů mají pouze druhé mocniny celých kladných čísel.

Označíme h^2 počet nocí, kdy strašila Hedvika, a d^2 počet nocí, kdy strašil Daník. Ze zadání víme, že

$$\begin{aligned} d^2 &= h^2 + 100, \\ d^2 - h^2 &= 100, \\ (d-h)(d+h) &= 100. \end{aligned}$$

Z nerovnosti $d^2 > h^2$ plyne $d > h$, proto platí $d - h > 0$. Součin $(d-h)(d+h)$ je poté součinem dvou přirozených čísel, který je roven 100, což má jen pět možností pro činitele:

$$100 = 1 \cdot 100 = 2 \cdot 50 = 4 \cdot 25 = 5 \cdot 20 = 10 \cdot 10.$$

Nejprve si všimneme, že $d - h < d + h$. Dále platí, že součet $d + h$ a $d - h$ je roven $2d$, neboli je sudý. Součet dvou čísel je sudý, sčítáme-li dvě lichá nebo dvě sudá čísla. Navíc ale víme, že jejich součin je sudý, tedy nutně musí být oba činitelé sudí.

Z pěti předchozích možností součinu $(d-h)(d+h)$ nám zbyla pouze jediná: $100 = 2 \cdot 50$, tj. $d - h = 2$ a $d + h = 50$. Soustavu dvou rovnic o dvou neznámých nyní dořešme:

$$\begin{aligned} d + h &= 50, \\ d - h &= 2, \\ 2d &= 52, \\ d &= 26, \\ h = 50 - d &= 24. \end{aligned}$$

Nyní už jen zjistíme počet nocí:

$$\begin{aligned} h^2 &= 24^2 = 576, \\ d^2 &= 26^2 = 676. \end{aligned}$$

Bílá paní Hedvika tedy na hradě strašila 576 nocí.

Jiný důkaz charakterizace lichého počtu dělitelů:
Je-li prvočíselný rozklad čísla $n = p_1^{r_1} \cdots p_m^{r_m}$, pro počet dělitelů čísla n platí vztah

$$(r_1 + 1)(r_2 + 1) \cdots (r_m + 1),$$

protože každý dělitel n vznikne součinem jednotlivých dělitelů čísel $p_i^{r_i}$, kterých je vždy $r_i + 1$. Požadujeme-li, aby tento součin byl lichý, musí být liší všichni činitelé, a tedy $2 \mid r_i$ pro každé i. Odtud již vidíme, že pouze druhé mocniny celých čísel mají lichý počet dělitelů.

Dále postupujeme jako v prvním řešení.

Poznámky:
Většina řešitelů postupovala obdobně jako ve vzorovém řešení. Bod jsem strhávala, pokud v řešení chyběla argumentace, proč pouze druhé mocniny mají lichý počet dělitelů. Velká část řešitelů procházela možnosti rozkladu čísla 100. Čísla 576 a 676 nalezli někteří vypsáním si řady druhých mocnin a hledáním, která čísla mají rozdíl 100, což samozřejmě lze, ale plný počet získali pouze s dostatečným odůvodněním, že jiná čísla nevyhovují. V případech, kde řešitel dostatečně neodůvodnil, proč 576 je jediné řešení, jsem strhávala 1 nebo 2 body. *(Denisa Hanušková)*

Úloha 5.

Vlkodlak Fíla sežral kladná celá čísla x, y, n splňující rovnost $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{n}$. Dokažte, že existuje celé číslo $a>1$, jehož druhá mocnina dělí číslo n. *(Josef Minařík)*

Řešení:
Umocněním rovnosti ze zadání dostaneme

$$x+2\sqrt{xy}+y=n.$$

Protože x, y, n jsou přirozená, musí být výraz $2\sqrt{xy}$ celým číslem. Zároveň xy je přirozené a z toho již plyne, že $\sqrt{xy}$ je nějaké přirozené číslo k, neboť odmocniny z přirozených čísel jsou buď přirozené, nebo iracionální. Potom musí $xy=k^2$.

Nechť d je největším společným dělitelem x, y. Pak můžeme psát $x=da$, $y=db$ pro nějaká nesoudělná $a,b\in\mathbb{N}$. Protože $\sqrt{xy}=k$, musí $\sqrt{d^2ab}=k$, takže $d\sqrt{ab}=k$. Pravá strana je přirozená, takže i $d\sqrt{ab}$ musí být přirozené, stejně tak d je přirozené. Číslo $\sqrt{ab}$ tedy nemůže být iracionální, a proto obdobně jako v prvním odstavci už víme, že $\sqrt{ab}$ je přirozené, tedy ab musí být čtvercem.

Protože a a b jsou nesoudělná, nesmí ve svém prvočíselném rozkladu sdílet žádné prvočíslo. Pak již musí být a i b čtverci samy o sobě, protože se jejich rozklady neshodují v žádném prvočísle, a každé z prvočísel v rozkladu ab musí být v sudé mocnině, aby ab bylo čtvercem. Můžeme proto psát $a=u^2$, $b=v^2$, takže $x=du^2$ a $y=dv^2$. Po dosazení do rovnosti $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{n}$ dostáváme

$$u\sqrt{d}+v\sqrt{d}=\sqrt{n}$$

a po vytknutí $\sqrt{d}$ a umocnění

$$d(u+v)^2=n.$$

Takže $(u+v)^2$ dělí n a zároveň je $u+v$ jistě přirozené.

Zbývá ukázat, že $u+v>1$. Stačí si uvědomit, že u i v jsou přirozená čísla, proto musí $u\geq 1$ a $v\geq 1$, tedy pro součet platí $u+v\geq 2>1$. Číslo $(u+v)$ je tudíž hledaným a, jehož čtverec dělí n.

Alternativní řešení:
Předpokládejme pro spor, že n není dělitelné druhou mocninou žádného přirozeného čísla kromě jedničky. Pak musí nutně prvočíselný rozklad čísla n obsahovat veškerá prvočísla v první mocnině, pokud by obsahovalo nějaké prvočíslo p ve vyšší mocnině $k\geq 2$, pak by $p^k\mid n$, takže i $p^2\mid n$.

Druhá odmocnina z kladného čísla nabývá vždy kladných hodnot, tudíž $\sqrt{y}>0$. Protože platí $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{n}$, musí $\sqrt{x}<\sqrt{n}$, a tedy i $x<n$, neboť druhá odmocnina je rostoucí funkcí.

Umocněním rovnosti $\sqrt{y}=\sqrt{n}-\sqrt{x}$ na druhou obdržíme

$$y=n-2\sqrt{nx}+x.$$

Ze stejných důvodů jako v prvním vzorovém řešení musí být $\sqrt{nx}$ přirozené číslo, tedy nx je druhou mocninou nějakého přirozeného čísla.

Nechť p je prvočíslo dělící n. Protože v rozkladu n na součin se vyskytují všechna prvočísla v první mocnině, musí p dělit i x, aby rozklad součinu nx obsahoval p v sudé mocnině a odmocnina z něj byla přirozená. Tudíž x obsahuje v prvočíselném rozkladu každé prvočíslo, které se vyskytuje v prvočíselném rozkladu n, takže musí $x\geq n$. To je ale spor s nerovností $x<n$, ke které jsme došli ve druhém odstavci. Proto n musí být násobkem nějakého čtverce většího než jedna.

Poznámky:

Většina došlých správných řešení se ubírala cestou prvního řešení, důkaz sporem byl mezi řešeními vzácnější.

Někteří řešitelé rozebrali jen speciální případy vyjádření x, y (častý byl důkaz, že jen pro přirozená $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ tvrzení platí), případně došli k vyjádřením $x = du^2$, $x = dv^2$, ale již nezdůvodnili, proč jiná volba rovnici v zadání nevyhovuje.

Někteří řešitelé jenom zkusili dosadit za x, y a n vhodná čísla, a pak ukázali, že dané konkrétní n je opravdu násobkem nějakého čtverce. Rád bych proto odkázal na článek *Jak řešit úlohy korespondenčního semináře?* (*https://prase.cz/info/Jak.pdf*) pro nové řešitele PraSátka – v něm je hezky shrnuto, jak by mělo takové správné řešení vypadat. *(Matěj Gajdoš)*

Úloha 6.

Na šachovnici 12×12 *se sešlo několik gorgon se zavřenýma očima, přičemž každá stojí na jiném políčku. Gorgona může vidět právě gorgony stojící ve stejném řádku nebo sloupci (i pokud mezi nimi stojí další gorgony). Pokud dvě gorgony otevřou oči a navzájem se vidí, obě zkamení. Zjistěte, kolik nejméně gorgon se na šachovnici musí sejít, abychom nehledě na jejich rozestavení vždy mohli vybrat sedm z nich, které mohou všechny naráz otevřít oči a nezkamenět. Nezapomeňte také ukázat, že menší počet gorgon nestačí.* (Terka Kučerová)

Řešení:

Musí se sejít nejméně 73 gorgon.

Je potřeba dokázat dvě věci. Jednak, když je gorgon 73, je možné z libovolného rozestavení vždy vybrat sedm, které nezkamení, a jednak, když jich je 72, to není možné vždy. To uděláme první.

Když je gorgon jen 72 nebo méně, vejdou se všechny do šesti řádků šachovnice. Jakkoliv pak vybereme sedm z nich, musí v jednom řádku být vybrané alespoň dvě, ty se uvidí a zkamení. Tudíž když jich je 72 nebo méně, není zaručeno, že můžeme vybrat sedm, aby nezkameněly. Tím je dokázáno, že jich méně než 73 nestačí.

Když je gorgon aspoň 73, rozdělíme si šachovnici na 12 „prodloužených diagonál“. Prodloužená diagonála je jako normální diagonála, ale na konci tabulky pokračuje z druhé strany. Na obrázku jsou políčka očíslovaná podle toho, do které prodloužené diagonály patří.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7	8
8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6	7
7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5	6
6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4	5
5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3	4
4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2	3
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1	2
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	1

Na prodloužené diagonále je 12 políček a žádná dvě z nich nejsou ve stejném řádku ani ve stejném sloupci. Když tedy vybereme gorgony jen z jedné prodloužené diagonály, nezkamení. Jelikož je gorgon 73 a prodloužených diagonál jen 12, musí být dle Dirichletova principu[2] na jedné diagonále

[2] Neznáte-li Dirichletův princip, vězte, že se nejedná o nic složitého. Myšlenka je taková, že kdybychom na prodloužené diagonály měli dávat gorgony, aby jich na žádné nebylo 7, pak bychom už se 72 gorgonami museli mít v každé 6. Se 73. gorgonou jich na některé prodloužené diagonále musí být alespoň 7.

aspoň 7 gorgon. Můžeme tedy z této diagonály vybrat 7 gorgon, které otevřou oči a nezkamení. Tím je dokázáno, že jich stačí 73, ať jsou rozmístěné jakkoliv.

Dokázali jsme, že jich stačí 73, a ne méně. Tedy nejmenší počet gorgon, které se musí sejít, je 73.

Poznámky:
Většině řešitelů se podařilo ukázat, že 72 gorgon nestačí. Za to jsem dával 2 body. Úplných řešení bylo podstatně méně a většina postupovala uvedeným způsobem. Někteří zvládli chytře vybírat gorgony podle toho, kolik vidí jiných gorgon v řádku nebo ve sloupci, a dokázat, že jim gorgony zbudou. Spousta řešitelů však argumentovala tím, že dávat gorgony do řádků/sloupců je nejhorším případem. Nejhorší případ to vlastně je, ale řešitelům se to nedařilo dokázat, protože se spoléhali na nepřesné intuitivní argumenty. Kloním se k názoru, že kdyby to někdo dokázal, měl by důkaz shodný s úplně jiným důkazem, takže doporučuji pracovat rovnou bez „nejhoršího případu".

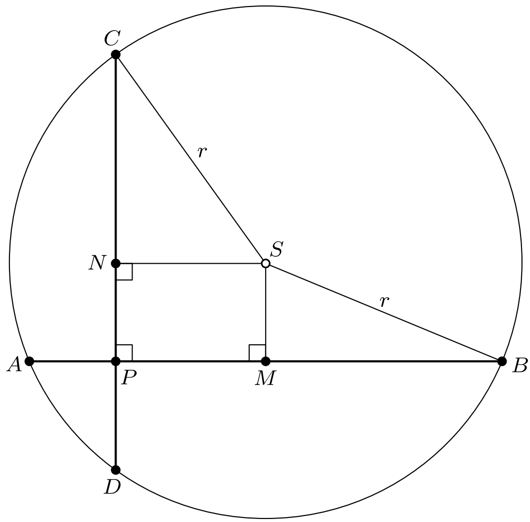
(Matouš Šafránek)

Úloha 7.

Tajemný hrad Rypák má hradby ve tvaru kružnice a sochu, která leží v nějakém bodě uvnitř této kružnice. Duchové Marian a Michal si každý večer vyberou dvě tětivy kružnice, po nichž budou poletovat a strašit návštěvníky hradu. Vždy však vybírají takové tětivy, které jsou navzájem kolmé a protínají se přesně v soše. Dokažte, že součet druhých mocnin délek těchto tětiv je vždy stejný, nehledě na to, kterou konkrétní dvojici tětiv si Marian s Michalem vyberou.

(Magdaléna Mišinová)

Řešení:
Označme si sochu P a jednotlivé tetivy AB a CD. Ďalej nech S je stred kružnice a M, N stredy tetív AB a CD.



Platí $|AB|^2 + |CD|^2 = 4 \cdot (|MB|^2 + |NC|^2)$. Všimnime si, že MS a NS sú osami tetív, a preto $MS \perp AB$ a $NS \perp CD$. Z toho vyplýva, že trojuholníky SMB a SNC sú pravouhlé a že $PMSN$ je obdĺžnik. S použitím Pytagorovej vety pre trojuholníky SMB a SNC dostávame $|MB|^2 = |SB|^2 - |SM|^2$ a $|NC|^2 = |SC|^2 - |SN|^2$. Platí preto

$$\begin{aligned} |AB|^2 + |CD|^2 &= 4 \cdot (|MB|^2 + |NC|^2), \\ &= 4 \cdot (|SB|^2 - |SM|^2 + |SC|^2 - |SN|^2). \end{aligned}$$

Všimnime si, že $|SB| = |SC| = r$, kde r je polomer kružnice. Keďže $PMSN$ je obdĺžnik, trojuholník NMS je pravouhlý a z Pytagorovej vety vyplýva $|SM|^2+|SN|^2 = |MN|^2$, ale $|MN| = |SP|$, pretože ide o uhlopriečky $PMSN$. Teda $|SM|^2 + |SN|^2 = |SP|^2$. Spolu tak dostávame

$$\begin{aligned}|AB|^2 + |CD|^2 &= 4 \cdot (|SB|^2 - |SM|^2 + |SC|^2 - |SN|^2),\\ &= 4 \cdot (2r^2 - |SP|^2).\end{aligned}$$

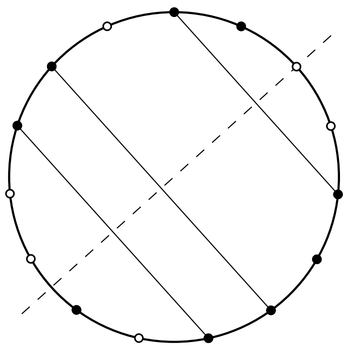
Polomer kružnice a vzdialonosť sochy od stredu $|SP|$ sú konštantné, preto je konštantný aj súčet $|AB|^2 + |CD|^2$, bez ohľadu na konkrétnu voľbu dvojice tetív.

Poznámky:
Väčšina riešení bola podobná vzorovému alebo mali aspoň podobnú myšlienku. Medzi najčastejšie chyby patril predpoklad, že sa socha môže nachádzať len na obvode kružnice. *(Michal Pecho)*

Úloha 8.

Majda se snaží vyvolat TeMné VelePraSe podle příručky černé magie, kterou nalezla v knihovně. Už má na zemi nakreslenou kružnici, jejíž každý bod je obarven jednou z 2022 barev. Další krok obřadu vyžaduje, aby našla lichoběžník, jehož vrcholy leží na této kružnici a mají všechny stejnou barvu. Dokažte, že se jí to může vždy podařit bez ohledu na to, jak jsou body kružnice obarveny.
(Josef Minařík)

Řešení:
Uvažme na kružnici pravidelný N-úhelník $M = A_1A_2 \dots A_N$ pro $N = 2 \cdot 2022^2 + 1$. Budeme hledat lichoběžník pouze mezi vrcholy tohoto N-úhelníka. Jelikož N je liché, tak osa každé úhlopříčky A_iA_j prochází nějakým vrcholem M, což znamená, že takových os existuje pouze N. Dvě tětivy jsou rovnoběžné, právě pokud jsou jejich osy shodné, tedy pokud prochází stejným vrcholem.



V našem N-úhelníku existuje podle Dirichletova principu $k \geq \left\lceil \frac{N}{2022} \right\rceil = 4045$ bodů stejné barvy, například červené.[3] Dvojic červených bodů je

$$\binom{k}{2} \geq 4045 \cdot 2022 > N.$$

Z Dirichletova principu prochází nějaké dvě osy úseček z červených bodů stejným vrcholem M a jsou tak shodné. Příslušné úsečky zjevně nesdílí koncové body, a proto tyto čtyři koncové body tvoří lichoběžník. A jsme doma.

[3]Výraz $\lceil x \rceil$ značí *horní celou část* x, tedy (to jediné) celé číslo splňující $\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$.

Jiné řešení:
Uvažme na kružnici $2022^{2023} + 1$ navzájem různých pravidelných 2023-úhelníků. Počet obarvení vrcholů 2023-úhelníka 2022 barvami je 2022^{2023}, proto z Dirichletova principu existují mezi našimi mnohoúhelníky dva, které jsou shodně obarvené. Mezi jejich 2023 body existují dva se stejnou barvou a tyto čtyři body tvoří vrcholy lichoběžníka.

Poznámky:
Všechna úspěšná řešení si úlohu zjednodušila na konečný počet bodů a využila Dirichletův princip. Ostatní řešení zpravidla prohlásila, že jedna barva je zastoupena mezi body kružnice nekonečně mnohokrát a že z toho již je zjevné, že nějaké čtyři tvoří rovnoramenný lichoběžník – což není. Práce s nekonečnem je obtížná a je potřeba argumentovat opravdu opatrně! *(Zdeněk Pezlar)*