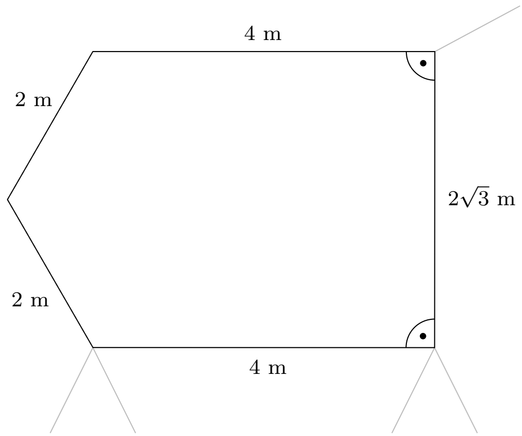
Distanční výuka

1. podzimní série — Vzorové řešení

Úloha 1.

Učebna má tvar konvexního pětiúhelníku jako na obrázku níže. Jak do ní můžeme umístit devět studentů[1] tak, aby mezi každými dvěma byla vzdálenost alespoň dva metry?



(Josef Minařík)

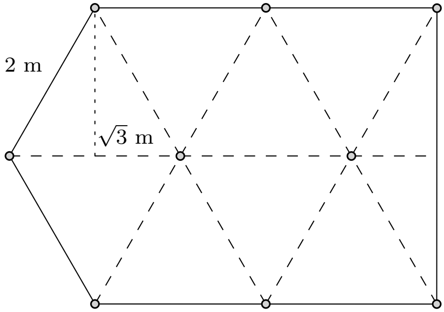
Řešení:

Všimnime si, že v rovnostrannom trojuholníku so stranou dlhou 2 m je päta výšky zhodná so stredom strany, a preto môžeme dĺžku výšky vypočítať z Pytagorovej vety ako

$$v = \sqrt{2^2 - 1^2}\ \mathrm{m} = \sqrt{3}\ \mathrm{m},$$

čo je presne polovica dĺžky „zvislej“ strany učebne. Vďaka tomu môžeme do miestnosti nakresliť trojuholníkovú sieť tvorenú rovnostrannými trojuholníkmi so stranou dlhou 2 m, pričom všetky vrcholy pôvodného päťuholníka aj stredy strán dlhých 4 m budú vrcholmi v tejto sieti. Navyše vo vnútri triedy budú ďalšie dva vrcholy, takže celkovo máme 9 bodov trojuholníkovej siete vo vnútri alebo na okraji triedy. Jednoducho overíme, že medzi každými dvomi z nich bude vzdialenosť aspoň 2 m, teda do každého z tých 9 bodov môžeme umiestniť jedného študenta.

[1] Studenty můžeme považovat za body a můžou ležet i na obvodu učebny.



Poznámky:
Všetci riešitelia, ktorí úlohu poslali, našli správne rozmiestnenie študentov, s viac či menej podrobným popisom toho, ako ho našli a prečo vyhovuje. Niektoré riešenia skonštruovali body posunutím ľavých troch vrcholov päťuholníka o 2 m doprava a potom o ďalšie 2 m doprava.

(Lucia Krajčoviechová)

Úloha 2.

Kuba dostal za distanční domácí úkol procvičit si násobení a sčítání. Vyrobil si na to čtyři kartičky s reálnými čísly. Když si s nimi chvíli hrál, zjistil, že pokaždé, když z nich vytvoří výraz

$$\square \cdot \square + \square \cdot \square,$$

vyjde mu stejný výsledek. Ukažte, že na alespoň třech kartičkách je stejné číslo.

(Rado van Švarc)

Řešení:
Označme čísla na kartičkách a, b, c a d. Protože kartičky jsou zaměnitelné, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $a \le b \le c \le d$. Podle zadání platí

$$\begin{aligned} ab + cd &= ad + bc, \\ ab - ad + cd - bc &= 0, \\ a(b-d) - c(b-d) &= 0, \\ (b-d)(a-c) &= 0. \end{aligned}$$

Z toho plyne, že $b = d$ nebo $a = c$. Pokud $b = d$, pak díky seřazení čísel už nutně platí $b = c = d$. Obdobně pokud $a = c$, tak $a = b = c$. V obou případech si jsou nutně alespoň tři čísla rovna, což jsme chtěli ukázat.

Poznámky:
Většina došlých řešení byla velmi pěkná. Zároveň ale značná část řešitelů zcela bezostyšně dělila nulou! Dejte si na to pozor – když dělíte rovnici neznámou, vždy proveďte diskuzi.

(Kateřina Panešová)

Úloha 3.

V turnaji v distančním fotbalu se utkalo 2020 družstev. Každé hrálo s každým právě jednou, za výhru tým obdržel jeden bod, za prohru či remízu neobdržel žádný. Po odehrání všech zápasů skončily všechny týmy se stejným bodovým ziskem. Určete, kolik nejméně muselo nastat remíz.

(Pavel Hudec)

Řešení:
Ukážeme, že minimální počet remíz byl 1010.

Celkem družstva odehrála

$$\binom{2020}{2} = \frac{2020 \cdot 2019}{2} = 1010 \cdot 2019$$

zápasů. Protože se body přidělovaly pouze za výhry, rozdalo se nejvýše tolik bodů, kolik se odehrálo zápasů. Všechny týmy skončily se stejným bodovým ziskem, tudíž musí být celkový počet obdržených bodů násobkem počtu týmů. Platí $1010 \cdot 2019 = 1009 \cdot 2020 + 1010$, mohlo nastat celkem nejvýše $1009 \cdot 2020$ výher, a tedy nejméně 1010 remíz.

Ukážeme, že turnaj s 1010 remízami mohl nastat. Představíme si všechny týmy rozmístěné s pravidelnými odstupy na kružnici. Řekněme, že pro každý tým platí, že s 1009 týmy po směru hodinových ručiček vyhrál a s 1009 týmy proti směru hodinových ručiček prohrál. S týmem, který je naproti němu na kružnici (je stejně daleko po i proti směru hodinových ručiček), remizoval. Pro toto rozdělení skutečně platí, že všechny týmy mají stejně bodů a nastalo celkem 1010 remíz.

V první části řešení jsme odvodili, že remíz bylo minimálně 1010, a v druhé jsme ověřili, že jich mohlo být právě 1010.

Poznámky:
Většina řešení správně přišla na to, že remíz muselo být aspoň 1010. Pak ale mnoho řešitelů zapomnělo na druhý krok, ve kterém je potřeba ověřit, že existuje průběh turnaje, kde se událo 1010 remíz.

Mohli bychom si i říct, že remíz muselo být aspoň 0. To je jasné ze zadání, záporný počet jich určitě být nemůže. Jenže už nejde najít žádný průběh turnaje, kde by nebyla žádná remíza. Omezení samotné tedy nestačí, musíme ho ještě ověřit. Řešitelé nejčastěji postupovali jako ve vzorovém řešení, šikovným vyplněním tabulky nebo i matematickou indukcí.

Hodně řešitelů do řešení také napsalo, že každý tým musel mít stejný počet výher, proher i remíz. To ale není obecně pravda. Při konstrukci průběhu turnaje pro 1010 remíz je to šikovný předpoklad, jako protipříklad si ale můžete představit turnaj o čtyřech týmech a, b, c a d. Pokud pak a vyhrál nad b, b nad c, c nad a, d nad b a a remizoval s d a c remizoval s d, tak uhrál tým d dvě remízy a tým b naopak žádnou. *(Martin Hubata)*

Úloha 4.

V hodině distanční výtvarné výchovy dostal Franta za úkol obarvit každý bod roviny jednou z n barev tak, aby se na libovolné přímce vyskytovaly body nanejvýš dvou barev a aby každou barvou byl obarven alespoň jeden bod. Určete největší n, pro které se mu to může podařit.

(Pavel Hudec)

Řešení:
Dokažme, že pro čtyři a více barev neexistuje žádné obarvení splňující podmínky. Důkaz povedeme sporem. Předpokládejme, že existuje vyhovující obarvení. Vezměme libovolné čtyři barvy A, B, C, D a body K, L, M, N obarvené postupně těmito barvami. Jejich existenci zaručuje zadání. Žádná trojice těchto bodů nemůže ležet na přímce, neboť by to byl rovnou spor. Uvažme nyní přímky KL a MN. Pokud mají společný bod, pak tento bod musí mít jednu z barev A, B a zároveň C, D, což vede ke sporu. Jestli jsou rovnoběžné, provedeme stejný postup pro druhou dvojici. Jestliže i tato dvojice přímek je rovnoběžná, pak je $KLMN$ rovnoběžník. Pro ten ale platí, že se jeho úhlopříčky protínají. Použitím stejného argumentu dostaneme spor.

Vyvrátili jsme, že by n mohlo být větší nebo rovno čtyřem, a nyní je potřeba zjistit, zda existuje vyhovující obarvení pro $n = 3$. Ukážeme nějakou vyhovující konstrukci. Například lze umístit do roviny jeden bod barvy A. Tím vedeme libovolné množství přímek barvy B a zbytek roviny obarvíme barvou C. Pro přímky procházející bodem barvy A podmínka platí, protože pokud nějaká taková přímka obsahuje bod barvy B, pak už je nutně totožná s přímkou, která je dána bodem barvy A a tímto bodem. V opačném případě barvu B přímka nemůže obsahovat. Přímky neprocházející bodem barvy A nemohou obsahovat barvu A. Takže naše obarvení je v souladu se zadáním. Dokázali jsme, že pro $n \geq 4$ řešení neexistuje, a našli jsme vyhovující obarvení pro $n = 3$. Jsme tedy hotovi.

Jiná konstrukce:
Jiná možnost konstrukce pro $n = 3$ je obarvit jednu přímku p dvěma barvami (A, B) libovolně a zbytek roviny poslední barvou (C). Přímky rovnoběžné s p jsou buď totožné s p a pak zřejmě splňují zadání, anebo jsou od p různé a pak neprochází třetí barvou. Různoběžka k p s ní může mít jen jeden společný bod, takže bude mít jednu z barev A, B a barvu C.

Poznámky:
Sešlo se poměrně hodně řešení a většina úspěšných postupovala podobně jako vzorové. Nejčastější chybou byl neúplný důkaz, že pro $n = 4$ to nejde. Zejména se objevovala řešení, která našla konstrukci pro $n = 3$ a pak tvrdila, že se tato konstrukce nedá vylepšit. Tato řešení jsem ohodnotil dvěma nebo třemi body podle toho, jakou konkrétní vadu obsahovala. Tímto způsobem lze úlohu také řešit, ale je třeba vycházet pouze ze zadání, tedy z existence tří různobarevných bodů. Jak jsem předvedl, konstrukcí je více a bylo třeba ukázat, že nemůže existovat žádná konstrukce pro vyšší n. Méně často si řešitelé chybně interpretovali zadání a řešili tak jinou úlohu.

Dále bych chtěl upozornit na některé drobné chyby. Někteří řešitelé dokazující sporem vybrali dvojici přímek a předpokládali, že se protnou. To se obecně nemusí stát a mělo by se alespoň zmínit, že nějakou dvojici umíme vybrat po přeznačení bodů, nebo tvrzení dokázat pomocí rovnoběžníku jako ve vzorovém řešení. U obecného čtyřúhelníku také neplatí, že se úhlopříčky vždy protínají. Jedná se o úsečky, takže tvrzení neplatí pro nekonvexní čtyřúhelníky. *(Honza Nekarda)*

Úloha 5.

Radeček si v hodině distančního dějepisu během výkladu o křížových výpravách krátí dlouhou chvíli následující kratochvílí: Nakreslí si tabulku $n \times n$ a následně některá její pole vyplní křížky tak, aby neexistovala trojice křížků A, B, C taková, že A a B leží ve stejném sloupci, B a C leží ve stejném řádku a zároveň B leží pod A a nalevo od C (přičemž B s nimi nemusí nutně sousedit). V závislosti na n určete, kolik nejvýše křížků dovede do tabulky umístit. *(Lucien Šíma)*

Řešení:
Na začiatok si uvedomme, že podmienka zo zadania je ekvivalentná kritériu, že neexistuje krížik (B), ktorý by mal nejaký krížik priamo (nie nutne bezprostredne) nad sebou (A) a nejaký iný krížik priamo napravo od seba (C).

Vezmime do úvahy rozmiestnenia krížikov, ktoré spĺňajú požiadavky zadania a obsahujú maximálny počet krížikov. Z nich vyberme to, kde sa najnižší počet krížikov nachádza vo štvorci $(n-1) \times (n-1)$ v ľavom dolnom rohu (teda mimo horného riadka a zároveň mimo pravého stĺpca).

Predpokladajme, že v tomto štvorci sa nachádza aspoň jeden krížik. Vyberme jeden z týchto krížikov. Ak nad ním nie je už ďalší krížik, presunieme ho do horného riadka, zachovajúc stĺpec, v ktorom sa nachádzal. Tým zachováme podmienku – nad týmto krížikom stále nebude iný krížik, krížik nepribudne nad iným krížikom (v novej polohe bude náš jediný presunutý krížik iba nad krížikmi, nad ktorými bol už predtým) a pribudne iba napravo od niektorých krížikov v hornom riadku, ale tie nemôžu porušiť podmienku, pretože nevedia mať krížik nad sebou. Ak nad ním je krížik, určite nie je napravo od neho, lebo toto rozostavenie vyhovuje podmienke, tak ho presunieme do pravého stĺpca. Opäť tým zachováme podmienku z obdobných príčin ako v predchádzajúcom prípade. Dostali sme vyhovujúce rozostavenie, kde je mimo horného riadka a mimo pravého stĺpca menej krížikov ako v pôvodnom, čo je spor s tým, že sme zvolili to s minimálnym počtom takých krížikov. Preto náš predpoklad, že v tomto štvorci máme krížik, bol nepravdivý, takže zvolené rozostavenie obsahuje krížiky iba v hornom riadku a v pravom stĺpci.

Horný riadok zahŕňa n políčok a pravý stĺpec takisto, pravý horný roh sa však nachádza v oboch, čiže spolu máme iba $2n-1$ políčok, kde môžu byť krížiky. To značí, že máme nanajvýš $2n-1$ krížikov. Keďže sme zvolili jednu z konfigurácií s maximálnym možným počtom krížikov, tento nemôže presiahnuť $2n-1$.

Zároveň $2n-1$ krížikov je dosiahnuteľných: Napríklad zaplníme celý horný riadok a celý pravý stĺpec. Nad ani jedným krížikom horného riadka určite nie je ďalší krížik a napravo od krížika pravého stĺpca určite nie je krížik, z čoho plynie, že sme vyhoveli podmienke zo zadania. Hľadaný maximálny počet je preto pre každé n práve $2n-1$.

Poznámky:

Riešenia, ktoré sme dostali, sa často popasovali s úlohou úspešne. Nie však vždy. Pri takýchto úlohách, kde hľadáme maximálny či minimálny počet čohosi, s čím dokážeme vykonať čosi ďalšie, potrebujeme ukázať, že práve náš výsledok je maximum (minimum), čo znamená dokázať, že hľadané číslo nie je vyššie ani nižšie než to naše. Mnohé riešenia vyriešili úlohu iba sčasti, keď ukázali spôsob, ako Radeček umiestni do tabuľky $2n-1$ krížikov, ale nedokázali, že viac sa mu ich tam nezmestí. To však hovorí o maxime iba toľko, že je aspoň $2n-1$, ale ešte vždy by mohlo byť aj väčšie. Inokedy sa stalo, že riešenie nedokázalo, že viac krížikov byť nemôže, poriadne, napríklad ste iba ukázali, že do tabuľky s nejakým konkrétnym rozostavením $2n-1$ krížikov už nemôžeme pridať ďalší, čo však nie je dostatočne všeobecné.

Na riešenie úlohy tohto typu preto má väčšinou zmysel pozerať sa ako na dva dôkazy, z ktorých každý musí stáť pevne na vlastných nohách a dokázať bez ujmy na všeobecnosti svoju nerovnosť. Často jeden z nich je oveľa jednoduchší (v tomto prípade na dôkaz, že maximum je aspoň $2n-1$, stačilo uviesť jedno rozmiestnenie toľkých krížikov), ale pozornosť si zaslúžia oba.

(Mimi Hanus)

Úloha 6.

Konvexní n-úhelník M byl rozdělen na trojúhelníkové ohrádky s rohy ve vrcholech M, přičemž v každém vrcholu M sedí jeden luskoun. Rozmístění některých $n-2$ luskounů do ohrádek nazveme distanční, pokud je v každé ohrádce právě jeden luskoun, který navíc původně seděl v jednom z rohů této ohrádky. Dvojici luskounů nazveme karanténní, pokud umíme distančně rozmístit zbylé luskouny právě jedním způsobem.[2] Kolik existuje karanténních dvojic? *(Jakub Löwit)*

Řešení:

Dvojici luskounů, kterou do ohrádek neumístíme, nazveme *vyběrovou* a každého luskouna v ní nazveme *výběrovým.* O každé straně ohrádky budeme mluvit jako o *hraně.*

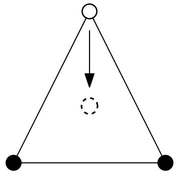
Ohrádek je v celém n-úhelníku $n-2$. Je jich tedy ostře méně než stran n-úhelníka, proto alespoň jedna ohrádka musí mít dvě své hrany shodné se stranami n-úhelníka. Tuto ohrádku nazveme *krajní* (příkladem je *krajní* ohrádka ABC na obrázku 2).

Dokážeme indukcí podle počtu vrcholů n-úhelníka, že do něj umíme distančně rozmístit $n-2$ luskounů alespoň jedním způsobem a že více způsobů nebude existovat právě tehdy, když bude výběrová dvojice spojena hranou.

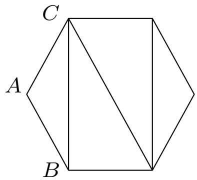
Pro počáteční krok nechť $n=3$. Každá dvojice je zde spojena hranou a zbývající luskoun má vždy jen jednu ohrádku kam může jít, tedy tvrzení platí (viz obrázek 1).

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $(n-1)$-úhelník. Pro n-úhelník si vrcholy v některé jeho krajní ohrádce pojmenujeme následovně: vrchol mezi stranami shodnými se stranami n-úhelníka nazveme A, zbylé dva vrcholy označíme B a C (viz obrázek 2).

[2] Rozmístění je určeno jen tím, který luskoun je ve které ohrádce.

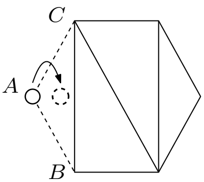


Obrázek 1.

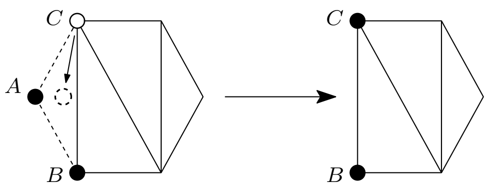


Obrázek 2.

Nyní rozebereme tři možnosti umístění luskounů, podle toho kde se nachází výběrová dvojice. Zaprvé, nechť luskoun ve vrcholu A není výběrový a výběrová dvojice je kdekoli jinde v n-úhelníku. Luskouna z vrcholu A můžeme umístit jedině do ohrádky ABC (viz obrázek 3). Proto počet možných distančních rozmístění luskounů v n-úheníku je stejný jako počet rozmístění v $(n-1)$-úhelníku vzniklém odebráním vrcholu A a hran AB a BC. Z indukčního předpokladu bude v tomto menším $(n-1)$-úhelníku správný počet distančních rozdělení pro libovolnou na začátku zvolenou výběrovou dvojici.



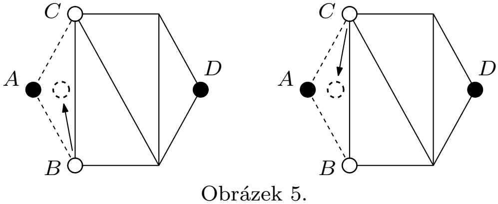
Obrázek 3.



Obrázek 4.

Zadruhé máme situaci, kdy jsou luskouni z výběrové dvojice ve vrcholech A a B (nebo analogicky v A a C). Výběrová dvojice je tedy spojena hranou. Luskouna z vrcholu C (analogicky z vrcholu B) umístíme do jediné možné ohrádky ABC, neboť jiný luskoun nemá do ohrádky ABC přístup. Opět se podíváme na $(n-1)$-úhelník vzniklý z původního n-úhelníka odstraněním ohrádky ABC. V tomto $(n-1)$-úhelníku jsou už vrcholy B i C bez luskouna, představují zde tedy roli vrcholů pro výběrovou dvojici a navíc jsou spojeny hranou (viz obrázek 4). Proto z indukčního předpokladu umíme tento $(n-1)$-úhelník vyplnit distančně luskouny právě jedním způsobem. Dohromady tak v celém n-úhelníku existuje jediné distanční rozdělení luskounů, dvojice luskounů z vrcholů A a B (nebo analogicky A a C) je karanténní.

Třetí možností je, když je jeden výběrový luskoun v A a druhý není v B ani v C. Bod, kde leží, označíme D, body A a D zjevně nejsou spojeny hranou. Nyní můžeme do ohrádky ABC umístit buď luskouna z B nebo luskouna z C – máme dvě možnosti (viz obrázek 5). BÚNO tam dáme toho z B. Opět se podíváme na situaci v $(n-1)$-úhelníku vzniklého odebráním ABC. V bodě B není luskoun, a tedy můžeme bod B považovat za bydliště výběrového luskouna, který je ve výběrové dvojici s luskounem z D. Z indukčního předpokladu zde umíme rozmístit zbylé luskouny distančně alespoň jedním způsobem. Díky tomu, že jsme na začátku do ohrádky ABC nemuseli dát luskouna z B, ale mohli jsme tam umístit toho z C, tak máme alespoň dvě distanční rozdělení luskounů v celém n-úhelníku.



Obrázek 5.

Zbývá určit počet karanténních dvojic. Je stejný jako počet stran ohrádek v n-úhelníku, tedy součet vnějších hran n-úhelníka a vnitřních příček. Vnitřních příček je $n-3$, neboť celkem máme $n-2$ ohrádek a každá příčka rozděluje souvislou oblast na dvě. Karanténních dvojic je proto $n+n-3=2n-3$.

Poznámky:
Bezmála třetina řešení byla správně. Většina řešitelů dobře určila, že karanténní dvojice jsou ty, co sdílí hranu, častou chybou ale byl nedostatečný nebo žádný důkaz toho, že jiné dvojice už karanténní nejsou. *(Zuzana Svobodová)*

Úloha 7.

Učitelky zdravovědy nedodržují karanténu, a proto pro každou dvojici kantorek existuje právě jedna, se kterou si obě podaly ruce. Ukažte, že existuje jedna učitelka, co si podala ruku se všemi. (Danil Koževnikov)

Řešení:
V řešení budu používat terminologii teorie grafů. Učitelky budu nazývat *vrcholy*. Pokud si dvě učitelky podaly ruku, budu říkat, že mezi příslušnými vrcholy existuje *hrana* nebo že jsou tyto vrcholy spojeny. *Stupněm* $d(v)$ vrcholu v budu označovat počet vrcholů, se kterými je vrchol v spojen hranou. Pokud jsou dva vrcholy spojeny hranou, budu je nazývat *sousedy*.

Označme n počet vrcholů. Všimněme si, že pro $n=1$ závěr triviálně platí (jediný vrchol je spojen se všemi ostatními). Pro $n=2$ nejde předpoklad o společném sousedu nikdy splnit. A pro $n=3$ musí být zřejmě všechny dvojice vrcholů propojeny (každý vrchol je tedy propojen se všemi). Omezme proto své úvahy na $n>3$ a předpokládejme pro spor, že existuje graf G, který splňuje podmínku unikátního společného souseda každé dvojice vrcholů, ale neobsahuje žádný vrchol spojený se všemi ostatními.

Nejdříve ukážeme, že všechny vrcholy grafu G musí mít stejný stupeň (takovým grafům se říká *regulární*). Uvažme nejprve libovolné dva vrcholy v, w nespojené hranou. Ukážeme, že $d(v)=d(w)$. Pro každého souseda x vrcholu v (který je z předpokladu nutně různý od w) označme y onoho jediného společného souseda x a w. Pro dvě různé volby x nikdy nemůžeme dostat stejný vrchol y, neboť jinak by y a v měly více než jednoho společného souseda. Ke každému sousedovi vrcholu v můžeme proto přiřadit vždy různého souseda vrcholu w, což znamená, že nutně $d(v)\le d(w)$. Nyní ale můžeme provést stejnou úvahu s prohozenými vrcholy v, w a dostaneme i $d(w)\le d(v)$. Spojením těchto dvou nerovností máme $d(v)=d(w)$.

Uvažme nyní graf G', který má stejné vrcholy jako G, ale hrana je mezi nimi právě tehdy, když v grafu G nebyla (takový graf se nazývá doplňkový ke grafu G). Kdykoliv se v grafu G' umíme dostat cestou po hranách mezi vrcholy v, w, znamená to, že nutně $d(v)=d(w)$, neboť každá dvojice vrcholů spojená hranou v G' má stejný stupeň. Stačí tedy ukázat, že pro každé dva vrcholy existuje v G' cesta mezi nimi (ukázat, že je tento graf *souvislý*). Předpokládejme pro spor, že G' souvislý není. V takovém případě můžeme rozdělit vrcholy G' do dvou neprázdných množin X, Y tak, že nikdy nevede hrana z vrcholu z X do vrcholu z Y. Pokud by velikost X nebo Y byla rovna jedné, pak by vrchol, který by v dané množině ležel, nebyl v G' spojen s žádným vrcholem. Takže by musel být v G spojen se všemi, což nelze. Jinak musí být $|X|>1$, $|Y|>1$. Zvolme dva různé vrcholy z každé množiny: $x_1,x_2\in X$ a $y_1,y_2\in Y$. Pak ale mají vrcholy x_1, x_2 v grafu G společné sousedy y_1 i y_2, což také nelze. Dospěli jsme proto ke sporu a dokázali, že všechny vrcholy grafu musí mít skutečně stejný stupeň.

Označme k stupeň libovolného vrcholu v G. Ukážeme nyní, že pro počet vrcholů n grafu G musí platit $n=k(k-1)+1$. Spočítáme v G dvěma způsoby počet m dvojic různých hran, které sdílejí jeden vrchol. Z každého z n vrcholů grafu G vede k hran. Každý vrchol bude proto společný $\frac{k(k-1)}{2}$ dvojicím hran. Platí proto $m=\frac{nk(k-1)}{2}$. Zároveň ke každé dvojici vrcholů z G můžeme přiřadit právě jednu takovou dvojici hran – tu, která vede ke společnému sousedovi. A naopak každá taková dvojice hran odpovídá určení společného souseda krajních vrcholů. Musí proto platit i $m = \frac{n(n-1)}{2}$. Z toho dostaneme rovnost

$$\frac{nk(k-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

což můžeme jednoduše upravit na $n = k(k-1)+1$. Všimněme si navíc, že můžeme uvažovat jen $k > 2$, neboť pro $k \leq 2$ vychází $n \leq 3$.

Nyní se použije obrovský trik. *Tahem* délky ℓ v grafu G budeme označovat libovolnou posloupnost vrcholů $v_0v_1\ldots v_\ell$ takovou, že každé dva po sobě jdoucí vrcholy jsou spojeny hranou. (Vrcholy se můžou opakovat.) *Uzavřeným tahem* délky ℓ myslíme libovolný tah, pro který $v_0 = v_\ell$ (po průchodu ℓ hran se vrátíme na výchozí vrchol).

Vyberme nyní nějaký vrchol v a označme pomocí $f(\ell)$ počet uzavřených tahů délky ℓ začínajících (a tedy i končících) ve vrcholu v. Takové tahy můžeme rozdělit do dvou skupin. První skupina jsou takové tahy, pro které platí $v_{\ell-2} = v_\ell$ (do výchozího vrcholu se vrátíme také i o dvě hrany dříve a pak jen popojdeme do nějakého souseda a zpět). Na první část cesty máme $f(\ell-2)$ možností; pro to, kam se vydáme na konci, máme k možností. Celkem tedy v první skupině máme $kf(\ell-2)$ tahů. Druhá skupina jsou tahy, pro které $v_{\ell-2} \neq v_\ell$. Pokud prvních $\ell-2$ kroků zvolíme vždy libovolně a skončíme ve vrcholu w různém od v, pak existuje už právě jedna možnost, jak tah uzavřít – pomocí společného souseda vrcholu v a w. Takových možností máme $k^{\ell-2} - f(\ell-2)$, neboť bereme libovolný tah začínající ve v délky $\ell-2$, který není uzavřený. Spojením těchto dvou případů dostáváme $f(\ell) = (k-1)f(\ell-2) + k^{\ell-2}$.

Jelikož je $k > 2$, tak číslo $k-1$ je větší než jedna a má nějaké prvočíselné dělitele. Uvažme libovolného prvočíselného dělitele p čísla $k-1$. Pak $f(p)$ dává po dělení p stejný zbytek jako $k^{p-2} = ((k-1)+1)^{p-2}$, což dává zbytek 1. Celkový počet uzavřených tahů délky p v G je tedy

$$nf(p) = (k(k-1)+1)f(p),$$

což dává po dělení p (jakožto součin dvou čísel, které dávají zbytek 1) také zbytek 1.

Uzavřené tahy délky p se ale v G vyskytují po p-ticích. Každý uzavřený tah $v_0v_1\ldots v_p$ můžeme postupně rotovat na $v_1v_2\ldots v_pv_0$ atd. A jelikož je p prvočíslo, žádné dva z těchto orotovaných tahů nemůžou být stejné (pak by už musely být všechny vrcholy v_i stejné, což ale nejde, protože vrcholy nejsou samy se sebou spojeny hranou).

Dostali jsme se tedy do situace, kdy je počet uzavřených tahů délky p v G dělitelný p, ale zároveň dává zbytek 1, což určitě nelze. Dospěli jsme tím pádem ke sporu a máme hotovo.

Poznámky:

Tato úloha byla hrozně těžká a nikdo ji nevyřešil.

Spousta z vás se tvářila, že má úlohu vyřešenou, ale nikdo se nezvládl při postupu vyhnout nějaké malé chybě, která často v grafových úlohách celé řešení hned zničí. Přiznáme se, že mezi organizátory se stalo něco podobného. Úlohu jsme zadali s tím, že má mnohem lehčí řešení, jehož nefunkčnosti jsme si nevšimli. A následně jsem sám při testování potvrdil, že je úloha obtížností dobře zvolená – také s nefunkčním řešením. Chtěli bychom se proto zde za její zadání omluvit.

Při psaní vzorového řešení jsem čerpal z článku *https://www.researchgate.net/publication/268313555_The_Friendship_Theorem*. Jak se dá přijít na trik s počítáním uzavřených tahů, netuším. Řešení se sice dá sepsat relativně krátce (i když na úlohu z PraSete je pořád spíše hrozně dlouhé), ale vymyslet ho může být ještě mnohem těžší. Původní řešení této úlohy nebylo tolik trikové, ale po ukázání regularity grafu se upnulo k technikám lineární algebry, které bych od vás předpokládal až ke konci prvního ročníku na Matfyzu. Pokud někdo ale lineární algebru trochu umíte nebo vám nevadí googlit a učit se, můžete se podívat na ono řešení v tomto článku: *https://math.mit.edu/~apost/courses/18.204-2016/18.204_Elizabeth_Walker_final_paper.pdf*.

I když byla úloha takto těžká a normálně by do PraSete nikdy zadaná nebyla, držel jsem se konvence dávat plný počet bodů jen za opravdu správná řešení. Částečných bodů jsem dával ale spíše více. Jeden či dva body jsem dával za nějaké zajímavé pozorování o tom, jak graf musí vypadat, i když se poté v tomto řešení nevyužila. Tři body jsem poté dal za řešení, která zvládla dokázat, že je graf regulární. To se povedlo dvěma řešitelům: *Anežce Kasalové* a *Vašku Janáčkovi*, přičemž Vašek zvládl i spočítat počet vrcholů v grafu v závislosti na k. *(Filip Bialas)*

Úloha 8.

Honza dostal při hodině distanční matematiky liché prvočíslo p a $(p+1)$-prvkovou množinu S celých čísel. Dokažte, že z S dovede zvolit po dvou různá čísla $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$ taková, že

$$1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \dots + (p-1) \cdot a_{p-1}$$

je násobkem p. *(Pavel Hudec)*

Řešení:
Nejprve předpokládejme, že existují po dvou různá čísla $b_0, b_1, \dots, b_{p-1} \in S$ taková, že $p \nmid \sum_{i=0}^{p-1} b_i$. Označme $s = \sum_{i=0}^{p-1} b_i$ a $t = \sum_{i=0}^{p-1} i \cdot b_i$. Jelikož $p \nmid s$ a p je prvočíslo, existuje celé k takové, že $p \mid t + ks$. Počítáním modulo p potom dostáváme

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{p-1} i \cdot b_{(i-k) \bmod p} &\equiv \sum_{i=0}^{p-1} ((i+k) \bmod p) \cdot b_i \equiv \\ &\equiv \sum_{i=0}^{p-1} (i \bmod p) \cdot b_i + \sum_{i=0}^{p-1} (k \bmod p) \cdot b_i \equiv \\ &\equiv \sum_{i=0}^{p-1} i \cdot b_i + k \cdot \sum_{i=0}^{p-1} b_i \equiv \\ &\equiv t + ks \equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Suma úplně nalevo však má tvar výrazu ze zadání, takže stačí položit $a_i = b_{(i-k) \bmod p}$ pro všechna $1 \le i \le p-1$.

V opačném případě pro libovolnou p-tici prvků z S platí, že p dělí její součet. Tedy můžeme každý prvek S zapsat jako součet všech prvků S minus součet zbylých p prvků S, což modulo p nezávisí na původní volbě prvku. Proto jsou všechny prvky navzájem kongruentní modulo p. Volbou libovolných prvků S pak dostaneme

$$\sum_{i=0}^{p-1} i \cdot a_i \equiv \sum_{i=0}^{p-1} i \cdot a_1 \equiv \frac{p(p-1)a_1}{2} \equiv 0 \pmod{p},$$

což jsme chtěli ukázat.

Poznámky:
Zhruba polovina řešení byla správná a všechna postupovala podobně jako řešení vzorové, kdy vyšla z jedné p-tice, kterou cyklicky posouvala, čímž získala všechny možné zbytky.

Několik řešení se naopak pokoušelo rozdělit si výraz na skupinky dvou, tří, případně čtyř členů, přičemž chtěli zajistit, aby součet každé skupinky byl dělitelný p. Nikomu se však nepodařilo mě přesvědčit, že opravdu takto zvládne popárovat prvky S a koeficienty tak, že vždy k prvku S může přiřadit ještě nepřiřazený koeficient. *(Pavel Hudec)*