Mocnění

1. JARNÍ SÉRIE — TERMÍN ODESLÁNÍ: 3. ÚNORA 2025

ÚLOHA 1. (3 BODY)
Rozhodněte, zda existují reálná necelá čísla a, b taková, že pro libovolné přirozené n je $a^n + b^n$ celé číslo.

ÚLOHA 2. (3 BODY)
Řekneme, že přirozené číslo n je *zdvořilé*, jestliže je možné jej zapsat jako součet $k+(k+1)+\cdots+\ell$, kde $k, \ell \in \mathbb{N}$, $k < \ell$. Dokažte, že žádná přirozená mocnina dvojky není zdvořilá.

ÚLOHA 3. (3 BODY)
Nalezněte všechna celá nezáporná n taková, že $2^n + n$ dělí $2^{2n} + n$.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)
Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x) \geq 4^x, \qquad f(x+y) \geq f(x)f(y).$$

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)
Dokažte, že existuje nekonečně mnoho přirozených n takových, že $S(3^{n+1}) \leq S(3^n)$, kde $S(a)$ značí ciferný součet čísla a.

ÚLOHA 6. (5 BODŮ)
Buď ABC trojúhelník. Nechť t_B, t_C jsou přímky, které se dotýkají kružnice opsané trojúhelníku ABC postupně v bodech B, C. Zvolme kružnici k_B se středem ležícím na t_B procházející bodem B. Podobně zvolme kružnici k_C se středem ležícím na t_C procházející bodem C. Předpokládejme, že k_B a k_C se protínají ve dvou různých bodech X a Y. Dokažte, že existuje pevný bod P nezávislý na volbě k_B a k_C takový, že body X, Y a P leží na přímce.

ÚLOHA 7. (5 BODŮ)
Uvažujme všechna 2025ciferná čísla, jejichž každá cifra je prvkem množiny $\{2,3,4,5,6,7\}$. Kolik z nich je dělitelných 2^{2025}?

ÚLOHA 8. (5 BODŮ)
Dokažte, že pro všechna přirozená n platí:

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2n+1-k}{k+1} \right)^k \leq 2^n.$$