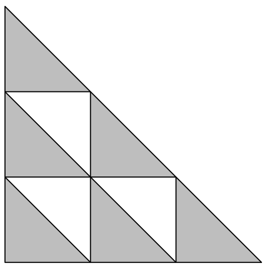
Entové a n-tice

1. jarní série — Vzorové řešení

Úloha 1.

Entové mají listy tvaru rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku o délce odvěsny 1 rozdělené na podobné trojúhelníčky s délkou odvěsny $\frac{1}{n}$, kde n je věk enta. Trojúhelníčky orientované stejně jako původní trojúhelník jsou tmavé, ty opačně orientované jsou světlé. Ent Stromovous má 5 let a ent Stromovlas 4 roky. Listy kterého z nich mají více tmavé plochy?



Příklad listu pro $n = 3$.

(Marian Poljak)

Řešení:

Všimněme si, že list n-letého enta je rozdělen na n^2 malých trojúhelníčků, neboť délka odvěsny malého trojúhelníčku je $\frac{1}{n}$ a tedy jeho obsah je $\frac{1}{n^2}$ obsahu listu. Tmavých trojúhelníčků je ve spodní vrstvě n, ve vrstvě nad ní $n-1$, nad nimi $n-2$, atd. Celkem tedy máme $n+(n-1)+\cdots+1 = \frac{n(n+1)}{2}$ tmavých listů.

Nyní už snadno dopočteme, že poměr počtu tmavých trojúhelníčku ku celkovému počtu trojúhelníčků na listu je

$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Protože jsou všechny trojúhelníčky stejně velké, bude poměr obsahu tmavé plochy ku obsahu celého listu také takový.

Vidíme, že čím starší ent je, tím má méně tmavé plochy (neboť funkce $\frac{n+1}{2n}$ je klesající). Dosadíme hodnoty pro Stromovouse: $\frac{5+1}{2\cdot 5} = \frac{3}{5} = 60$ %; a Stromovlase $\frac{4+1}{2\cdot 4} = \frac{5}{8} = 62{,}5$ %; a tím ověříme, že Stromovlas má tmavší listy.

Poznámky:

Téměř všechna řešení došla ke správnému výsledku a většinou, podobně jako vzorák, počítala počet tmavých trojúhelníčků a k tomu buď počet světlých nebo počet všech. Někteří odvodili obecný vzorec pro libovolný věk enta, nicméně stačilo i spočítat obsahy tmavé plochy pro zadané hodnoty.

(Michal Töpfer)

Úloha 2.

Pro přirozené číslo n zjednodušte výraz

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2n-1)^2 - (2n)^2 + (2n+1)^2.$$

(Matěj Doležálek)

Řešení:

Nejprve zpřeházíme pořadí sčítanců a kromě jedničky je poparujeme do závorek:

$$1 + \left(3^2 - 2^2\right) + \left(5^2 - 4^2\right) + \cdots + \Big((2n+1)^2 - (2n)^2\Big).$$

Pak závorky rozložíme na součin podle známého vzorce $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

$$1 + (3-2)(3+2) + (5-4)(5+4) + \cdots + \Big((2n+1) - (2n)\Big)\Big((2n+1) + (2n)\Big).$$

Všimneme si, že každá levá závorka vzniklá z rozkladu je rovna 1, protože je tvaru $(k+1) - k$. Po odstranění závorek tohoto tvaru dostaneme

$$1 + (3+2) + (5+4) + \cdots + \Big((2n+1) + (2n)\Big).$$

Nyní se zbavíme závorek a uspořádáme členy, čímž

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 \cdots + 2n + (2n+1).$$

Zadaný výraz jsme upravili na součet přirozených čísel od 1 do $2n+1$. Pro výpočet si k součtu přidáme ještě nulu, čímž hodnotu nezměníme, a budeme sčítat čísla od 0 do $2n+1$. Poparujeme první a poslední člen součtu, druhý a předposlední a tak dál. Součet každého tohoto páru je $2n+1$. Celkem je těchto párů $\frac{2n+2}{2} = n+1$. Jejich součet je tedy

$$(n+1) \cdot (2n+1) = 2n^2 + 3n + 1.$$

Poznámky:

K výsledku se šlo dostat mnoha způsoby, ten uvedený je asi nejpřímočařejší. Ve všech řešení bylo v nějakou chvíli potřeba sečíst aritmetickou posloupnost, občas trochu ošklivější než tu ve vzorovém řešení. Šlo se při tom odvolat na to, že je to známá věc, a nebylo potřeba to nějak víc rozepisovat. Po tomhle odvolání se ale několik řešitelů jalo dokazovat funkčnost vzorce, který jim vyšel, matematickou indukcí. To je zbytečné, když už věříme vzorcům na součet aritmetické řady.

Několik řešitelů také během úprav ztratilo jedničku. Tato řešení využívala trochu jiné myšlenky na začátku. Je dobré u podobných úloh otestovat výsledný vzorec pro pár hodnot. Z toho by bylo hned vidět, že výsledek je skoro správně a ztracená jednička by se opět našla. *(Martin Hubata)*

Úloha 3.

Ukažte, že do roviny nelze nakreslit devítici úseček tak, aby každá úsečka protínala právě tři jiné úsečky. *(Natália Bátorová)*

ŘEŠENÍ:
Pro spor předpokládejme, že taková situace existuje. Řekneme, že a *protíná* b, pokud mají nějaký společný bod. Všimněme si, že takto definované protnutí chápeme pro každou dvojici přímek dvakrát (a protíná b a b protíná a). Zároveň ale protnutí není to stejné co průsečík (např. jedním bodem můžou procházet tři přímky, potom však v tomto bodě dochází k šesti protnutím).

Pokud se má každá z devíti úseček protínat s třemi dalšími, musí celkem dojít k 27 protnutím. Protože ale počítáme každé protnutí dvakrát, musí jich celkově být sudý počet, což 27 není, čímž docházíme ke sporu.

POZNÁMKY:
Většina řešitelů postupovala správně a dosáhla plného počtu bodů. Řešení často využívala grafových nástrojů a terminologie, což zpravidla vedlo k elegantním formulacím. Mnozí ztotožňovali protnutí s průsečíky, načež museli několikanásobná protnutí ošetřit jako speciální případy. Paritu protnutí však nebylo nutné dokazovat pro každý počet úseček zvlášť – stačilo si uvědomit, že protnutí v situaci s n úsečkami bude $n \cdot (n-1)$, což je vždy sudé číslo.

Několik řešitelů se spletlo a úlohu dokazovalo pro přímky namísto úseček, což je ovšem oslabení úlohy, za něž nebylo možné udělit žádné body. *(Daniel Perout)*

Úloha 4.

O n-tici $a_1, a_2, \ldots, a_n$ řekneme, že je skoro rostoucí, pokud obsahuje každé číslo od 1 do n právě jednou a splňuje současně

(i) $a_i < a_{i+2}$ *pro všechna* $1 \leq i \leq n-2$,
(ii) $a_i < a_{i+3}$ *pro všechna* $1 \leq i \leq n-3$.

Dokažte, že počet skoro rostoucích n-tic pro dané n je F_{n+1}, kde F_k značí k-té Fibonacciho číslo definované pomocí $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a rekurence $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ pro $k \geq 2$. *(Josef Minařík)*

ŘEŠENÍ:
Provedeme důkaz (silnou) indukcí. Zjistíme, že počet skoro rostoucích n-tic je dán rekurzivním vztahem jako počet skoro rostoucích $(n-1)$-tic plus počet skoro rostoucích $(n-2)$-tic.

V prvním kroku indukce budeme muset ověřit platnost pro $n = 1$ a $n = 2$. Pokud bychom ověřili pouze první případ, nemohli bychom indukční krok pro $n = 2$ použít, neboť bychom potřebovali znát jak počet 1-tic, tak počet 0-tic, které ale ze zadání neexistují (n-tice má obsahovat čísla od 1 do n, 0-tice proto nemůže existovat). Nyní uvažujme jen ty n-tice, které obsahují čísla od 1 do n: je jen jedna taková 1-tice, a to (1) (počet je roven $F_2 = 1$) a jsou jen dvě dvojice, tj. $(1, 2)$ a $(2, 1)$ (počet je roven $F_3 = 2$). Podmínky (i) a (ii) ze zadání jsou splněny triviálně (i by mělo být mezi 1 a -1 či 0 v první podmínce, respektive -2 či -1 ve druhé podmínce, což nikdy nenastane).

V indukčním kroku bychom chtěli zjistit počet skoro rostoucích n-tic pro $n \geq 3$, přitom předpokládáme, že počet skoro rostoucích $(n-1)$-tic je F_n a počet skoro rostoucích $(n-2)$-tic je F_{n-1}.

Uvažme libovolnou skoro rostoucí n-tici. Číslo n může být pouze na pozici $n-1$ nebo n. Pokud by existovalo $i \leq n-2$ takové, že $a_i = n$, pak by existovalo i číslo a_{i+2}, které by z podmínky (i) muselo být (ostře) větší než $a_i = n$. Ale vybíráme pouze čísla z intervalu $\langle 1, n \rangle$, proto k takové situaci nemůže dojít. Můžeme tedy rozlišit dvě skupiny skoro rostoucích n-tic:

(a) n-tice, kde je n na poslední pozici,
(b) n-tice, kde je n na předposlední pozici.

Skupiny (a) a (b) potom ani (zřejmě) nesdílí, ani nevynechávají (viz výše) žádnou skoro rostoucí n-tici.

Skupina (a): Čísla 1 až $n-1$ rozmísťujeme na prvních $n-1$ pozic. Zároveň víme, že se bude muset jednat o skoro rostoucí $(n-1)$-tici. Pokud je $(n-1)$-tice skoro rostoucí, pak rozšířením o n na

n-té pozici získáme také skoro rostoucí posloupnost. (Číslo n na konci splňuje obě dvě podmínky.) Proto n-tic ve skupině (a) bude právě tolik, jako je skoro rostoucích $n-1$-tic, kterých je F_n.

Skupina (b): Jaké číslo může být na poslední pozici? Toto číslo musí být větší než čísla na pozicích $n-2, n-4, \ldots$ z podmínky (i). Zároveň z podmínky (ii) musí být větší než číslo $n-3$, které je z podmínky (ii) zase větší než čísla na pozicích $n-5, n-7, \ldots$ Tedy číslo na poslední pozici musí být větší než každý prvek n-tice kromě čísla na předposlední pozici. Na poslední pozici proto může být pouze číslo $n-1$. Určitě na prvních $n-2$ pozicích musí být čísla 1 až $n-2$ rozmístěna tak, aby tvořila skoro rostoucí $(n-2)$-tici. Zároveň ale rozšíření libovolné skoro rostoucí $(n-2)$-tice o čísla n a $n-1$ bude znovu skoro rostoucí n-tice – podmínky budou splněny, neboť n i $n-1$ jsou ostře větší než kterékoli z čísel 1 až $n-2$. Proto skoro rostoucích n-tic ve skupině (b) je právě tolik, jako je skoro rostoucích $(n-2)$-tic, kterých je F_{n-1}.

Z výše uvedeného vyplývá, že skoro rostoucích n-tic je právě $F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$, jak jsme chtěli dokázat.

Poznámky:
Téměř všichni řešitelé se vydali cestou indukce a zdárně se dobrali cíle. Často ale chybělo ověření počtu n-tic pro $n = 2$. I sebelepší indukční krok se může rozbít, když neplatí předpoklady – že známe počet $(n-1)$-tic i n-tic. *(Klára „Klátra“ Pernicová)*

Úloha 5.

V lese žije n entů a jedna veverka. Entové stojí na místě, některé dvojice z nich jsou si přitom dost blízko na to, aby mezi nimi zvládla veverka přeskočit. Shodou okolností jsou entové rozestaveni tak, že mezi libovolnými dvěma z nich existuje právě jedna cesta, po které může veverka přeskákat.[1] *Vzdáleností dvou entů rozumíme počet skoků, které veverka potřebuje k tomu, aby se mezi nimi přesunula. Osamělost enta definujeme jako součet jeho vzdáleností od všech ostatních entů. Dokažte, že pokud se osamělosti některých dvou entů liší právě o 1, pak je n liché.* (Radek Olšák)

Řešení:
Úlohu budeme dokazovat obměnou, využijeme tedy ekvivalenci

$$(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A).$$

Nejprve si zadání lehce zobecníme, přičemž tvrzení ze zadání snadno plyne ze zobecněné verze. Dokážeme, že pokud je rozdíl nějakých osamělostí lichý, tak n je liché. Obměnou tohoto výroku (tedy výrokem ekvivalentním) je, že pokud je n sudé, tak rozdíl libovolných dvou osamělostí bude sudý.

Zvolíme libovolnou hranu stromu (dvojici entů). Nechť se vrcholy (entové), mezi kterými hrana vede, jmenují A a B. Nyní tuto hranu odebereme a tím rozdělíme strom na dvě komponenty souvislosti. Pojmenujme je C_A a C_B podle vrcholu, který obsahují; nechť mají m a $n-m$ vrcholů. Osamělost vrcholu A v C_A je O_A a osamělost B v C_B je O_B.

Nyní si všimneme, že v původním stromu je délka cesty mezi B a vrcholy v C_A o 1 delší než mezi A a vrcholy z C_A. (Zde si vytvoříme fiktivní cestu z A do A s délkou 0, aby délka z B do A byla o jedna delší.)

Osamělost B v původním grafu nazvěme o_B. Komponenta C_A obsahuje m vrcholů, tedy

$$o_B = O_B + O_A + m.$$

Obdobně získáme, že osamělost A je

$$o_A = O_B + O_A + n - m.$$

[1] Formálně řečeno tedy entové představují *strom*. O stromech se lze více dozvědět v seriálu *Letem grafovým světem* zde: *https://prase.cz/archive/34/serial1.pdf*.

Osamělosti odečteme a získáme

$$o_B - o_A = O_B + O_A + m - (O_B + O_A + n - m),$$

což upravíme na

$$o_B - o_A = 2m - n.$$

Pokud je n sudé, tak i rozdíl $o_B - o_A$ je sudý, a tedy osamělosti obou vrcholů mají stejnou paritu. Pokud mají osamělosti každých dvou sousedních vrcholů stejnou paritu, musí mít stejnou paritu i osamělosti libovolných dvou vrcholů.

Tedy rozdíl osamělostí libovolných dvou vrcholů je sudý, pokud n je sudé. To už nám stačí, neboť díky obměně z toho plyne i tvrzení ze zadání.

Poznámky:
Většina správných řešení používala podobnou myšlenku. Některá řešení byla velmi velmi dlouhá, taková dostala $-i$. *(Vojta „Dláža“ Gaďurek)*

Úloha 6.

Ent Pepa má ve svém lese několik stromů. Všiml si, že pro každé dva z nich je rozdíl jejich výšek větší než vzdálenost mezi nimi. Zároveň žádný strom není vyšší než 100 metrů. Pepa by chtěl kolem svých stromů postavit ohradu. Dokažte, že stačí ohrada dlouhá 200 metrů. (Lenka Kopfová)

Řešení:
Uvažujme les s n stromy. Výšky stromů označme $h_1, \ldots, h_n$ tak, že platí

$$h_1 > h_2 > h_3 > \cdots > h_{n-1} > h_n,$$

tedy strom výšky h_n je nejnižší a strom výšky h_1 nejvyšší. Pepa začne ohrádku stavět od stromu výšky h_1 ke stromu výšky h_2, odtud ke stromu výšky h_3 až ke stromu výšky h_n, odkud ohrádku povede zpět ke stromu výšky h_1. Délku ohrádky označíme ℓ. Tuto délku můžeme vyjádřit jako součet délek úseků vedených mezi jednotlivými stromy. Jelikož platí, že vzdálenost mezi dvěma stromy je menší než rozdíl jejich výšek, tak

$$|h_1 - h_2| + |h_2 - h_3| + |h_3 - h_4| + \cdots + |h_{n-1} - h_n| + |h_n - h_1| > \ell.$$

Protože pro $1 \leq i \leq n-1$ platí $h_i > h_{i+1}$, můžeme odstranit absolutní hodnoty a dostáváme

$$h_1 - h_2 + h_2 - h_3 + h_3 - h_4 + \cdots + h_{n-1} - h_n - h_n + h_1 > \ell,$$

kde se všechny výšky kromě h_1 a h_n odečtou. Dostaneme tedy

$$2h_1 - 2h_n > \ell.$$

Jelikož nejvyšší strom s výškou h_1 může mít nejvýše 100 metrů a nejnižší strom musí mít více než 0 metrů, platí

$$100 - 0 > h_1 - h_n,$$

$$200 > 2h_1 - 2h_n > \ell.$$

Pepovi tedy bude na jeho ohrádku stačit 200 metrů, což jsme chtěli dokázat.

Poznámky:
Většina došlých řešení se ubírala správným směrem, v některých případech se nepodařilo myšlenku ukázanou na případu pro tři nebo čtyři stromy zobecnit pro libovolné rozestavění n stromů. Dále se dá ukázat, že takovouto ohrádku délky ℓ lze upravit na konvexní obal všech stromů (tedy na pěknou ohrádku tvořenou konvexním mnohoúhelníkem), přičemž nová ohrádka nepřesáhne délku ℓ, což lze dokázat z trojúhelníkové nerovnosti. *(Klárka Grinerová)*

Úloha 7.

Najděte všechny n-tice reálných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, které jsou řešeními cyklické soustavy rovnic

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_1 - 1 &= a_2, \\ a_2^2 + a_2 - 1 &= a_3, \\ &\vdots \\ a_n^2 + a_n - 1 &= a_1. \end{aligned}$$

(Josef Minařík)

Řešení:
Sečtením všech rovnic v zadání získáme

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n = a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_1,$$

což můžeme upravit na

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = n.$$

Upravením všech rovnic do tvaru $a_i\,(a_i + 1) = a_{i+1} + 1$ a jejich vynásobením dále získáme

$$a_1 a_2 \cdots a_n \cdot (a_1 + 1)\,(a_2 + 1) \cdots (a_n + 1) = (a_1 + 1)\,(a_2 + 1) \cdots (a_n + 1)\,. \tag{$*$}$$

Nejprve uvažujme případ, kdy pro nějaké j platí $a_j = -1$. Pak jistě $a_{j+1} = a_j^2 + a_j - 1 = -1$, tedy i a_{j+1} je rovno -1 a indukcí máme $a_i = -1$ pro všechna i. Je jasné, že toto je řešení původní soustavy.

Dále tedy nechť žádné a_i není rovno -1, tudíž můžeme v rovnici $(*)$ vydělit pravou stranou, čímž získáme

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \cdots a_n &= 1, \\ a_1^2 a_2^2 \cdots a_n^2 &= 1. \end{aligned}$$

Použitím AG-nerovnosti na (nezáporná) čísla a_i^2 potom získáme

$$n = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i^2} = n \sqrt[n]{1} = n.$$

V AG-nerovnosti tedy musí nastat rovnost, k čemuž dojde, jen pokud platí $a_i^2 = 1$ pro každé i. Jelikož ale žádné z a_i není rovno -1, musí být všechna rovna 1. Snadno ověříme, že se jedná o řešení soustavy.

Máme tedy právě dvě řešení, a to $(1, 1, \ldots, 1)$ a $(-1, -1, \ldots, -1)$.

Poznámky:
Řešení, která se vydala stejným směrem jako vzorové, zpravidla zdárně dospěla k cíli. Řešení, která se snažila rozebírat případy podle velikosti některého a_i, naopak většinou mnoho bodů nezískala.

(Václav Janáček)

Úloha 8.

Jsou dány dvě n-tice kladných reálných čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$ a $x_1, x_2, \dots, x_n$, pro něž platí

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1.$$

Dokažte, že

$$2\sum_{i<j} x_i x_j \le \frac{n-2}{n-1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i x_i^2}{1-a_i},$$

kde v sumě na levé straně sčítáme $x_i x_j$ pro všechny dvojice indexů (i,j) splňující $1 \le i < j \le n$.

(Magdaléna Mišinová)

ŘEŠENÍ:

Víme, že

$$1 = (x_1 + \cdots + x_n)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + 2\sum_{i<j} x_i x_j,$$

můžeme tedy nerovnost upravit na

$$1 - (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \le \frac{n-2}{n-1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i x_i^2}{1-a_i},$$

$$1 - \frac{n-2}{n-1} \le \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i x_i^2}{1-a_i} + x_i^2 \right),$$

$$\frac{1}{n-1} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{1-a_i}.$$

Nyní použijeme známou Cauchyho-Schwarzovu nerovnost, konkrétně její šikovný tvar určený k odhadu součtu zlomků (tzv. *CS zlomkobijec*). Poté využijeme podmínek ze zadání, čímž je úloha vyřešena:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{1-a_i} \ge \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(1-a_i)} = \frac{1}{n-1}.$$

POZNÁMKY:

Kromě originálního řešení od *Ondřeje Lukeše* se všechna správná řešení vydala tímto směrem. Pro více informací o Cauchyho-Schwarzově nerovnosti a obecně o technikách pro řešení podobných úloh bych rád odkázal čtenáře na knihu *Zdolávání nerovností.* *(Marian Poljak)*