Čtyřky

1. JARNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha $\frac{4}{4} \cdot \frac{4}{4}$.

Tabulka 4×4 je vyplněna čísly 1 a 2 tak, že součet čísel v každém čtverci 3×3 je dělitelný čtyřmi a součet čísel v celé tabulce není dělitelný čtyřmi. Jaký je největší a nejmenší možný součet čísel v tabulce?

(Marian Poljak)

ŘEŠENÍ:
Podívejme se nejprve na libovolný čtverec 3×3. Součet čísel v tomto čtverci bude mezi 9 a 18, z čehož čísla 12 (tři dvojky a šest jedniček) a 16 (dvě jedničky a sedm dvojek) jsou dělitelná čtyřmi. V obou případech budou ve čtverci 3×3, a tedy i v celé tabulce, alespoň dvě jedničky a tři dvojky. Proto je součet nejvýše 30 (použijeme 14 dvojek a dvě jedničky) a nejméně 19 (použijeme 13 jedniček a tři dvojky) a ani jedno z těchto čísel není dělitelné čtyřmi.

Abychom úlohu zcela vyřešili, musíme ukázat, že těchto součtů umíme dosáhnout. Pro součet 19 vyplníme tabulku tak, aby všechny dvojky byly v prostředních políčkách, pak bude součet v každém čtverci 3×3 roven 12. Stejně tak pro součet 30 umístíme jedničky do doprostřed, aby součet v každém čtverci byl 16. Příklady jsou na obrázku.

1	1	1	1
1	1	2	1
1	2	2	1
1	1	1	1

2	2	2	2
2	2	2	2
2	1	1	2
2	2	2	2

Největší možný součet čísel v tabulce je 30 a nejmenší 19.

POZNÁMKY:
Skoro všichni si s úlohou pomocí různých úvah poradili. Nezapomeňte, že součástí řešení musí být nejen zdůvodnění, proč je daná hodnota největší, resp. nejmenší, ale i konstrukce, bez níž není řešení úplné.

(Hedvika Ranošová)

Úloha $\frac{4}{4} + \frac{4}{4}$.

Lenka má čtverec $EFGH$ s délkou strany 1. Na jeho stranách EF, FG, GH, HE leží po řadě body A, B, C, D. Dokažte, že platí

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 \leq 4.$$

(Rado van Švarc)

Řešení:
Podle Pythagorovy věty platí

$$|AB|^2 = |AF|^2 + |BF|^2, \qquad |BC|^2 = |BG|^2 + |GC|^2,$$
$$|CD|^2 = |CH|^2 + |HD|^2, \qquad |DA|^2 = |DE|^2 + |EA|^2.$$

Označíme si $|EA| = a$, $|BF| = b$, $|GC| = c$, $|HD| = d$. Jelikož délka strany čtverce $EFGH$ je 1, tak $|AF| = 1 - a$, $|BG| = 1 - b$, $|CH| = 1 - c$, $|DE| = 1 - d$.

Výraz V ze zadání převedeme na

$$V = (1-a)^2 + b^2 + (1-b)^2 + c^2 + (1-c)^2 + d^2 + (1-d)^2 + a^2.$$

Dále upravíme

$$V = 1-2a+2a^2+1-2b+2b^2+1-2c+2c^2+1-2d+2d^2 = 4+2a(a-1)+2b(b-1)+2c(c-1)+2d(d-1).$$

Jelikož $a \in \langle 0, 1\rangle$, tak $a - 1 \in \langle -1, 0\rangle$. Tedy součin nezáporného čísla s nekladným bude nekladný a platí $2a(a-1) \leq 0$. Stejně tak $2b(b-1) \leq 0$, $2c(c-1) \leq 0$ a $2d(d-1) \leq 0$. Jejich součet je proto nanejvýš nula a celý výraz V bude nanejvýš 4.

Poznámky:
Naprostá většina řešitelů si s úlohou hravě poradila použitím tohoto řešení nebo přeskupením sčítanců a důkazem toho, že $|EA|^2 + |AF|^2 \leq (|EA| + |AF|)^2 = 1$. *(Lucka Kundratová)*

Úloha $\frac{4+4+4}{4}$.

Najděte nejmenší přirozené číslo n takové, že neexistuje celé číslo m, jehož druhá mocnina končí v desítkové soustavě n čtyřkami.

(Rado van Švarc)

Řešení:
Hledané číslo n je 4. Například $38^2 = 1444$ ukazuje, že pro $n \leq 3$ existuje číslo končící n čtyřkami. Nyní dokážeme, že neexistuje číslo, jehož druhá mocnina končí čtyřmi čtyřkami.

Pro spor předpokládejme, že existuje, a označme ho m. Pak $m^2 = 10^4 x + 4444$ pro nějaké nezáporné celé číslo x, úpravou dostaneme

$$\left(\frac{m}{2}\right)^2 = \frac{10^4 x + 4444}{4} = 4 \cdot 5^4 x + 1111.$$

Protože je m nutně sudé, tak speciálně i $4 \cdot 5^4 x + 1111$ musí být druhou mocninou celého čísla. To je ale spor, protože neexistuje žádné celé číslo, jehož druhá mocnina dává po dělení čtyřmi zbytek 3.

Poznámky:
Přibližně půlka řešitelů postupovala podobnou myšlenkou jako vzorové řešení. Druhá polovina došlých řešení postupně odzadu rozebírala, jakými číslicemi může m končit a takto ukázala požadovaný výsledek (s využitím faktu, že posledních k číslic m^2 ovlivňuje pouze posledních k číslic m). S takovými řešení se bohužel často pojily numerické chyby a nedorozebrané případy.

(Martin Raška)

Úloha $4 + \frac{4-4}{4}$.

Mějme čtyřúhelník $ABCD$. Kružnice nad průměry AB, AD se podruhé protnou v bodě A'. Obdobně druhý průsečík kružnic nad průměry BC, BA označíme B', druhý průsečík kružnic nad CD, CB označíme C' a druhý průsečík kružnic nad DA, DC označíme D'. Dokažte, že čtyřúhelníky $ABCD$ a $A'B'C'D'$ jsou podobné.

(Radek Olšák)

Řešení:
Nejprve si uvědomme, že pokud uvažujeme průsečík Thaletových kružnic sestrojených nad sousedními stranami čtyřúhelníka, tak jejich druhý průsečík skončí na uhlopříčce (na té z uhlopříček, na které neleží společný vrchol daných sousedních stran). Uvažujme například kružnice nad průměry AB a AD. Pro jejich druhý průsečík A' musí platit $|\sphericalangle AA'B| = |\sphericalangle AA'D| = 90°$, tedy bod A' musí ležet na přímce BD (pro nekonvexní čtyřúhelník může tento bod skončit i mimo jeho vnitřek).

Označme S průsečík přímek AC a BD. Předpokládejme nejprve, že čtyřúhelník $ABCD$ je konvexní a platí, že $\sphericalangle ASB$ je ostrý úhel[1]. Protože úhly $|\sphericalangle ASB|$ a $|\sphericalangle CSD|$ jsou ostré, tak body A', B', C', D' budou ležet po řadě na úsečkách BS, AS, DS a CS a konfigurace je z hlediska toho, jaký bod leží na které úsečce, jednoznačná. Dále body A, B, A', B' leží na kružnici, tudíž z obvodových úhlů dostáváme $|\sphericalangle SA'B'| = |\sphericalangle SAB|$. Trojúhelníky SAB a $SA'B'$ mají společný úhel u S, takže jsou podobné dle věty *uu*. Obdobně můžeme dokázat podobnost trojúhelníků SCD a $SC'D'$. Dále z Thaletovy kružnice body A, A', D', D leží na kružnici, tedy z obvodových úhlů $|\sphericalangle D'A'D| = |\sphericalangle D'AD|$. Protože zároveň $|\sphericalangle A'SD'| = |\sphericalangle ASD|$, tak jsou trojúhelníky ASD a $A'SD'$ podobné. Obdobně můžeme dokázat podobnost trojúhelníků BSC a $B'SC'$. Nyní si už stačí uvědomit, že z daných čtyř trojúhelníků je čtyřúhelník $A'B'C'D'$ jednoznačně určen, navíc zmíněné páry podobných trojúhelníků sdílí strany, tudíž koeficienty podobnosti jsou ve všech dvojicích stejné. Z toho pak už jednoznačně plyne, že čtyřúhelník $A'B'C'D'$ je podobný $ABCD$. Na závěr si stačí rozmyslet, že ostatní konfigurace by se řešily obdobně. Nebo si uvědomit, že všechno, co jsme v řešení dělali, se snadno přepíše pomocí orientovaných úhlů, čímž se vyhneme rozebírání jednotlivých konfigurací.

Poznámky:
Poměrně hodně řešení mělo problém s tím, co to znamená, že jsou dva čtyřúhelníky podobné. Jednak na to, aby dva čtyřúhelníky byly podobné, nestačí ukázat, že mají shodné všechny úhly (žádná věta *uuuu* neplatí). Jednoduchým protipříkladem je, že všechny obdélníky si nejsou podobné, ač mají všechny úhly pravé. Některá jiná řešení dokázala pouze, že dvojice trojúhelníků ASB, $A'SB'$ a CSD, $C'SD'$ jsou podobné, a snažila se tvrdit, že už z toho plyne výsledná podobnost čtyřúhelníků. Neplyne. Je potřeba dokázat buď podobnost všech trojúhelníků, nebo že koeficient podobnosti je v obou případech stejný. Další důležitou chybou, za kterou jsem ale nakonec nestrhávala body, bylo řešení pouze jedné konkrétní konfigurace bodů. Je sice pravda, že všechny se řeší v podstatě stejně, ale je potřeba alespoň zmínit, že se řeší obdobně. Myslím si, že například v olympiádě by za to body strhnuté byly, tak na to pozor :-). *(Lenka Kopfová)*

Úloha $\frac{4\cdot 4+4}{4}$.

Uvažme posloupnost[2] $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ takovou, že $a_0 = 0$. Další členy definujme následovně. Pro přirozené číslo n označme ℓ_n největší liché číslo, které dělí n. Pak položme $a_n = a_{n-1} + 1$, pokud ℓ_n dává po dělení čtyřmi zbytek 1, a $a_n = a_{n-1} - 1$, pokud dává zbytek 3. Dokažte, že pro každé přirozené číslo m existuje nekonečně mnoho i takových, že $a_i = m$.

(Matěj Doležálek)

[1] Jak několik řešitelů správně podotklo, pokud by tento úhel byl pravý, potom by čtyřúhelník $A'B'C'D'$ zdegeneroval do jednoho bodu a v takovém případě by nemělo smysl úlohu řešit. Měli jsme to tudíž specifikovat v zadání a za chybu se omlouváme.

[2] Pokud nevíš, co je to posloupnost, koukni se na *prase.cz/commentary/C/serie2p/uvod2p.pdf*.

Řešení:
Pro přirozené n definujme $f(n)$ jako

$$f(n)=\begin{cases}1, & \text{pokud } \ell_n \text{ dává zbytek 1 po dělení čtyřmi,}\\ -1, & \text{pokud } \ell_n \text{ dává zbytek 3 po dělení čtyřmi.}\end{cases}$$

Potom platí $f(n)=a_n-a_{n-1}$ a můžeme tedy vyjádřit

$$a_n=f(1)+f(2)+\cdots+f(n).$$

S využitím této znalosti odvodíme vyjádření a_n pomocí nějakého předchozího členu posloupnosti. Nechť $n=4x+d$ pro nějaké nezáporné celé x a $d\in\{0,1,2,3\}$. Uspořádáním sčítanců do čtveřic obdržíme

$$\begin{aligned}a_n=&\Big(f(1)+f(2)+f(3)+f(4)\Big)+\cdots+\Big(f(4k+1)+f(4k+2)+f(4k+3)+f(4k+4)\Big)+\\&+\cdots+\Big(f(4x-3)+f(4x-2)+f(4x-1)+f(4x)\Big)+\cdots+f(4x+d).\end{aligned}$$

Nyní si lze povšimnout, že pro každé k platí $f(4k+1)+f(4k+3)=1+(-1)=0$. Zároveň obecně platí $f(2n)=f(n)$, neboť vynásobením dvěma se největší lichý dělitel nezmění. Z toho plyne

$$f(4k+1)+f(4k+2)+f(4k+3)+f(4k+4)=f(2k+1)+f(2k+2).$$

Použijme nyní tuto úpravu ve vyjádření a_n na všechny členy kromě posledních d, které neleží v žádné čtveřici. Tím obdržíme

$$a_n=f(1)+\cdots+f(2x)+f(4x+1)+\cdots+f(4x+d)=a_{2x}+f(4x+1)+\cdots+f(4x+d).$$

Z tohoto již vyvodíme vše, co k vyřešení úlohy potřebujeme. Zaprvé ukažme, že každé číslo, které se v posloupnosti někdy objeví, se v ní nekonečně mnohokrát zopakuje. Nechť $a_n=m$. Pokud je n sudé, tzn. $n=2x$, pak platí $a_{2n}=a_{4x}=a_{2x}=a_n$. Číslo $2n$ je taktéž sudé, takže toto lze zopakovat a dostat

$$a_{2^in}=a_n=m$$

pro každé i.

Pokud je n liché, tedy pokud $n=2x+1$, pak máme

$$a_{2n+1}=a_{4x+3}=a_{2x}+f(4x+1)+f(4x+2)+f(4x+3)=a_{2x}+1+f(2x+1)+(-1)=a_{2x+1}=a_n.$$

Číslo $2n+1$ je opět liché, takže tuto proceduru lze dále opakovat a obdržet tak nekonečně mnoho členů posloupnosti s hodnotou m.

Nyní tak stačí ukázat, že každé přirozené číslo se v posloupnosti někdy vyskytne. Nechť opět $a_n=m$ pro nějaká přirozená n, m. Ukážeme, že se v posloupnosti vyskytne i $m+1$. Vzhledem k tomu, že $a_1=1$, můžeme z tohoto indukcí snadno ukázat, že v posloupnosti se skutečně vyskytne každé přirozené číslo. Pokud je $n=2x$, pak díky vztahu $a_{2n}=a_n$, který jsme již dokázali, máme

$$a_{2n+1}=a_{2n}+f(2n+1)=a_n+f(4x+1)=m+1.$$

Obdobně pro $n=2x+1$ jsme už dokázali $a_{2n+1}=a_n$, takže platí

$$a_{2n}=a_{2n+1}-f(2n+1)=a_n-f(4x+3)=m-(-1)=m+1.$$

Poznámky:

Úloha se vyznačovala značnou rozličností došlých řešení. Většina z nich nějakým způsobem zkoumala průběh posloupnosti mezi indexy 2^k a 2^{k+1}. Pro zajímavost uvedu některá tvrzení či myšlenky, které se v řešeních objevovaly.

(i) Pro každé přirozené k platí $a_{2^k-1} = 1$. Řešení, která ukázala toto (nebo něco ekvivalentního), ale poté se nějak rozbila, obvykle obdržela 2 body.

(ii) Často se též objevovala myšlenka „zrcadlení" podle mocnin dvojky, např. pro $k \geq 2$ a libovolné i splňující $0 < i < 2^k$, $i \neq 2^{k-1}$ platí $f(i) = -f(2^k - i)$.

(iii) Někteří řešitelé odhalili, že posloupnost a_n nabývá mezi indexy 2^k a 2^{k+1} maxima v bodě

$$N = 2^k + 2^{k-2} + 2^{k-4} + \dots,$$

kde se v součtu vyskytuje každá druhá mocnina dvojky a poslední je buďto 2^1, nebo 2^0, podle toho, jestli je k liché, nebo sudé. Konkrétně platí $a_N = k + 1$.

Nešvarem, který trápil mnohá řešení, bylo, že prohlašovala za zřejmé věci, které zřejmé opravdu nejsou, nebo někdy i věci, které neplatí. Některým řešitelům bych také doporučil spíše se vyvarovat „dokazování" tvrzení skrze prozkoumání nějakého malého případu a následného prohlášení, že obecně to funguje stejně nebo podobně – srozumitelnosti argumentu většinou prospěje formulovat jej obecně rovnou. *(Matěj Doležálek)*

Úloha $\frac{4+4}{4} + 4$.

Skupina orgů se rozhodla, že si uspořádají curlingový turnaj. Každý zápas funguje tak, že se čtyři orgové dohodnou a vyzvou na souboj jinou čtveřici. Po skončení turnaje si všimli, že každý hrál proti každému právě v jednom zápase (tzn. byli v opačných týmech). Určete, kolik orgů mohlo být ve skupině.

(Rado van Švarc)

Řešení:

Začněme tím, že omezíme počet orgů na čísla ve tvaru $32k + 1$ pro přirozená k.

Označme si počet orgů n. Nyní se podívejme na jednoho orga, řekněme Mariana (ten na turnaji nesmí chybět, jelikož měl narozeniny). Ten si vždycky vybere nějaké lidi do týmu a vyzve druhý tým. Jelikož hrál s každým právě jednou a v každém zápase hrál proti čtyřem jiným orgům, tak je počet zápasů jednoho hráče roven $\frac{n-1}{4}$. Proto je $n - 1$ dělitelné čtyřmi.

Nyní se podívejme na celkový počet zápasů a označme jej p. Počítejme dvěma způsoby počet uspořádaných dvojic (*pár proti sobě hrajících orgů*, *zápas*). Pokud zafixujeme zápas, pak je našich párů v každém zápase $4 \times 4 = 16$ (hrají vždy čtyři proti čtyřem). Tedy počet uspořádaných dvojic je celkově $16p$. Nyní si zafixujme pár. Ten přispěje do právě jednoho zápasu. Počet uspořádaných dvojic je tedy také $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Počet zápasů je tedy $\frac{n(n-1)}{32}$, což musí být celé číslo. Vidíme, že n a $n-1$ jsou dvě po sobě jdoucí čísla, takže je nejvýše jedno z nich sudé, a tedy už nutně dělitelné 32. Zároveň už víme z prvního odstavce, že $n - 1$ je dělitelné čtyřmi, tedy i 32 dělí $n - 1$.

Nyní bychom chtěli ukázat konstrukci pro $n = 32k + 1$, kde k je přirozené číslo. Budeme postupovat indukcí. Pro 33 orgů si můžeme rozmyslet například následující konstrukci: i, $i + 1$, $i + 2$, $i + 3$ proti $i + 4$, $i + 8$, $i + 12$, $i + 16$ pro každé i z množiny 1 až 33 (všechno bereme modulo 33). Jelikož jde o cyklickou konstrukci, tak stačí pouze ověřit, že org jedna hrál se všemi ostatními právě jednou (ten hrál pro $i \in \{1, 33, 32, 31, 30, 26, 22, 18\}$).

Nyní předpokládejme, že to umíme pro $32k + 1$ a chtěli bychom to dokázat pro $32(k + 1) + 1$. Rozdělme si orgy do tří skupin: znovu na Mariana, 32 nových orgů a $32k$ starých. Z kroku pro 33 orgů umíme odehrát všechny zápasy správně pro skupinku 32 nových orgů s Marianem a z indukčního předpokladu to umíme i pro skupinku starých orgů znovu s Marianem. Marian už nyní hrál se všemi a v rámci skupin už jsou také všechny zápasy odehrány. Teď už jen stačí rozdělit staré a nové orgy do týmů po čtyřech (jelikož jsou velikosti obou skupin dělitelné čtyřmi, jde to snadno). Pak necháme každý tým starých orgů hrát proti každému týmu nových orgů. Nyní už hrál každý s každým právě jednou a naše konstrukce je kompletní.

Poznámky:
Většina došlých řešení se vydala správným směrem a udělala omezení počtu orgů na $32k + 1$ pro přirozené k. Bohužel spousta z nich neobsahovala konstrukci, že tento počet je opravdu možný, což byla také velmi důležitá součást řešení a je důležité na to nezapomínat. *(Filip Čermák)*

Úloha $4 + 4 - \frac{4}{4}$.

Ve čtyřstěnu $ABCD$ označme středy kružnic vepsaných trojúhelníkům BCD, CDA, DAB, ABC po řadě I_A, I_B, I_C, I_D. Nechť platí, že úsečky AI_A, BI_B, CI_C a DI_D prochází jedním bodem. Dokažte, že

$$|AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |BD| = |AD| \cdot |BC|.$$

(Marian Poljak)

Řešení splynutím průsečíků:
Protože se úsečky AI_A a BI_B protínají, musí ležet v jedné rovině, kterou označíme ρ. Přímka CD v ρ zřejmě neleží, a tedy má s ρ nejvýše jeden společný bod. Jelikož přímky AI_B a BI_A ležící v ρ protínají přímku CD, musí ji protnout v tom samém bodě X. Navíc je potom AX osa úhlu $\sphericalangle DAC$ a BX osa úhlu $\sphericalangle DBC$.

Podle známého tvrzení o průsečíku osy úhlu s protější stranou pak dostáváme

$$\frac{|BC|}{|BD|} = \frac{|XC|}{|XD|} = \frac{|AC|}{|AD|},$$
$$|AD| \cdot |BC| = |AC| \cdot |BD|.$$

Pro druhou z dokazovaných rovností pouze přeznačíme vrcholy čtyřstěnu a postupujeme stejně.

Řešení přes objemy:
Objem čtyřstěnu $KLMN$ budeme značit $[KLMN]$, podobně obsah trojúhelníku KLM budeme značit $[KLM]$.

Nechť se přímky AI_A a BI_B protínají v bodě T. Spočítáme dvěma způsoby výraz $\frac{[ABCT]}{[ABDT]}$. Mějme nějaký bod T' různý od A ležící na polopřímce AI_A. Pak je $[ABCT']$ přímo úměrný vzdálenosti $|AT'|$, neboť i délka výšky z vrcholu T' je přímo úměrná $|AT'|$. Analogicky stejnou přímou úměrnost dostaneme mezi $[ABDT']$ a $|AT'|$. Dohromady pak $\frac{[ABCT']}{[ABDT']}$ nezávisí na zvoleném T', tedy ho spočítáme pro $T' \equiv I_A$.

V takovém případě potom jsou výšky čtyřstěnů $ABCI_A$ a $ABDI_A$ z vrcholu A shodné, a tedy $\frac{[ABCI_A]}{[ABDI_A]} = \frac{[BCI_A]}{[BDI_A]}$. Zlomek na pravé straně je však roven $\frac{|BC|}{|BD|}$, neboť obě výšky z I_A jsou rovné poloměru kružnice vepsané trojúhelníku BCD.

Podobně pak pro libovolný bod T'' různý od B ležící na polopřímce BI_B obdržíme vztah $\frac{[ABCT'']}{[ABDT'']} = \frac{|AC|}{|AD|}$. Dohromady tedy máme

$$\frac{|BC|}{|BD|} = \frac{[ABCI_A]}{[ABDI_A]} = \frac{[ABCT]}{[ABDT]} = \frac{[ABCI_B]}{[ABDI_B]} = \frac{|AC|}{|AD|}.$$

Řešení pak dokončíme stejně jako v předchozím řešení.

Poznámky:
K úloze nedošlo moc řešení, ačkoliv nijak zvlášť obtížná nebyla. Většina řešení pak byla správně a kopírovala první vzorové řešení. Druhé vzorové řešení může vypadat magicky, ale je snadné na něj přijít použitím barycentrických souřadnic. Pokud by ses o nich chtěl dozvědět více, doporučujeme ti příspěvek z předloňského sborníku *i*KSka.[3] *(Pavel Hudec)*

Úloha $4+4+4-4$.

PraSátka se rozhodla Marianovi k narozeninám, které bude mít v den odeslání této série, dát čtyři polynomy P, Q, R, S s reálnými koeficienty. Chtějí, aby pro libovolná celá čísla x, y, z, t taková, že $xy - zt = 1$, platilo

$$P(x)Q(y) - R(z)S(t) = 1.$$

Určete všechny čtveřice polynomů, které mohou Marianovi dát.

(Marian Poljak)

Řešení:
Nejdříve prověříme případ, kdy je jeden z polynomů, BÚNO P, nulový. Potom pro každé celé číslo k máme pomocí dosazení $[1, k+1, 1, k]$ rovnost

$$-R(1)S(k) = 1,$$

z čehož plyne $R(1) \neq 0$ a $S(k) = -\frac{1}{R(1)}$ pro všechna celá k. Nekonstantní polynom nemůže nabývat stejné hodnoty nekonečněkrát, takže $S(k)$ musí být konstantně roven $-\frac{1}{R(1)}$. Dosazením $[1, k+1, k, 1]$ následně dostaneme, že R musí být taktéž konstantní.

Tedy pokud je P nulový, musí být $R(x) = a$ a $S(x) = -\frac{1}{a}$ pro nějaké nenulové reálné a. Naopak každá čtveřice polynomů $\left(0, T, a, -\frac{1}{a}\right)$, kde a je nenulové reálné číslo a T libovolný polynom, již tvrzení ze zadání zřejmě splňuje. Obdobně dostaneme, že čtveřice $\left(T, 0, a, -\frac{1}{a}\right)$, $\left(a, \frac{1}{a}, T, 0\right)$, $\left(a, \frac{1}{a}, 0, T\right)$ jsou řešením úlohy. Tímto jsme našli všechna řešení, kde je jeden z polynomů nulový.

Předpokládejme dále, že jsou všechny polynomy nenulové. Navíc nechť je nyní jeden z polynomů, BÚNO P, konstantní. Nechť k, ℓ jsou libovolná celá čísla. Potom dosazením $[k\ell+1, 1, k, \ell]$ dostáváme, že $R(k)S(\ell)$ má pro všechny volby k, ℓ stejnou hodnotu. Jelikož je R nenulový polynom, nemá nekonečně mnoho kořenů, takže existuje takové k_0, že $R(k_0)$ je nenulové. Volbou $k = k_0$ dostaneme, že $S(\ell) = \frac{1}{R(k_0)}$ je stejné pro všechna celá ℓ, takže S je konstantní polynom. Symetricky dostaneme, že je R konstantní. Nakonec volbou $[1, k, 1, k-1]$ dostáváme, že je i Q konstantní.

Zjistili jsme, že pokud je jeden polynom konstantní, pak jsou konstantní už všechny. Zřejmě pak danou rovnici splňují právě polynomy konstantně rovné takovým reálným nenulovým (a, b, c, d), že $ab - cd = 1$. Dále se můžeme omezit na nekonstantní polynomy.

Ukážeme, že všechny polynomy jsou poté nutně lineární s nulovým absolutním členem. Dosazením postupně $[k, \ell, 1, k\ell-1]$ a $[\ell, k, 1, k\ell-1]$ dostáváme, že pro všechna celá k, ℓ platí $P(k)Q(\ell) = P(\ell)Q(k)$. Jelikož P je nekonstantní, má pouze konečně mnoho kořenů, takže existuje celé k_0 takové, že $P(k_0) \neq 0$ a můžeme psát $Q(\ell) = \frac{Q(k_0)}{P(k_0)}P(\ell)$. Poté má polynom $Q(x) - \frac{Q(k_0)}{P(k_0)}P(x)$ kořen v každém celém čísle, takže musí být nulový, tedy $Q = \alpha P$ pro nějaké nenulové reálné α. Obdobně dostaneme $R = \beta S$.

Dále dosaďme postupně $[k, \ell, 1, k\ell-1]$ a $[k\ell, 1, 1, k\ell-1]$, z čehož ihned získáme, že pro všechna celá k, ℓ musí platit $\alpha P(1)P(k\ell) = \alpha P(k)P(\ell)$. Pišme $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, kde $a_n \neq 0$. Potom musí pro všechna celá k, ℓ platit

$$\begin{aligned}(a_n + \cdots + a_1 + a_0)\left(a_n (k\ell)^n + \cdots + a_1 k\ell + a_0\right) &= \\ = (a_n k^n + \cdots + a_1 k + a_0)\left(a_n \ell^n + \cdots + a_1 \ell + a_0\right).\end{aligned}$$

[3] Najdeš ho na *http://iksko.org/files/sbornik7.pdf*.

Ať zvolíme libovolné pevné ℓ, tak vždy dostaneme, že polynom v proměnné k získaný odečtením levé a pravé strany má nekonečně mnoho kořenů, takže musí mít všechny koeficienty nulové. Proto koeficient u každého k^i musí být nulový, a tedy i u k^n. Proto platí

$$(a_n + \cdots + a_1 + a_0)a_n\ell^n = a_n(a_n\ell^n + \cdots + a_1\ell + a_0).$$

Zde získáváme pro změnu polynom v ℓ s nekonečně mnoha kořeny, takže se musí všechny jeho koeficienty rovnat nule. Jelikož je a_n různé od nuly, musí být všechny ostatní koeficienty rovny nule, neboť jinak by byly na pravé straně členy, které nejsou na levé. Můžeme proto psát $P(x) = ax^n$, kde n je přirozené a a je nenulové reálné. Symetrickými úvahami dostaneme $R(x) = bx^m$.

Po dosazení čtveřice $[k, 1, k-1, 1]$ dostaneme podmínku

$$(ak^n)(\alpha a \cdot 1^n) - (b(k-1)^m)(\beta b \cdot 1^m) = \alpha a^2 k^n - \beta b^2 (k-1)^m = 1.$$

Rovnost platí pro nekonečně mnoho k, takže výraz vlevo musí být konstantně roven 1, jakožto polynom v k. Z toho hned plyne, že nutně $n = m$, $a^2\alpha = b^2\beta$. Navíc po dosazení $k = 1$ dostáváme $a^2\alpha = 1$. Dohromady proto máme $k^n - (k-1)^n = 1$. Pro $n \geq 2$ vznikne ale na levé straně lineární člen $(-1)^n nk$, který se s ničím neodečte, což je ve sporu s tím, že je polynom vlevo roven jedné. Takže nutně $n = 1$.

Zjistili jsme, že pokud jsou všechny čtyři polynomy nekonstantní, tak musí být nutně rovny $\left[ex, \frac{y}{e}, fz, \frac{t}{f}\right]$, pro libovolná nenulová reálná e, f. Je tomu tak, protože $P(1)Q(1) = a^2\alpha = 1$, z čehož plyne, že součin koeficientů u prvních dvou polynomů musí být roven jedné. Pro R, S odvodíme tuto skutečnost obdobně. Takové polynomy zřejmě splňují podmínku ze zadání, z čehož plyne, že jsme našli poslední třídu řešení.

Poznámky:

K úloze bylo možné přistupovat spoustu způsoby a žádná dvě řešení nebyla stejná. Nejtěžší bylo asi neztratit se ve všech možných případech, které můžou nastat, a ukázat, že v posledním případě mohou mít polynomy pouze jeden nenulový člen. *(Filip Bialas)*