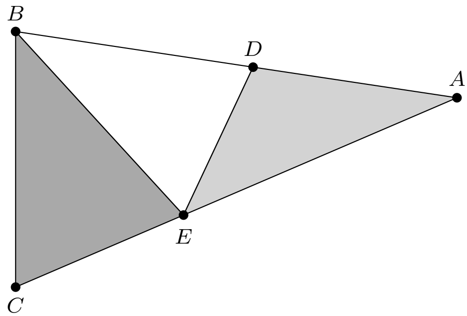
Cesta kolem světa

1. PODZIMNÍ SÉRIE — TERMÍN ODESLÁNÍ: 2. ŘÍJNA 2023

ÚLOHA 1. (3 BODY)

Během Daníkovy pěší túry Himálajem vypukla v Nepálu bouřlivá debata o nové podobě státní vlajky. Daník do této debaty jakožto nadšený vexilolog přispěl návrhem vlajky ve tvaru trojúhelníku ABC, na jehož stranách AB, AC leží postupně body D, E. Tyto body dělí vlajku na barevné trojúhelníky ADE, DEB, BCE se stejnými obsahy. Určete hodnotu $\frac{|AE|}{|AC|}$.



ÚLOHA 2. (3 BODY)

Orgové na jarním soustředění uspořádali hru se stanovišťmi označenými $1, 2, \ldots,$ 2023. Na stanovišti 2023 se nachází cíl se spoustou nadívaných žampiónů, kdežto na každém stanovišti $i \in \{1, 2, \ldots, 2022\}$ měl ležet papír s instrukcí „Jdi na stanoviště $i + 1$“. Jenže orgové jsou nešikové a během rozvěšování těchto 2022 papírů pomíchali a na těchto 2022 stanovišť je rozvěsili v nějakém jiném pořadí. Pokud účastníci začínají na stanovišti 1, lze s jistotou říct, že někdy dojdou do cíle?

ÚLOHA 3. (3 BODY)

Čtyři PraSátka se odstěhovala do australské buše a postavila si domečky ve vrcholech obdélníku, jehož strany mají délky 4 a 6. Šimonovi se po nich stýská, a proto by si chtěl postavit v buši chatrč tak, aby měla od všech zbylých PraSátek racionální vzdálenost. Může se mu to povést?

Úloha 4. (5 bodů)

Marian nalezl při potápění v Mariánském příkopě dva kvadratické polynomy $P(x)$ a $Q(x)$ takové, že polynom $P(Q(x))$ má čtyři reálné kořeny $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Dokažte, že musí platit $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$.

Úloha 5. (5 bodů)

Pepa se účastní Rallye Sahara na svém závodním dromedárovi. Na okružní trase je rozmístěno několik artézských studní, které však nemají mnoho vody. Ve všech studních dohromady se nachází přesně tolik vody, kolik jí Pepův velbloud spotřebuje na zdolání trasy. Vždy, když Pepa dorazí ke studni, velbloud vypije všechnu vodu, která je k dispozici (jeho hrb má neomezenou kapacitu), ale pokud mu voda dojde, zastaví se a nepůjde dál. Dromedárova spotřeba vody je přímo úměrná vzdálenosti, kterou urazí, přičemž na začátku závodu nemá žádnou vodu a potřebuje se napít ze studny, u které začíná. Dokažte, že když si Pepa zvolí správnou počáteční studnu, podaří se mu zdolat celou trasu.

Úloha 6. (5 bodů)

Šošo během své návštěvy New Yorku obdivuje místních n mrakodrapů, z nichž každý má kladnou celočíselnou výšku. Pro každé dva mrakodrapy si Šošo do svého notýsku poznamenal rozdíl jejich výšek. V závislosti na n určete, kolik nejvíce různých mocnin dvojky mohl Šošo na konci svého výletu v notýsku mít.

Úloha 7. (5 bodů)

Majda si zařizuje pas na cestu kolem světa. Pas má tvar nějakého konvexního n-úhelníku s obsahem S a obvodem o. Majda má kruhovou fotografii s poloměrem $\frac{S}{o}$. Víme jistě, že se fotografie do pasu vejde?

Úloha 8. (5 bodů)

Na pobřeží Antarktidy má každý z k států jednu či více vědeckých základen, dohromady jich mají 2023. Každá základna patří právě jednomu státu. Najděte největší možné k takové, aby mohla platit následující podmínka. Pro každou základnu z a stát S, který je jedním z našich k států, existuje souvislá část pobřeží, na které leží z a na níž alespoň polovina základen patří státu S.

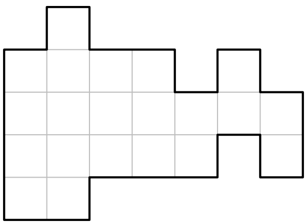
Dělení

2. PODZIMNÍ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 13. LISTOPADU 2023

Říkáme, že celé číslo x je dělitelem celého čísla y, pokud existuje celé číslo z takové, že $y = xz$. Tuto skutečnost značíme $x \mid y$.

ÚLOHA 1. (3 BODY)

Káťa a Pepa si koupili křivolakou tabulku čokolády složenou z malých čtverečků jako na obrázku níže, kterou si chtěli co nejférověji rozdělit. Než to však stihli učinit, přišel Matěj a jeden čtvereček jim z tabulky snědl. Který čtvereček mohl sníst, aby si posléze Káťa a Pepa dovedli zbytek tabulky rozdělit na dva shodné útvary? Čokoládu je povoleno dělit pouze řezy podél hran čtverečků.



ÚLOHA 2. (3 BODY)

Dokažte, že pokud pro celá čísla a, b platí $2024^2 - 1 \mid 2023a + 2025b$, potom též $2024^2 - 1 \mid a \cdot b$.

ÚLOHA 3. (3 BODY)

Ukažte, že mezi libovolnými 39 po sobě jdoucími přirozenými čísly se vždy nachází alespoň jedno, jehož ciferný součet je dělitelný 11.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

Fíla vzal své oblíbené přirozené číslo n a následně na tabuli pro každé z přirozených čísel $n + 1$ až $2n$ napsal jeho největšího lichého dělitele. Určete součet všech čísel na tabuli.

Úloha 5. (5 bodů)

PraSestán má tvar čtverce, který je $n-1$ svislými a $n-1$ vodorovnými přímkami rozdělen na n^2 obdélníkových provincí. Řekneme, že provincie A *se vejde* do provincie B, pokud lze B otočit o celočíselný násobek 90° a přesunout tak, aby zakryla celou A. Dokažte, že můžeme vybrat $2n$ provincií tak, aby se pro libovolné dvě z nich jedna vešla do druhé.

Úloha 6. (5 bodů)

Je dáno prvočíslo p. Najděte všechny p-tice $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ celých čísel takové, že pro každé přirozené číslo n platí

$$p \mid a_1^n + a_2^n + \cdots + a_p^n.$$

Úloha 7. (5 bodů)

Matouš si ve slevě pořídil čtvercovou tabulku 13×13 a všiml si, že $13^2 = 12^2 + 5^2$. Tabulku chce proto rozřezat na několik dílů a následně z nich sestavit dvě nové tabulky o rozměrech 12×12 a 5×5. Řezy lze vézt pouze po hranách políček tabulky (ne nutně však jedním rovným řezem) a vzniklé díly je povoleno otáčet i překlápět. Na kolik nejméně dílů musí Matouš tabulku rozdělit, aby z nich skutečně dovedl sestavit dvě nové tabulky 12×12 a 5×5?

Úloha 8. (5 bodů)

Dokažte, že pro libovolná přirozená čísla n, k platí

$$\left(n!\right)^{1+n+n^2+\cdots+n^{k-1}} \,\Big|\, \left(n^k\right)!.$$