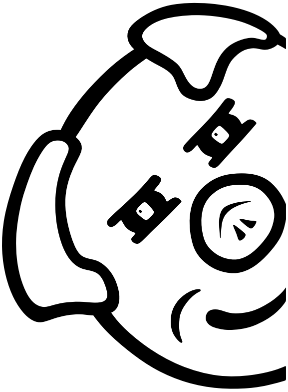
Matematický korespondenční seminář

Milý příteli!



S koncem školního roku a začátkem prázdnin přišel čas rozloučit se s 41. ročníkem PraSátka, abychom mohli odstartovat ročník s číslem 42. Zbývá tedy pogratulovat vítězům i poraženým. Absolutním vítězem se letos stal *Michal Janík* s 253 body, předběhl tím *Jakuba Šošovičku* s 246 body a bronzového *Matěje Gajdoše* s 237 body. Magickou hranici 200 pak překročilo dohromady sedm řešitelů. Gratulace ale patří každému z 122 řešitelů, který se letos zapojil odesláním alespoň jednoho příkladu.

Věříme, že se vám letošní ročník líbil a odnesli jste si mnoho znalostí, ale i zábavy, třeba na podzimním nebo jarním soustředění nebo na tradičním jarním výletě. Není ale třeba klesat na mysli, že už je po všem. Součástí těchto komentářů jsou nejen vzorová řešení a výsledkové listiny, ale i zadání **1. podzimní série**, ve které zavítáme do světa strašidel. V organizátorské kuchyni už proto Tebe také vzniká zbrusu nový seriál.

Teď už tedy nezbývá nic jiného, než Ti za všechny organizátory popřát pěkné léto. Tak na viděnou, slyšenou či dopisovanou!
Hodně pěkných zážitků s PraSátkem přeje

Hedvika Ranošová

Co je dále v komentářích?

- Vzorová řešení 3. a 4. jarní série a 3. seriálové série
- Výsledkové listiny jarní části a celého 41. ročníku

- Příloha: Zadání 1. podzimní série

Korespondenční seminář
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1

matfyz

Jarní soustředění

V termínu 23. 4.–1. 5. proběhlo PraSečí soustředění v obci Lipová-lázně v Jeseníkách.

Podívali jsme se do ZOO, ale hned po příjezdu nám vybouchl autobus a potkali jsme malé ztracené zvířátku. Museli jsme proto prohledat celou ZOO, abychom našli součástky z autobusu a vrátili našeho nového kamaráda k rodičům. Z našeho kamaráda se sice vyklubal pterodaktyl, ale našli jsme mu nový domov ve výběhu PraSátek.

Odmocniny

3. jarní série — Vzorové řešení

Úloha 1.

Rozhodněte, zda lze zvolit po dvou různá přirozená čísla a, b, c taková, že $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ ani $\sqrt{abc}$ nejsou celá čísla, ale $\sqrt{ab}$, $\sqrt{bc}$ i $\sqrt{ca}$ jsou? *(Josef Minařík)*

Řešení:
Ukažme, že taková čísla zvolit dovedeme. Položme ku příkladu $a = 2$, $b = 8$, $c = 32$. Pak

$$\sqrt{2}, \qquad \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \qquad \sqrt{32} = 4\sqrt{2}, \qquad \sqrt{2 \cdot 8 \cdot 32} = \sqrt{512} = 16\sqrt{2}$$

nejsou celá čísla. Naopak

$$\sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4, \qquad \sqrt{2 \cdot 32} = \sqrt{64} = 8, \qquad \sqrt{8 \cdot 32} = \sqrt{256} = 16$$

celá čísla jsou.

Poznámky:
Většina řešení byla správná a obsahovala buď trojici ze vzorového řešení, nebo trojici 2, 8, 18. Část řešení také obsahovala pouze obecné řešení, taková řešení byla také správná. Největší záludností úlohy byla formulace *po dvou různá čísla*, kterou myslíme, že se žádná dvojice čísel nerovná, tj. $a \neq b$, $b \neq c$ a zároveň $a \neq c$. *(Hedvika Ranošová)*

Úloha 2.

Spočtěte hodnotu výrazu

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$$

(Radek Olšák)

Řešení:
Využijeme, že platí $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$. Výraz lze tedy upravit:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} =$$

$$= \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right) \cdot \left(2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)}.$$

V poslední odmocnině tak dostáváme součin tvaru $(a+b)\cdot(a-b)$, což lze dle vzorce pro rozdíl čtverců zapsat jako a^2-b^2, tedy

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^2}=$$
$$=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}.$$

Nyní lze opakovat stejný postup vždy na součin posledních dvou odmocnin:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\cdot\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{4-3}=\sqrt{1}=1.$$

Hodnota celého výrazu je tedy 1.

Poznámky:
Téměř všechna došlá řešení dospěla ke správnému výsledku. Někteří z vás zavedli substituci pro některý z výrazů. *(Klárka Grinerová)*

Úloha 3.

Daník na pololetním vysvědčení dostal samé jedničky. Z dlouhé chvíle si všechny své jedničky zapsal za sebe a ze získaného čísla (v desítkové soustavě) spočetl druhou odmocninu. Shodou okolností mu vyšlo celé číslo. Kolik mohl mít Daník předmětů? (Natália Bátorová)

Řešení:
Číslo 1 je druhou mocninou, teda $\sqrt{1}\in\mathbb{Z}$. Všetky ostatné čísla tvorené samými jednotkami možno zapísať ako $a=x\cdot 100+11$, pričom $x\in\{0,1,11,111,\dots\}$. Z toho vyplýva $a\equiv 3 \pmod 4$.[1]

Všimnime si, že ak $y\equiv 0 \pmod 4$ alebo $y\equiv 2 \pmod 4$, tak $y^2\equiv 0 \pmod 4$, a ak $y\equiv 1 \pmod 4$ alebo $y\equiv 3\equiv -1 \pmod 4$, tak $y^2\equiv 1 \pmod 4$. Takže ak a je druhou mocninou, potom musí $a\equiv 1 \pmod 4$ alebo $a\equiv 0 \pmod 4$, my však máme $a\equiv 3 \pmod 4$, z čoho plynie $\sqrt{a}\notin\mathbb{Z}$.

Daník mal teda len 1 predmet.

Poznámky:
Mnoho riešení postupovalo podobne ako vzorové. Niektorí riešitelia rozobrali všetky možné posledné a predposledné cifry čísla $\sqrt{a}$, či využili algoritmus odmocňovania. To viedlo väčšinou tiež k správnemu výsledku, no cesta bola dlhšia. *(Natália Bátorová)*

Úloha 4.

Jsou dána kladná racionální čísla p a q, pro něž je $\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$ rovněž racionální číslo. Dokažte, že také $\sqrt[3]{p}$ je racionální. (Josef Minařík)

Řešení:
Označme $r=\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$. Ze zadání víme, že $p,q,r\in\mathbb{Q}$. V řešení budeme využívat, že racionální čísla jsou uzavřená na sčítání, odčítání, násobení i dělení.

Nejprve spočtěme hodnotu

$$r^3=p+3\sqrt[3]{p^2q}+3\sqrt[3]{pq^2}+q$$

[1] Výraz $x\equiv y \pmod m$ znamená, že čísla x a y dávajú rovnaký zvyšok po delení číslom m.

a vyjádřeme
$$\sqrt[3]{pq} = \frac{r^3 - p - q}{3r}.$$
Na pravé straně máme samá racionální čísla (a víme, že nedělíme nulou, protože čísla ze zadání jsou kladná), tedy i výsledek musí být racionální, tedy $\sqrt[3]{pq} \in \mathbb{Q}$.

Dále můžeme vzít
$$r^2 = \sqrt[3]{p^2} + 2\sqrt[3]{pq} + \sqrt[3]{q^2}$$
a z toho vyjádřit $\sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{q^2} = r^2 - 2\sqrt[3]{pq} \in \mathbb{Q}$.

Nyní rozložme $p - q = \left(\sqrt[3]{p} - \sqrt[3]{q}\right)\left(\sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{pq} + \sqrt[3]{q^2}\right)$ a upravme na
$$\sqrt[3]{p} - \sqrt[3]{q} = \frac{p - q}{\sqrt[3]{p^2} + \sqrt[3]{pq} + \sqrt[3]{q^2}}.$$
Opět máme na pravé straně samá racionální čísla, a tedy $\sqrt[3]{p} - \sqrt[3]{q} \in \mathbb{Q}$.

Nakonec sečteme $r + \left(\sqrt[3]{p} - \sqrt[3]{q}\right) = 2\sqrt[3]{p}$, a proto
$$\sqrt[3]{p} = \frac{r + \left(\sqrt[3]{p} - \sqrt[3]{q}\right)}{2} \in \mathbb{Q},$$
jak jsme chtěli dokázat.

Poznámky:

Většina řešení postupovala podobným způsobem jako vzorové řešení a také využívala uzavřenosti $\mathbb{Q}$ na základní operace. *(Michal Töpfer)*

Úloha 5.

Najděte všechny dvojice reálných čísel x, y splňující
$$x^2 + y^2 + xy = 133,$$
$$x + y + \sqrt{xy} = 19.$$
(Filip Čermák)

Řešení:

První si uvědomíme, že $xy \geq 0$, neboť se součin v zadání vyskytuje pod odmocninou. Proto můžeme číslo xy odmocnit. Nyní upravme první rovnici:
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + xy &= 133, \\ x^2 + y^2 + 2xy - xy &= 133, \\ (x + y)^2 - xy &= 133, \\ (x + y + \sqrt{xy})(x + y - \sqrt{xy}) &= 133. \end{aligned}$$
Vidíme, že první závorka v poslední úpravě je stejná jako levá strana druhé rovnice zadání. Můžeme za ni dosadit 19 a získáme
$$19(x + y - \sqrt{xy}) = 133,$$
$$x + y - \sqrt{xy} = 7.$$
Sečtením rovnic $x + y + \sqrt{xy} = 19$ a $x + y - \sqrt{xy} = 7$ dostaneme $2(x + y) = 26$ neboli $x + y = 13$.

Dosazením součtu do druhé rovnice máme $13 + \sqrt{xy} = 19$ neboli $\sqrt{xy} = 6$, a proto $xy = 36$. Pokud nyní dosadíme $y = 13 - x$ do $xy = 36$, získáme kvadratickou rovnici
$$x(13 - x) = 36,$$
$$x^2 - 13x + 36 = 0,$$
$$(x - 4)(x - 9) = 0,$$
z čehož už dostáváme jasná řešení $(4, 9)$, $(9, 4)$. Nyní můžeme provést zkoušku a vidíme, že obě řešení skutečně vyhovují rovnicím ze zadání.

Poznámky:
Většina řešení, která dorazila, byla podobná vzorovému. Občas se stalo, že někdo umocnil rovnici, což je neekvivalentní úprava, a poté neudělal zkoušku či nestanovil podmínky. V takovém případě byl strhnut bod. Jinak se velké chyby neobjevily. *(Filip Čermák)*

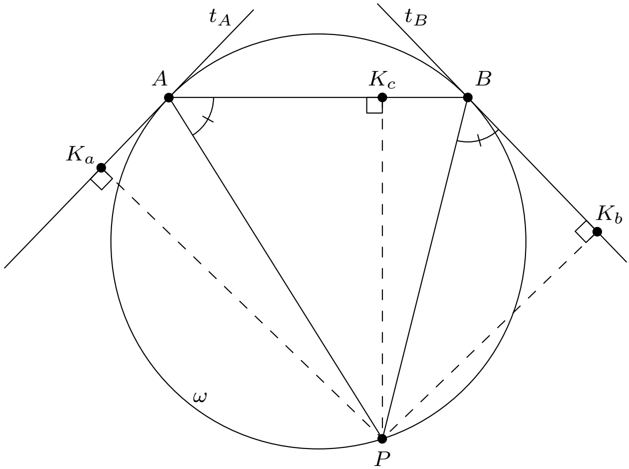
Úloha 6.

Na kružnici ω leží body A, B a P. Tečny k ω v bodech A, B pojmenujme po řadě t_A, t_B. Následně vzdálenosti bodu P od přímek t_A, t_B a AB označme po řadě a, b a c. Dokažte, že $c = \sqrt{ab}$.
(Magdaléna Mišinová)

Řešení:
Označme paty kolmic z bodu P na přímky t_A, t_B a AB postupně jako K_a, K_b a K_c. Dokážeme, že trojúhelník APK_c je podobný BPK_b. Protože u K_c a K_b jsou pravé úhly, stačí nám dokázat $|\sphericalangle PAK_c| = |\sphericalangle PBK_b|$. Orientovaně modulo 180° vyúhlíme, že $\sphericalangle(AP, AK_c) = \sphericalangle(BP, BK_b)$. Protože AK_cP je pravý úhel, bude PAK_c muset být ostrý úhel. Obdobně i úhel PBK_b bude ostrý, takže nám orientované úhlení opravdu dá rovnost neorientovaných úhlů. Díky úsekovému úhlu pak víme

$$\sphericalangle(AP, AK_c) = \sphericalangle(AP, AB) = \sphericalangle(BP, t_B) = \sphericalangle(BP, BK_b),$$

což jsme přesně chtěli orientovaně vyúhlit.



Nyní víme, že trojúhelníky APK_c a BPK_b jsou podobné. Analogicky dokážeme, že trojúhelníky BPK_c a APK_a jsou podobné. Dále máme $|PK_a| = a$, $|PK_b| = b$, $|PK_c| = c$, díky čemuž platí

$$\frac{c}{b} = \frac{|PK_c|}{|PK_b|} = \frac{|AP|}{|BP|} = \frac{|PK_a|}{|PK_c|} = \frac{a}{c},$$
$$c^2 = a \cdot b,$$
$$c = \sqrt{ab},$$

přesně jak jsme měli dokázat. Odmocnit jsme mohli, protože délky úseček jsou kladné.

Poznámky:
Většina došlých řešení byla víceméně správná. Hodně řešitelů zapomnělo rozebrat různé konfigurace, což vzorové řešení vyřešilo orientovaným úhlením. Body jsem sice nestrhávala, ale je dobré na to dávat pozor, například v olympiádě by to mohlo nějaký ten bod stát. *(Magdaléna Mišinová)*

Úloha 7.

V PraSestánu se nachází n měst, z nichž některé dvojice jsou spojené obousměrnými leteckými linkami. Pepovi se povedlo nalézt leteckou trasu mezi městy, během níž poletí ℓ-krát a zároveň se v žádném městě neocitne více než jednou. Potom Pepa společně s Radečkem odhalil pozoruhodnou skutečnost: vždy když si nějaké město označí jako start a jiné jako cíl, dovede každý z nich procestovat nějakou leteckou trasu ze startu do cíle tak, že žádné město kromě startu a cíle nebude navštíveno oběma. Dokažte, že Pepa si dovede naplánovat okružní výlet, při kterém poletí alespoň $\sqrt{2\ell}$-krát, vrátí se do města, z něhož vyrazil, a žádné jiné město nenavštíví více než jednou.

(Josef Minařík)

Řešení:

Přeformulujme úlohu do grafové podoby, města reprezentují vrcholy a letecké linky hrany grafu. V grafu existuje cesta délky ℓ a mezi každou dvojicí vrcholů existují dvě vrcholově disjunktní cesty. Dokážeme, že se v grafu nachází cyklus délky aspoň $\sqrt{2\ell}$.

Označme vrcholy cesty délky ℓ postupně $p_0, p_1, \ldots, p_\ell$. Ze zadání víme, že mezi p_0 a p_ℓ existují dvě disjunktní cesty, ty dohromady tvoří cyklus, označme jej C. Označme vrcholy, ve kterých se cyklus C a cesta protínají, jako $p_{i_0}, p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}$, kde $i_0 < i_1 < \cdots < i_k$. Můžeme si všimnout, že $i_0 = 0$ a $i_k = \ell$, protože tento cyklus určitě obsahuje vrcholy p_0 a p_ℓ. Vrcholy $p_{i_0}, \ldots, p_{i_k}$ nám cestu dělí na k úseků, nějaký z nich tedy musí mít délku aspoň $\frac{\ell}{k}$, označme jeho koncové vrcholy p_{i_j} a $p_{i_{j+1}}$. Vrcholy p_{i_j} a $p_{i_{j+1}}$ nám zároveň dělí cyklus C na dvě části. Alespoň jedna z těchto částí je tvořena cestou délky alespoň $\frac{k}{2}$, protože C obsahuje aspoň $k+1$ vrcholů. Delší část cyklu C dohromady s úsekem cesty $p_{i_j}, \ldots, p_{i_{j+1}}$ tvoří cyklus délky aspoň $\frac{\ell}{k} + \frac{k}{2}$, což můžeme podle AG nerovnosti odhadnout zdola jako $\sqrt{2\ell}$.

Poznámky:

Správná řešení postupovala podobně jako to vzorové. Někteří řešitelé ovšem argumentovali tím, že uváží cestu délky ℓ a tu k ní disjunktní, taktéž vedoucí mezi vrcholy p_0 a p_ℓ. To ovšem udělat nemůžeme, mezi p_0 a p_ℓ sice vedou dvě disjunktní cesty, ta délky ℓ ale nemusí být ani jedna z nich.

(Josef Minařík)

Úloha 8.

Majda položila na stůl dvacet po sobě jdoucích přirozených čísel. Dokažte, že Naty si z nich dovede vybrat číslo d takové, že pro libovolné přirozené číslo n platí nerovnost

$$n\sqrt{d} \cdot \left\{n\sqrt{d}\right\} \geq \frac{5}{2},$$

kde $\{x\}$ značí desetinnou část reálného čísla x, tedy to číslo z intervalu $\langle 0, 1)$, pro něž je $x - \{x\}$ celé číslo.

(Magdaléna Mišinová)

Řešení:

Uvažujme nejprve výraz $\left\{n\sqrt{d}\right\}$ obecně pro libovolná přirozená n, d. Dolní celou část $n\sqrt{d}$ označme $a = \left\lfloor n\sqrt{d}\right\rfloor$, potom z definice platí $\left\{n\sqrt{d}\right\} = n\sqrt{d} - a$. Rozšířením zlomku výrazem $n\sqrt{d} + a$ pak získáme

$$\left\{n\sqrt{d}\right\} = \frac{\left(n\sqrt{d} - a\right)\left(n\sqrt{d} + a\right)}{\left(n\sqrt{d} + a\right)} = \frac{n^2 d - a^2}{n\sqrt{d} + a}.$$

Dále použijeme odhad $a \leq n\sqrt{d}$, takže $n\sqrt{d} + a \leq 2n\sqrt{d}$, což nám v předchozím výrazu díky nezápornosti $n^2 d - a^2$ dá

$$\left\{n\sqrt{d}\right\} \geq \frac{n^2 d - a^2}{2n\sqrt{d}},$$

$$n\sqrt{d} \cdot \left\{n\sqrt{d}\right\} \geq \frac{n^2 d - a^2}{2}.$$

Levá strana je přesně výraz, který v úloze chceme odhadnout, takže pro vyřešení úlohy postačí nalézt d takové, že pro každé n bude platit $n^2d - a^2 \geq 5$, kde $a = \left\lfloor n\sqrt{d} \right\rfloor$.

Na stole leží 20 po sobě jdoucích čísel, takže každý zbytek modulo 20 bude zastoupen právě jednou. Nechť si Naty zvolí to d, které má zbytek 15 modulo 20, a ukažme, že tato volba docílí kýženého výsledku. Víme, že $a = \left\lfloor n\sqrt{d} \right\rfloor$ je nanejvýš $n\sqrt{d}$, takže kdyby $n^2d - a^2 \ngeq 5$, muselo by $n^2d - a^2$ být rovno jednomu z 0, 1, 2, 3 nebo 4. Postupně ukážeme, že žádná z těchto rovnic nemá pro $d \equiv 15 \pmod{20}$ řešení. Použijeme přitom kvadratické zbytky modulo 4 (ty jsou pouze 0 a 1) a modulo 5 (ty jsou 0, 1 a 4). Navíc naše volba $d \equiv 15 \pmod{20}$ přesně odpovídá dvojici vztahů $d \equiv 3 \pmod 4$ a $d \equiv 0 \pmod 5$. Rozebíráme tedy případy:

- $n^2d - a^2 = 0$. To by znamenalo, že n^2d je čtverec přirozeného čísla, takže i d je čtverec. Jenže $d \equiv 3 \pmod 4$, což není kvadratický zbytek. Tento případ tak nemůže nastat.
- $n^2d - a^2 = 1$. Potom $n^2d \equiv a^2 + 1 \pmod 4$. Bude-li n sudé, pak se z levé strany stane 0, takže $-1 \equiv 3$ by musel být kvadratický zbytek, což není. Takže n je liché, pak $n^2 \equiv 1$ a získáme $a^2 + 1 \equiv d \equiv 3 \pmod 4$. To ale znamená $a^2 \equiv 2 \pmod 4$, což opět není kvadratický zbytek, takže tento případ nemůže nastat.
- $n^2d - a^2 = 2$. Máme $d \equiv 0 \pmod 5$, takže potom $a^2 \equiv -2 \equiv 3 \pmod 5$, což ale není kvadratický zbytek. Tento případ tak nemůže nastat.
- $n^2d - a^2 = 3$. Opět modulo 5 získáme $a^2 \equiv -3 \equiv 2 \pmod 5$, což není kvadratický zbytek. Tento případ tak nemůže nastat.
- $n^2d - a^2 = 4$. Pro liché n bychom modulo 4 získali $a^2 \equiv n^2d \equiv d \equiv 3 \pmod 4$, což nelze, takže n je sudé. Jenže pak musí i a být sudé. Zapíšeme tedy $n = 2m$, $a = 2b$, čímž získáme

  $$\begin{aligned} 4m^2d - 4b^2 &= 4, \\ m^2d - b^2 &= 1, \end{aligned}$$

  což je až na přejmenování proměnných případ $n^2d - a^2 = 1$, který jsme už vyloučili. Takže ani toto nemůže nastat.

Dohromady tedy bude muset být $n^2d - a^2 \geq 5$, což jsme přesně chtěli dokázat.

Poznámky:

Úloha byla těžká, vyžadovala několik v podstatě nezávislých myšlenek: vhodně odhadnout desetinnou část odmocniny, vyloučit malé hodnoty $n^2d - a^2$ případ po případu pomocí kvadratických zbytků a v neposlední řadě správně zvolit d. Nepřišlo mnoho řešení, ale většina z nich postupovala podobným směrem jako vzorák. Řešitelé občas použili o něco méně elegantní odhady, avšak i s ošklivějšími vzniknuvšími nerovnostmi se úspěšně popasovali.

Lze si také povšimnout, že modulo 4 vyloučí i případ $n^2d - a^2 = 5$, takže konstantu $\frac{5}{2}$ by šlo zvětšit na 3 a tvrzení úlohy by stále platilo. *(Matěj Doležálek)*

Matematická indukce 3

3. seriálová série Vzorové řešení

Úloha 1.

Nechť d je největší společný dělitel přirozených čísel m_1 a m_2. Dokažte, že pokud je n přirozené číslo různé od nuly, je nd největším společným dělitelem čísel nm_1 a nm_2. V důkazu vycházejte jen z definic a tvrzení ze seriálu. *(Kateřina Panešová)*

Řešení:
Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $m_1 \geq m_2$. Pokud jsou obě čísla nulová, platí

$$\mathrm{NSD}(nm_1, nm_2) = \mathrm{NSD}(0,0) = 0 = n \cdot \mathrm{NSD}(0,0) = n \cdot \mathrm{NSD}(m_1, m_2).$$

Poznamenejme, že $\mathrm{NSD}(0,0) = 0$ vyhovuje definici, neboť nula je společným dělitelem nuly s nulou a zároveň pro všechny další společné dělitele triviálně platí, že jsou děliteli nuly. Podobně vidíme, že je-li právě jedno z čísel nulové, BÚNO $m_1 \neq 0$ a $m_2 = 0$, obdržíme

$$\mathrm{NSD}(nm_1, 0) = nm_1 = n \cdot \mathrm{NSD}(m_1, 0).$$

Nadále předpokládejme, že m_1 a m_2 jsou obě nenulová. Všechny kroky Eukleidova algoritmu pro čísla m_1 a m_2 vynásobíme číslem n a upravíme, čímž získáme

$$\begin{aligned} nm_1 &= q_1(nm_2) + nr_1, \\ nm_2 &= q_2(nr_1) + nr_2, \\ nr_1 &= q_3(nr_2) + nr_3, \\ &\vdots \\ nr_i &= q_{i+2}(nr_{i+1}), \end{aligned}$$

kde $r_{i+2} = 0$ je první zbytek rovný nule, tedy $r_{i+1} = d$. Ukážeme, že toto je průběh Eukleidova algoritmu pro čísla nm_1 a nm_2. Díky tomu, že n je přirozené, platí $nr_1 < nm_2$ a $nr_{j+1} < nr_j$ pro každé $j > 0$. Z jednoznačnosti dělicího algoritmu v každém kroku pak plyne, že se vskutku jedná o Eukleidův algoritmus pro nm_1 a nm_2. Z toho už nutně

$$\mathrm{NSD}(nm_1, nm_2) = nr_{i+1} = nd,$$

jak jsme chtěli ukázat.

Poznámky:
S úlohou si vesměs všichni řešitelé poradili velmi dobře. Někteří zapomněli zmínit jednoznačnost dělicího algoritmu a nerovnosti pro zbytky. *(Kateřina Panešová)*

Úloha 2.

Ukažte, že pro kladná celá čísla a, b platí rovnost

$$\mathrm{NSD}\left(2^a - 1,\ 2^b - 1\right) = 2^{\mathrm{NSD}(a,b)} - 1,$$

kde $\mathrm{NSD}(x, y)$ *je největší společný dělitel čísel x, y.* *(Kateřina Panešová)*

Řešení:
BÚNO nechť $a \geq b$, pak v Eukleidově algoritmu nalezneme čísla q a r taková, že $a = qb + r$ a $r < b$. V exponentech provedeme analogii Eukleidova algoritmu:

$$\begin{aligned} 2^a - 1 &= 2^{qb+r} - 1 \\ &= 2^{qb+r} - 2^r + 2^r - 1 \\ &= 2^r \left(2^{qb} - 1\right) + 2^r - 1 \\ &= 2^r \tilde{q} \left(2^b - 1\right) + 2^r - 1, \end{aligned}$$

kde $\tilde{q} = \sum_{k=0}^{q-1} 2^{bk}$. Protože $2^r - 1 < 2^b - 1$, je $2^r - 1$ zbytek po dělení $2^a - 1$ číslem $2^b - 1$.

Pokud do Eukleidova algoritmu vložíme $2^a - 1$ a $2^b - 1$, příslušné zbytky $\tilde{r}_i$ jsou rovny $2^{r_i} - 1$, kde r_i je zbytek v i-tém kroku v Eukleidově algoritmu při vstupu a a b. Oba algoritmy se také zastaví ve stejném kroku, neboť $\tilde{r}_{i+2} = 0 = 2^{r_{i+2}} - 1$, tedy $r_{i+2} = 0$, ale zároveň pokud $r_{i+2} = 0$, pak i $\tilde{r}_{i+2} = 2^0 - 1 = 0$. Předchozí zbytek

$$\tilde{r}_{i+1} = \mathrm{NSD}\left(2^a - 1,\ 2^b - 1\right),$$

zároveň ale

$$\tilde{r}_{i+1} = 2^{r_{i+1}} - 1 = 2^{\mathrm{NSD}(a,b)} - 1.$$

Spojením obou rovností je tvrzení dokázáno.

Poznámky:
Většina řešitelů se odvolala na Eukleidův algoritmus nebo si vystačila s dělitelností a definicí NSD. Oba přístupy jsou v pořádku. *(Hedvika Ranošová)*

Úloha 3.

Nechť a a b jsou kladná celá čísla. Definujme tento algoritmus.

Začneme s dvojicí (a, b). Dokud $a > 0$, budeme provádět následující krok:

(1) *Pokud $a < b$, pak dvojici (a, b) nahradíme dvojicí $(2a, b - a)$.*
(2) *Pokud $a \geq b$, pak dvojici (a, b) nahradíme dvojicí $(a - b, 2b)$.*

Pro jaké vstupní hodnoty se algoritmus po nějakém čase zastaví? *(Kateřina Panešová)*

Řešení:
Nechť $d = \mathrm{NSD}(a, b)$, $x = \frac{a}{d}$ a $y = \frac{b}{d}$. Ukážeme, že se náš algoritmus zastaví právě tehdy, je-li součet $x + y$ mocninou dvojky.

Nejprve si rozmyslíme, že se algoritmus zastaví pro dvojici (a, b), právě když se zastaví pro (x, y): snadnou indukcí ukážeme, že pokud po k krocích algoritmu z dvojice $(a, b) = (a_0, b_0)$ dostaneme čísla (a_k, b_k), tak po k krocích z $(x, y) = (x_0, y_0)$ dostaneme dvojici $(x_k, y_k) = \left(\frac{a_k}{d}, \frac{b_k}{d}\right)$, přičemž obě tato čísla jsou celá. Z toho vidíme, že je $a_k = 0$ ekvivalentní $x_k = 0$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}$, takže se oba algoritmy zastaví po stejném počtu kroků.

Zkoumejme tedy, kdy se algoritmus zastaví pro dvojici nesoudělných čísel (x, y). Zároveň si můžeme všimnout, že náš algoritmus zachovává součet $x + y$, takže je jeho zastavení ekvivalentní tomu, že po čase dospějeme do dvojice $(0, x + y)$.

Nyní indukcí dle počtu kroků ukážeme, že pro výstup algoritmu po k krocích (x_k, y_k) platí, že $\mathrm{NSD}(x_k, y_k)$ dělí 2^k: pro $k = 0$ tvrzení platí díky výše zmíněné nesoudělnosti x a y.

Pro indukční krok nám stačí ukázat, že $\mathrm{NSD}(x_k, y_k)$ dělí $2\,\mathrm{NSD}(x_{k-1}, y_{k-1})$. BÚNO předpokládejme, že platí $(x_k, y_k) = (2x_{k-1}, y_{k-1} - x_{k-1})$, symetrický případ se vyřeší analogicky. Z Eukleidova algoritmu máme $\mathrm{NSD}(x_{k-1}, y_{k-1}) = \mathrm{NSD}(x_{k-1}, y_{k-1} - x_{k-1})$, zároveň pro libovolná přirozená čísla m, n zjevně platí $\mathrm{NSD}(m, 2n) \mid 2\,\mathrm{NSD}(m, n)$, takže

$$\mathrm{NSD}(x_k, y_k) = \mathrm{NSD}(2x_{k-1}, y_{k-1} - x_{k-1}) \mid 2\,\mathrm{NSD}(x_{k-1}, y_{k-1} - x_{k-1}) = 2\,\mathrm{NSD}(x_{k-1}, y_{k-1}).$$

Tímto jsme tedy dokázali, že $\mathrm{NSD}(x_k, y_k)$ dělí 2^k.

Předpokládáme-li, že se algoritmus zastaví po n krocích, pak musí platit $(x_n, y_n) = (0, x + y)$ a $\mathrm{NSD}(x_n, y_n) = x + y$ musí být dělitelem mocniny dvojky neboli mocninou dvojky, takže uvedená podmínka je nutná.

Nyní předpokládejme, že začínáme ze dvojice nesoudělných čísel (x, y), která splňují $x + y = 2^n$ pro přirozené číslo n. Indukcí na n ukážeme, že se algoritmus po n krocích zastaví, takže je výše uvedená podmínka zároveň i postačující: pro $n = 1$ je jedinou vyhovující dvojicí $(1, 1)$, ze které algoritmus půjde do $(0, 2)$ a zastaví se.

Pro indukční krok si všimněme, že z nesoudělnosti musí pro $n > 1$ být x, y různá lichá čísla. Zároveň díky různosti můžeme ze symetrie BÚNO předpokládat $x < y$. Po prvním kroku se tedy algoritmus dostane do dvojice $(x_1, y_1) = (2x, y - x)$. Protože mají x a y stejnou paritu, je rozdíl $y - x$ sudý, takže $\left(\frac{x_1}{2}, \frac{y_1}{2}\right) = \left(x, \frac{y-x}{2}\right)$ je dvojicí přirozených čísel se součtem $x + \frac{y-x}{2} = 2^{n-1}$. Zároveň z výše odvozeného vztahu můžeme odvodit, že tato čísla budou nesoudělná, neboť

$$2\,\mathrm{NSD}\left(x, \frac{y - x}{2}\right) = \mathrm{NSD}(x_1, y_1) \mid 2\,\mathrm{NSD}(x, y) = 2.$$

Z indukčního předpokladu se tedy algoritmus z dvojice $\left(x, \frac{y-x}{2}\right)$ zastaví po $n - 1$ krocích, takže z původní dvojice (x, y) bude k zastavení zapotřebí $(n - 1) + 1 = n$ kroků, čímž je indukční krok dokončen a máme hotovo.

Poznámky:

Většina úspěšných řešení se vydala podobným směrem jako vzorové řešení. Několikrát se ale objevila i řešení, která přímo indukcí dle n dokázala, pro které dvojice se algoritmus zastaví po n krocích. Taková řešení jsou možná o trochu přímočařejší, ale obsahovala několik ne moc pěkných výpočtů. Nejčastější chybou bylo, že nebylo ukázáno, že podmínka $x + y = 2^n$ je nutná, nýbrž pouze že se pro takové dvojice čísel algoritmus zastaví. Podle toho, jak jednoduché bylo z uvedeného postupu důkaz dokončit, jsem za to strhával dva až tři body. *(Danil Koževnikov)*

Finální myš-maš

4. JARNÍ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

(a) *Michal namaloval nedegenerovaný trojúhelník ABC s délkami stran $a \le b \le c$. Všiml si, že tři štětce, které použil, mají přesně délky jednotlivých výšek v trojúhelníku ABC. Když se však z těchto štětců pokusil složit nedegenerovaný trojúhelník, zjistil, že to nejde. Dokažte, že pak už musí platit nerovnost $b^2 > ac$.* *(Matěj Doležálek)*

(b) *Malíř Dláža namaloval pravidelný $(2n+1)$-úhelník. Malířky Klátra a Klárka hrají hru, při níž se střídají v tazích a Klátra začíná. Ve svém tahu namalují dosud nenamalovanou úhlopříčku $(2n+1)$-úhelníku, která protne sudý počet již namalovaných úhlopříček ve vnitřních bodech. Malířka, která nemůže táhnout, prohrává. Zjistěte v závislosti na n, kdo má vyhrávající strategii.*

(Josef Minařík)

ŘEŠENÍ:

(a) Označme délky výšek našeho trojúhelníka v_a, v_b, v_c. Ze vzorce pro obsah trojúhelníka máme

$$S = \frac{1}{2}av_a = \frac{1}{2}bv_b = \frac{1}{2}cv_c,$$

což nám dává

$$v_c \le v_b \le v_a.$$

Jestliže z výšek nelze postavit nedegenerovaný trojúhelník, musí porušovat trojúhelníkovou nerovnost. Jediná nerovnost, která by mohla být porušena, je ta pro nejdelší výšku, tedy

$$v_a \ge v_b + v_c.$$

Dosaďme vztah pro obsah do předchozí nerovnosti

$$\begin{aligned} \frac{2S}{a} &\ge \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c}, \\ \frac{1}{a} &\ge \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \\ bc &\ge ac + ab, \\ b(c-a) &\ge ac. \end{aligned}$$

Teď už jsme ale téměř hotovi, protože podle trojúhelníkové nerovnosti v ABC platí

$$\begin{aligned} a + b &> c, \\ b &> c - a, \end{aligned}$$

a proto

$$b^2 > b(c-a) \ge ac.$$

(b) Ukážeme, že nezávisle na tom, jak Klátra a Klárka hrají, bude na konci hry zbývat sudý počet nenamalovaných úhlopříček. Pro spor tedy předpokládejme, že je nenamalovaných úhlopříček lichý počet a už není možné táhnout.

V této situaci každou nenamalovanou úhlopříčku protíná lichý počet těch již namalovaných. Nechť XY je libovolná nenamalovaná úhlopříčka. XY dělí mnohoúhelník na dvě části, označíme-li počty vrcholů v jednotlivých částech jako a a b, platí $a + b = 2n - 1$. Součet $a + b$ je lichý, což znamená, že právě jedno z čísel a a b je sudé, takže součin ab je také sudý. Úhlopříčku XY tedy protíná sudý počet úhlopříček, z nichž je lichý počet namalovaných. Počet nenamalovaných úhlopříček protínajících XY proto musí být lichý.

Úhlopříčku XY jsme mohli zvolit libovolně, takže každá nenamalovaná úhlopříčka protíná lichý počet nenamalovaných úhlopříček. Teď už si jen stačí vzpomenout na třetí úlohu první jarní série! Uvažme počet protnutí nenamalované úhlopříčky se zbylými nenamalovanými úhlopříčkami a sečtěme tyto počty. Musí nám vyjít dvojnásobek počtu dvojic protínajících se úhlopříček (tj. sudé číslo), ale určili jsme, že sčítáme lichý počet lichých čísel, což sudé být nemůže, čímž dostáváme spor.

Dokázali jsme, že na konci hry bude zbývat sudý počet nenamalovaných úhlopříček. Celkový počet úhlopříček v $(2n + 1)$-úhelníku je $(2n + 1)(n - 1)$, takže je sudý právě tehdy, když je n liché. Pro sudé n tedy vyhraje Klátra a pro liché n Klárka. Přitom vůbec nezáleží na tom, jak Klátra a Klárka hrají.

Poznámky:
První úlohu řešili téměř všichni stejně, ale našlo se i několik řešení, která nerovnost dokázala s pomocí trochy goniometrie.

Alternativní řešení druhé úlohy se dívá na paritu počtu možných tahů v každé pozici. Tato parita se totiž každým tahem změní, takže dojdeme ke stejnému závěru jako ve vzorovém řešení.

(Josef Minařík)

Úloha 2.

(a) *Dokažte, že pro každé přirozené číslo n má n^2 více dělitelů dávajících zbytek 1 po dělení čtyřmi než dělitelů dávajících zbytek 3 po dělení čtyřmi.* *(Josef Minařík)*

(b) *Nechť $n \geq 2$ a uvažujme kladná reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ splňující*

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Ukažte, že platí $\max(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq 4\min(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. *(Pavel Hudec)*

Řešení:
(a) Postupujme matematickou indukcí dle počtu rozdílných prvočísel dělících n. Je-li tento počet nulový, tj. není-li n dělitelné žádným prvočíslem, pak $n = 1$, a proto má n^2 jediného dělitele, kterým je číslo 1, tedy tvrzení ze zadání platí.

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro přirozené číslo n, a ukažme, že pak platí i pro přirozené číslo $x = n \cdot p^a$, kde p je prvočíslo nesoudělné s n. Označíme-li počty dělitelů čísla n^2 dávajících po dělení čtyřmi zbytek 1 jako j a počet dělitelů dávajících zbytek 3 jako t, můžeme indukční předpoklad zapsat ve tvaru $j > t$. Umocněním x získáme $x^2 = n^2 \cdot p^{2a}$, z čehož vidíme, že dělitelé čísla x^2 jsou právě dělitelé čísla n^2 vynásobení nějakou (nezápornou) mocninou prvočísla p.

Nyní rozebereme několik případů v závislosti na tom, jaký dává p zbytek po dělení čtyřmi.

(1) Nechť je $p \equiv 1 \pmod 4$. Vynásobíme-li libovolného dělitele čísla n^2 nějakou mocninou prvočísla p, nezmění se jeho zbytek po dělení čtyřmi, proto je počet dělitelů čísla $n^2 \cdot p^{2a}$, kteří dávají zbytek 1, roven $j \cdot (2a+1)$. Počet dělitelů, kteří dávají zbytek 3, bude $t \cdot (2a+1)$, aplikací indukčního předpokladu dostáváme $j \cdot (2a + 1) > t \cdot (2a + 1)$, čímž jsme v tomto případě hotovi.

(2) V případě $p = 2$ má číslo $x^2 = n^2 \cdot p^{2a}$ stejný počet dělitelů dávajících zbytek 1 a 3 jako číslo n^2, protože pro libovolné kladné a je p^{2a} sudé číslo, tedy přenásobením p^{2a} už nedostaneme číslo se zbytkem 1 nebo 3.

(3) Nakonec nechť $p \equiv 3 \pmod 4$, pak sudé mocniny prvočísla p dávají zbytek 1 a liché zbytek 3. Uvažme složené číslo xy dávající zbytek 1 mod 4, pak každý dělitel xy je tvaru $x'y'$, kde x' je liché, $x' \mid x$, $y' \mid y$ a $x' \equiv y' \pmod 4$. Abychom získali zbytek 1, stačí nám spárovat činitele se stejným zbytkem modulo 4, tj. j dělitelů n se sudými mocninami a t dělitelů n s lichými mocninami. Tudíž počet dělitelů čísla $x^2 = n^2 \cdot p^{2a}$ se zbytkem 1 je $j \cdot (a+1) + t \cdot a$ a symetricky těch, které dávají zbytek tři, je $t \cdot (a+1) + j \cdot a$. Platí

$$(j \cdot (a+1) + t \cdot a) - t \cdot (a+1) + j \cdot a = j - t.$$

Z indukčního předpokladu potom vyvodíme, že jde o rovnost kladných čísel, a proto má x^2 více dělitelů dávajících zbytek 1 než zbytek 3.

Platí základní i indukční krok, čímž je indukce dokázána a podúloha hotova.

(b) Označme $m = \min(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a $M = \max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Chceme ukázat, že potom platí $M \leq 4m$. Postupujme sporem: předpokládejme, že platí $M > 4m$. BÚNO nechť $m = a_{n-1}$, $M = a_n$. Potom označme

$$V = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right),$$

úpravou

$$V = \left(M + m + \sum_{i=1}^{n-2} a_i\right)\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{a_i}\right).$$

Roznásobením závorek získáme

$$V = 2 + \frac{M}{m} + \frac{m}{M} + \sum_{i=1}^{n-2}\left(\frac{M}{a_i} + \frac{m}{a_i} + \frac{a_i}{M} + \frac{a_i}{m}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n-2} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{a_i}\right).$$

Výraz $\left(\sum_{i=1}^{n-2} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{a_i}\right)$ lze odhadnout zespodu Cauchy-Schwarzovou nerovností, dostáváme

$$\left(\sum_{i=1}^{n-2} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{a_i}\right) \geq (n-2)^2.$$

Nyní odhadněme zdola součet $\frac{M}{m} + \frac{m}{M}$. Nejprve ukážeme, že funkce $f(x) = x + \frac{1}{x}$ je na intervalu $(1, \infty)$ rostoucí. Uvažme libovolné $y > x > 1$, potom platí

$$(x - y)\left(1 - \frac{1}{xy}\right) < 0,$$

jednoduchou úpravou dostaneme

$$f(x) = x + \frac{1}{x} < y + \frac{1}{y} = f(y),$$

což znamená, že funkce f je skutečně rostoucí.

Z monotonie funkce $x + \frac{1}{x}$ vidíme, že výraz $\frac{M}{m} + \frac{m}{M}$ bude minimální, když bude minimální $\frac{M}{m}$, tedy (z předpokladu) v hraničním případě $\frac{M}{m} = 4$. Dosazením dostáváme

$$\frac{M}{m} + \frac{m}{M} > \frac{17}{4}.$$

Zatím tedy máme

$$V > \frac{25}{4} + (n-2)^2 + \sum_{i=1}^{n-2} \left(\frac{M}{a_i} + \frac{a_i}{M} + \frac{m}{a_i} + \frac{a_i}{m} \right).$$

Zbývá nám už jen zdola omezit součet napravo. Pro všechna i, kde $1 \le i \le n-2$, dokážeme nerovnost $\frac{M}{a_i} + \frac{a_i}{M} + \frac{m}{a_i} + \frac{a_i}{m} \ge 5$: tu získáme pomocí

$$\frac{M}{a_i} + \frac{a_i}{M} + \frac{m}{a_i} + \frac{a_i}{m} = \left(\frac{M}{a_i} + \frac{a_i}{m} \right) + \left(\frac{a_i}{M} + \frac{m}{a_i} \right) \ge 2\sqrt{\frac{M}{m}} + 2\sqrt{\frac{m}{M}} \ge$$
$$\ge 2 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 5,$$

kde první nerovnost je dvojí použití AG nerovnosti. Druhá nerovnost plyne z rostoucnosti funkce $x + \frac{1}{x}$ pro $x > 1$: z předpokladu máme $M > 4m$, úpravou $\frac{M}{m} > 4$, tudíž platí $\sqrt{\frac{M}{m}} > 2$, a proto musí být $\sqrt{\frac{M}{m}} + \sqrt{\frac{m}{M}} \ge 2 + \frac{1}{2}$.

Dostáváme tedy

$$\sum_{i=1}^{n-2} \left(\frac{M}{a_i} + \frac{a_i}{M} + \frac{m}{a_i} + \frac{a_i}{m} \right) \ge 5(n-2).$$

V kombinaci s předešlými odhady získáme

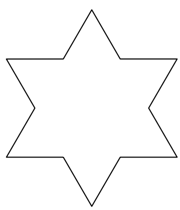
$$V > \frac{25}{4} + (n-2)^2 + 5(n-2) = n^2 - 4n + 5n + \frac{25}{4} + 4 - 10 = n^2 + n - \frac{1}{4} = \left(n - \frac{1}{2} \right)^2,$$

čímž jsme se dostali do sporu, a proto nerovnost $M \le 4m$ opravdu platí. Jinými slovy jsme právě dokázali $\max(a_1, a_2, \ldots, a_n) \le 4 \min(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Poznámky:
Většina řešitelů řešila pouze podúlohu (a). Velká část přijatých řešení správně určila, jak se mění zbytek po dělení čtyřmi při součinu více čísel. Indukcí dokazovalo tuto úlohu minimum řešitelů, častější způsob řešení byl pomocí párování prvočísel. Podúlohu (b) měla správně vypracovanou cca čtvrtina přijatých řešení. *(Terka Kučerová)*

Úloha 3.

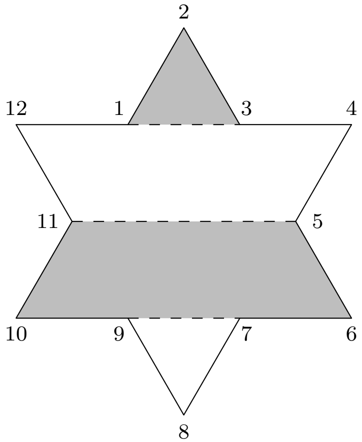
(a) *Rozdělte pravidelnou šesticípou hvězdu třemi rovnými řezy na čtyři části, ze kterých je možné složit konvexní mnohoúhelník. Šesticípá hvězda je tvořena šestiúhelníkem, nad jehož stranami jsou rovnostranné trojúhelníky.* *(Josef Minařík)*



(b) *Mějme ne nutně konvexní osmiúhelník $ABCDEFGH$ se všemi stranami stejně dlouhými takový, že $ACEG$ je rovnoběžník, body B, D leží uvnitř $ACEG$ a body F, H venku. Dokažte, že body B, D, F a H leží na jedné kružnici.* *(Radek Olšák)*

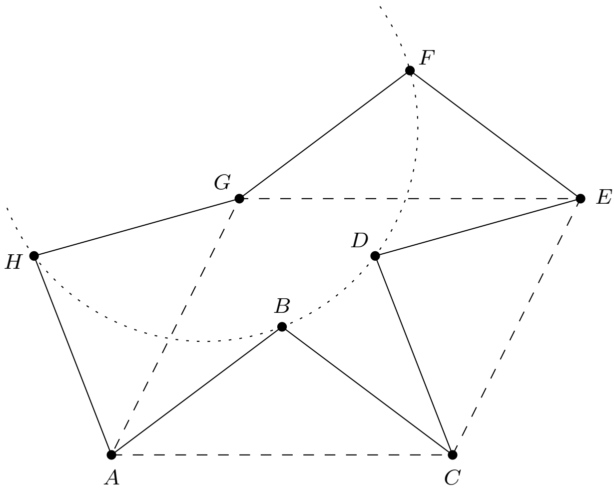
Řešení:

(a) Nejprve si očíslujeme vrcholy postupně od 1 do 12, kde jedna 1 je vrchol původního šestiúhelníku. Vedeme následující řezy mezi body 1 a 3, 5 a 11, 7 a 9. Získáme tak dva rovnostranné trojúhelníky a dva „hady“ tvořené pěti rovnostrannými trojúhelníky v řadě. Nyní jen vše dáme za sebe a vytvoříme „hada“ tvořeného dvanácti rovnostrannými trojúhelníky.



(b) (podle Daniely Strnadové)

Dokážeme, že $\sphericalangle DBH + \sphericalangle DFH = \sphericalangle BDF + \sphericalangle BHF$. Součet úhlů v čtyřúhelníku je 360°, proto $\sphericalangle DBH + \sphericalangle DFH = \sphericalangle BDF + \sphericalangle BHF = 180°$, a čtyřúhelník $BDFH$ bude tedy tětivový, což chceme ukázat.



Prvně si vyjádřeme úhly pomocí jiných, se kterými se nám bude lépe pracovat:

$$\sphericalangle DBH = 360° - \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABH - \sphericalangle CBD,$$
$$\sphericalangle BDF = 360° - \sphericalangle CDE - \sphericalangle BDC - \sphericalangle EDF.$$

U vyjádření úhlu DFH si musíme dát pozor na to, že vnitřní úhel osmiúhelníku u vrcholu G může, ale i nemusí být konvexní. Chceme-li tedy vyjádřit úhel DFH pomocí GFH, budeme ho v konvexním případě odečítat a v nekonvexním přičítat, tedy

$$\sphericalangle DFH = \sphericalangle EFG \mp \sphericalangle GFH - \sphericalangle EFD.$$

Analogickou úvahu provedeme i při vyjadřování úhlu BHF, tedy

$$\sphericalangle BHF = \sphericalangle AHG \mp \sphericalangle GHF - \sphericalangle AHB.$$

Oba úhly $\sphericalangle GFH$, $\sphericalangle GHF$ přičítáme, pokud je úhel u G nekonvexní, a odečítáme, pokud je konvexní. Znaménko u nich je proto stejné.

Dosazením všech čtyř rovností do $\sphericalangle DBH + \sphericalangle DFH = \sphericalangle BDF + \sphericalangle BHF$ zjistíme, že chceme dokázat

$$\begin{aligned} 360^\circ - \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABH - \sphericalangle CBD + \sphericalangle EFG \mp \sphericalangle GHF - \sphericalangle EFD = \\ = 360^\circ - \sphericalangle CDE - \sphericalangle BDC - \sphericalangle EDF + \sphericalangle AHG \mp \sphericalangle GFH - \sphericalangle AHB. \end{aligned}$$

Nyní si všimneme, že trojúhelníky ABH, CBD, GHF a EFD jsou rovnoramenné. Platí tedy

$$\begin{aligned} \sphericalangle ABH &= \sphericalangle AHB, \\ \sphericalangle CBD &= \sphericalangle BDC, \\ \sphericalangle GFH &= \sphericalangle GHF, \\ \sphericalangle EDF &= \sphericalangle EFD. \end{aligned}$$

Odečtením těchto shodných úhlů v dokazované rovnosti dostaneme

$$-\sphericalangle ABC + \sphericalangle EFG = -\sphericalangle CDE + \sphericalangle AHG.$$

Trojúhelníky ACB a GEF jsou shodné, protože jejich ramena mají stejnou délku a jejich základny jsou protější strany rovnoběžníku. Proto platí $-\sphericalangle ABC + \sphericalangle EFG = 0^\circ$. Analogicky ukážeme $-\sphericalangle CDE + \sphericalangle AHG = 0^\circ$.

Všechny úpravy byly ekvivalentní, platí tedy dokazovaná rovnost

$$\sphericalangle DBH + \sphericalangle DFH = \sphericalangle BDF + \sphericalangle BHF.$$

Poznámky:

V části (a) se sešlo vícero různých rozřezání hvězdy, způsob uvedený ve vzorovém řešení je jen jedním z mnoha. V části (b) mohly různé konfigurace obrázku vést k trochu jiným podobám úhlení, které však v řešení nečinily podstatný rozdíl. *(Vojta „Dláža“ Gaďurek)*

Úloha 4.

(a) *Budiž P polynom s celočíselnými koeficienty splňující $P(-2) = P(2) = 2$. Ukažte, že P nemá celočíselný kořen.* *(Lenka Kopfová)*

(b) *Budiž P polynom s celočíselnými koeficienty, jehož každý komplexní kořen je celé číslo a který splňuje $P(0) = 1$, $P(5) = 3456$. Jaký nejmenší stupeň může mít P?* *(Radek Olšák)*

Řešení:

(a) Pro spor předpokládejme, že existuje celé číslo z splňující $P(z) = 0$. Pro každá $a, b \in \mathbb{Z}$ platí

$$a - b \mid P(a) - P(b),$$

tedy $z - 2 \mid -2$ a $z + 2 \mid -2$, obě čísla jsou tedy děliteli -2. Čísla $z + 2$ a $z - 2$ proto patří do množiny $\{-2, -1, 1, 2\}$ a zároveň jejich rozdíl je $z + 2 - (z - 2) = 4$, nutně tedy $z - 2 = -2$ a $z + 2 = 2$, pročež $z = 0$.

Protože nula je kořen P, existuje celočíselný polynom Q splňující $P(x) = x \cdot Q(x)$. Potom

$$\begin{aligned} 2 &= P(2) = 2 \cdot Q(2), \\ 2 &= P(-2) = (-2) \cdot Q(-2), \end{aligned}$$

můžeme tak určit $Q(2) = 1$ a $Q(-2) = -1$. Z výše zmíněné dělitelnosti ale dostáváme

$$2 - (-2) \mid Q(2) - Q(-2),$$

což můžeme upravit na $4 \mid 2$, a to je spor. Polynom P tedy nemá celočíselný kořen.

(b) Polynom zřejmě není konstantní, existují proto přirozené číslo n, celá čísla $z_1, \ldots, z_n$ (kořeny) a číslo $a_n \neq 0$ (vedoucí koeficient) taková, že

$$P(x) = a_n(x - z_1) \cdots (x - z_n).$$

Dosadíme-li $x = 0$, dostaneme $1 = P(0) = a_n(-z_1) \cdots (-z_n)$, všechny kořeny i vedoucí koeficient pak budou rovny buď 1, nebo -1. Pro $x = 5$ budou všechny závorky rovny buď čtyřem, nebo šesti. Pokud by stupeň P byl nejvýše 4, pak

$$P(5) \leq 6^4 = 1296 < 3456.$$

Naopak pokud položíme $P(x) = (x-1)(x-1)(x+1)(x+1)(x+1)$, platí $P(0) = 1$ a $P(5) = 4^2 6^3 = 3456$. Nejmenší možný stupeň polynomu P je tedy pět.

Poznámky:

Většina řešení postupovala stejně jako vzorové. K drobnému zmatení docházelo v části (b): mezi komplexní čísla počítáme i reálná čísla, a proto polynom $P(x) = 691x + 1$ nevyhovuje zadání, neboť $-\frac{1}{691}$ sice je kořen $P(x)$, ale není celé číslo. *(Hedvika Ranošová)*

Úloha 5.

(a) *Najděte všechny trojice reálných čísel (x, y, z), jež splňují soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} xy &= z - x - y, \\ yz &= x - y - z, \\ zx &= y - z - x. \end{aligned}$$

(Václav Janáček)

(b) *Daník našel v lese n-tici kartiček s přirozenými čísly $x_1, \ldots, x_n$, jejichž součet je $2n - 1$. Tyto kartičky potom rozdělil na dvě hromádky A a B se součty po řadě S_A a S_B. V závislosti na hodnotách čísel $x_1, \ldots, x_n$ určete, jaké nejvyšší hodnoty mohl dosáhnout výraz $S_A \cdot S_B$.*

(Matěj Doležálek)

Řešení:

(a) Odečtením druhé rovnice od první dostáváme

$$y(x-z) = xy - yz = 2(z-x),$$

což můžeme upravit na tvar

$$(y+2)(x-z) = 0,$$

tedy nutně $y = -2$ nebo $x = z$. Protože soustava rovnic ze zadání je symetrická, mohli bychom podobně dostat také to, že platí $x = -2$ nebo $y = z$, a taktéž $z = -2$ nebo $x = y$. Máme dohromady osm možností, jak mohou tyto tři volby dopadnout. Zkusíme si je rozebrat na dva případy.

Pokud alespoň dvakrát ze tří voleb nastane rovnost proměnných (třeba $x = y$ a $y = z$), pak už nutně $x = y = z$. To můžeme dosadit do první rovnice a dostat tak $x^2 = -x$. Po úpravě obdržíme $x(x+1) = 0$, takže $x = 0$ nebo $x = -1$. Dostáváme tedy dvě řešení $(x,y,z) = (0,0,0)$ a $(x,y,z) = (-1,-1,-1)$.

Zbývá možnost, kdy alespoň dvakrát ze tří voleb nastane rovnost proměnné s -2. BÚNO nechť $x = y = -2$. Dosazením do první rovnice ze zadání dostáváme

$$4 = (-2)(-2) = z - (-2) - (-2) = z + 4,$$

takže $z = 0$. Dostáváme tak řešení $(x,y,z) = (-2,-2,0)$, analogicky z $y = z = -2$ a $z = x = -2$ vzejdou řešení $(-2,0,-2)$ a $(0,-2,-2)$.

Celkově jsme tedy dostali pět různých řešení $(0,0,0)$, $(-1,-1,-1)$, $(-2,-2,0)$, $(-2,0,-2)$ a $(0,-2,-2)$. O tom, že tato řešení skutečně splňují zadání, se přesvědčíme zkouškou.

(b) Nejprve dokážeme, že čím blíž budou S_A, S_B k polovině jejich součtu, tím většího součinu dosáhneme. K tomu označme $k = \frac{2n-1}{2}$. Pak platí, že $S_A = k + a$ a $S_B = k - a$ pro nějaké vhodné reálné číslo a. Z toho

$$S_A \cdot S_B = (k+a)(k-a) = k^2 - a^2,$$

takže $S_A \cdot S_B$ je skutečně tím větší, čím blíž je S_A k číslu k. Jelikož S_A, S_B jsou přirozená čísla, tak bychom se nejblíže k $\frac{2n-1}{2}$ mohli dostat, pokud by $S_A = n$ a $S_B = n-1$ (nebo naopak). Dále proto dokážeme, že tohoto rozdělení lze vždy dosáhnout, ať už jsou hodnoty na kartách jakékoli. Budeme tedy chtít říct, že z n-tice přirozených čísel se součtem $2n-1$ umíme vždy vybrat podmnožinu se součtem n. Ukážeme dva různé způsoby, jak toto dokázat.

(1) BÚNO předpokládejme $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$. Nejprve ukážeme, že na alespoň $x_1 - 1$ kartičkách musí být jednička. Označme počet jedniček jako J. Odložme stranou kartičku x_1 a daných J jedniček, potom nám zbude $n - J - 1$ kartiček, z nichž každá musí mít hodnotu alespoň 2. Umíme tudíž celkový součet na kartičkách, který je roven $2n-1$, zdola odhadnout jako $x_1 + J + 2(n-J-1)$. Úpravou nerovnosti

$$2n - 1 \geq x_1 + J + 2(n-J-1)$$

pak dostáváme $J \geq x_1 - 1$.

Představme si nyní, že si postupně odebíráme kartičky v pořadí podle jejich hodnot, od x_1 k těm s nižší hodnotou. Zastavme se ve chvíli, kdy bychom si měli vzít kartičku, kterou přestřelíme cílový součet n. Nechť má tato kartička, kterou si už nevezmeme, hodnotu x_i. V tento okamžik musí být součet dosud vybraných kartiček určitě alespoň $n - x_i + 1$, jinak bychom totiž mohli vzít x_i a nepřestřelit. Pokud je x_i jednička a jejím vzetím bychom přestřelili n, tak to znamená, že součet dosud vybraných karet musí být přesně n, tudíž máme vyhráno. Pokud je $x_i > 1$, víme, že existuje ještě alespoň $x_1 - 1 \geq x_i - 1$ jedniček, z nichž jsme si žádnou dosud nevzali. Můžeme si jich tak vzít ten správný počet, abychom dostali celkový součet n.

(2) Nejprve si uvědomíme, že součet libovolné neprázdné podmnožiny kartiček je alespoň 1 a nanejvýš $2n-1$. Jediné číslo v tomto rozsahu, které je násobkem n, je samotné n. Vyplatí se nám tedy na hodnoty kartiček koukat modulo n a snažit se najít podmnožinu se součtem $0 \pmod{n}$. Budeme uvažovat tzv. *prefixové součty* posloupnosti $x_1, \ldots, x_n$, což jsou hodnoty
$$S_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_i$$
pro $i = 1, \ldots, n$. Takovýchto součtů máme právě n. Pokud se mezi nimi nachází zbytek $S_i \equiv 0 \pmod{n}$, tak už jsme vyhráli, protože prvních i kartiček dá součet n. Pokud zde naopak zbytek 0 chybí, tak máme jen $n-1$ možných zbytků v n-tici čísel S_i, tudíž se nějaký zbytek musí zopakovat. Nastane tak $S_i \equiv S_j \pmod{n}$ pro nějaká $i < j$, načež budou kartičky $x_{i+1}, \ldots, x_j$ dávat součet $S_j - S_i \equiv 0 \pmod{n}$.

Oběma způsoby jsme tak dokázali, že umíme vybrat podmnožinu kartiček se součtem n, zbylé kartičky pak budou mít součet $n-1$. Součin těchto hodnot je $n^2 - n$ a výše jsme již ukázali, že toto je maximální hodnota výrazu $S_A \cdot S_B$, které můžeme dosáhnout.

Poznámky:
Většina došlých řešení podúlohy (a) byla správná. Daná soustava totiž šla vyřešit skoro jakkoliv: sečtení/odečtení dvou rovnic, vyjádření např. proměnné z z první rovnice a dosazení do zbylých, přičtení jedničky na obě strany a rozklad na součin – to všechno jsou způsoby, jimiž se soustava dala vyřešit. Některá řešení byla sice trochu více rozebírací, ale většinou zdárně vedla k cíli. Častým kamenem úrazu bylo opomenutí zkoušky po nalezení řešení. Takovýto nedostatek je opravdu jednoduchou cestou, jak v olympiádě smutně ztratit bod – přitom často stačí i jen zmínit, že zkouška funguje či že úpravy byly ekvivalentní. *(Lenka Kopfová)*

Úloha 6.

(a) *Najděte všechny dvojice přirozených čísel m, n takové, že $m^3 - n$ je násobkem $m^2 - n$, zatímco $n^3 - m$ je násobkem $n^2 - m$.* *(Marian Poljak)*

(b) *Nechť L je množina všech lichých přirozených čísel. Najděte všechny funkce f z L do L takové, že pro všechny dvojice $x, y \in L$ je $xy + 1$ násobkem $f(x) + f(y)$.* *(Matěj Doležálek)*

Řešení:
(a) Upravíme první dělitelnost ze zadání:
$$\begin{aligned} m^2 - n &\mid m^3 - n, \\ m^2 - n &\mid m^3 - n - m(m^2 - n) = mn - n. \end{aligned}$$

Z upravené dělitelnosti jsou vidět dvě možnosti: $mn - n = 0$, nebo $|m^2 - n| \leq |mn - n|$, ale zároveň jsou čísla m a n přirozená. Proto v prvním případě platí $m = 1$, z čehož nutně $m \leq n$. V druhém $mn - n = (m-1)n \geq 0$, takže musí platit
$$\begin{aligned} m^2 - n \leq |m^2 - n| \leq |mn - n| &= mn - n, \\ m^2 &\leq mn, \\ m &\leq n. \end{aligned}$$

Mohli jsme dělit číslem m, neboť je přirozené. V obou případech jsme došli k nerovnosti $m \leq n$. Zadání je v proměnných m a n symetrické, zcela obdobně proto dokážeme $n \leq m$, z čehož plyne $m = n$.

Nalezené řešení ověříme zkouškou:
$$m^2 - m = m(m-1) \mid m(m-1)(m+1) = m^3 - m,$$
tudíž $m = n$ opravdu vyhovuje zadání.

(b) Dokážeme, že jediná vyhovující funkce je $f(x) = 1$ pro všechna $x \in L$.

Nejprve do vztahu ze zadání za (x, y) dosadíme $(1, 1)$. Dostaneme $2f(1) \mid 2$. Protože $f(1) \in L$, už nutně $f(1) = 1$.

Nyní za (x, y) dosadíme postupně $(3, 1)$ a $(3, 3)$. Dostáváme $f(3) + 1 \mid 4$ a $2f(3) \mid 10$. Z první dělitelnosti zjistíme, že $f(3)$ je 1 nebo 3, z druhé pak, že $f(3)$ je 1 nebo 5. Tedy oběma dělitelnostem vyhovuje pouze $f(3) = 1$.

Postupným dosazením 1 a 3 za y dostaneme

$$f(x) + 1 \mid x + 1,$$
$$f(x) + 1 \mid 3x + 1,$$

z čehož vyplývá

$$f(x) + 1 \mid 3(x + 1) - (3x + 1) = 2.$$

Protože $f(x) \in L$, dostáváme $f(x) = 1$ pro všechna $x \in L$, jak jsme chtěli.

Zbývá ověřit, že tato funkce zadání opravdu vyhovuje. Pro všechna x a y z L platí $f(x)+f(y) = 2$ a zároveň je číslo $xy + 1$ sudé. Zadání je tím skutečně splněno.

Poznámky:
V první podúloze bylo nejčastější chybou opomenutí případu, kdy $mn - n = 0$. V druhé podúloze poměrně hodně řešitelů zapomnělo udělat zkoušku, což je důležitá část řešení. Proto jsem za to strhávala jeden bod. *(Magdaléna Mišinová)*

Úloha 7.

(a) *Je dána 2022-prvková množina M reálných čísel taková, že pro libovolná $a, b \in M$ je $a^2 + b\sqrt{2}$ racionální číslo. Dokažte, že pro každé $a \in M$ je rovněž $a\sqrt{2}$ racionální.* *(Magdaléna Mišinová)*

(b) *Kladná reálná čísla a, b, c splňují $abc = 1$. Dokažte, že platí*

$$\frac{1}{\sqrt{a + \frac{1}{b} + \frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{b + \frac{1}{c} + \frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{c + \frac{1}{a} + \frac{1}{2}}} \geq \sqrt{2}.$$

(Filip Čermák)

Řešení:
(a) Využijeme toho, že racionální čísla jsou uzavřená na sčítání, odčítání, násobení a dělení nenulovým číslem.

Zvolme dva různé prvky $a, b \in M$. Pak postupně dostaneme

$$a^2 + a\sqrt{2} \in \mathbb{Q}, \qquad (1)$$
$$b^2 + a\sqrt{2} \in \mathbb{Q}, \qquad (2)$$
$$a^2 + b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}, \qquad (3)$$
$$(1) - (2): \quad a^2 - b^2 \in \mathbb{Q}, \qquad (4)$$
$$(1) - (3): \quad (a - b)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}, \qquad (5)$$
$$\frac{2 \cdot (4)}{(5)}: \quad \frac{2(a^2 - b^2)}{(a - b)\sqrt{2}} = \frac{2(a + b)}{\sqrt{2}} = (a + b)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}, \qquad (6)$$
$$\frac{(5) + (6)}{2}: \quad a\sqrt{2} \in \mathbb{Q}. \qquad (7)$$

Jelikož jsme prvky a a b volili libovolně, platí poslední vztah pro každé $a \in M$.

(b) (PODLE MICHALA JANÍKA)
Využijeme klasickou substituci

$$a = \frac{x}{y}, \quad b = \frac{y}{z}, \quad c = \frac{z}{x},$$

kterou můžeme použít právě díky $abc = 1$. Pak dostaneme pro kladná reálná čísla x, y, z bez další podmínky cyklickou[2] nerovnost tvaru

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{\sqrt{a + \frac{1}{b} + \frac{1}{2}}} = \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{1}{2}}} = \sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{y}{x + z + \frac{y}{2}}} \geq \sqrt{2},$$

z čehož po vydělení konstanty $\sqrt{2}$ dostáváme nerovnost

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{y}{2x + 2z + y}} \geq 1.$$

Všimněme si, že nerovnost je homogenní, BÚNO tedy můžeme uvažovat, že platí $x + y + z = \frac{1}{2}$ (potom nutně $0 < x, y, z < \frac{1}{2}$). Nerovnost se tím zjednoduší na

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{y}{1 - y}} \geq 1.$$

Nyní dokažme, že pro $0 < x < \frac{1}{2}$ platí

$$\sqrt{\frac{x}{1 - x}} \geq 2x.$$

Jelikož jsou výrazy na obou stranách kladné, stačí dokázat, že $\dfrac{x}{1 - x} \geq 4x^2$. To lze ekvivalentně upravit na $1 \geq 4x(1 - x)$ a dále na

$$(2x - 1)^2 \geq 0.$$

Všechny úpravy byly díky kladnosti uvažovaných výrazů ekvivalentní, takže nerovnost platí, a dokonce vidíme, že rovnost by mohla nastat leda pro $x = \frac{1}{2}$.

V původní cyklické nerovnosti pak obdržíme

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{y}{1 - y}} \geq \sum_{\text{cyc}} 2y = 1,$$

přičemž rovnost nenastává, jelikož x, y, z jsou menší než $\frac{1}{2}$. Tím jsme hotovi.

POZNÁMKY:
Došlá řešení úlohy (a) byla zpravidla přímočará. Úlohu (b) mnoho lidí nevyřešilo, ačkoliv několik řešení bylo hezkých. V jednom řešení se ukázalo, že úlohu lze „umlátit“ i roznásobením, umocněním a pár snadnými odhady. *(„madam Verča“ Hladíková)*

[2] V zápisu cyklických sum zkracujeme $V(x, y, z) + V(y, z, x) + V(z, x, y)$ jako $\sum_{\text{cyc}} V(x, y, z)$.

Výsledky jarní části

	jméno	příjmení	r.	škola	1j	2j	3j	4j	2s	3s	celkem	hist.
1.	*Erik*	*Ježek*	0	ZŠŠvehlPH	25	25	24	35	15	15	**138,66**	139
2.	*Michal*	*Janík*	3	GKepleraPH	25	23	25	35	15	15	**137,61**	453
3.	*Jakub*	*Šošovička*	3	SG CEN BA	25	23	25	35	15	15	**137,42**	137
4.	*Jakub*	*Štepo*	3	GEBenešeKL	22	23	25	35	15	15	**134,84**	550
5.	*Ondřej*	*Lukeš*	3	SŠkybernHK	24	24	25	32	15	14	**133,08**	133
6.	*Matěj*	*Gajdoš*	4	GJatečníÚL	25	21	19	35	15	15	**130,00**	130
7.	*Jakub*	*Vlček*	3	G Příbor	21	18	19	26	14	14	**112,98**	320
8.	*Viktor*	*Gola*	1	MG Vsetín	23	22	19	24	9	13	**110,40**	110
9.	*David*	*Hromádka*	1	GNadAlejPH	19	22	22	25	7	13	**109,09**	109
10.	*Veronika*	*Menšíková*	0	ArcibisGPH	23	19	20	22	14	10	**109,07**	109
11.	*Štěpán*	*Varhaník*	2	G Chrudim	17	21	22	22	15	12	**107,84**	108
12.	*Anastasia*	*Bredikhina*	1	GKepleraPH	23	22	21	22	10	7	**105,10**	308
13.	*Ekaterina*	*Danilina*	3	GKepleraPH	23	20	21	20	10	10	**104,31**	273
14.	*Ivan*	*Žemlička*	1	GÚstavníPH	22	21	19	26	9	4	**101,93**	102
15.	*Samuel*	*Rosiar*	3	GKepleraPH	25	–	21	20	15	15	**95,45**	546
16.	*Veronika*	*Chovancová*	3	PiarGTn	20	20	17	18	15	4	**95,32**	408
17.	*Michal*	*Kuba*	3	GJPekařeMB	20	15	21	20	10	6	**93,10**	93
18.	*Martin*	*Fof*	4	MendelG OP	21	15	18	14	13	9	**90,44**	372
19.	*Jan Theodor*	*Hrdý*	1	G UherBrod	14	16	22	14	11	11	**88,67**	89
20.	*Jaromír*	*Potůček*	3	GKepleraPH	22	18	22	12	6	6	**85,03**	192
21.	*Helena*	*Muchová*	0	GKepleraPH	20	18	16	16	9	–	**80,86**	81
22.	*Eliška*	*Valentová*	3	GJWolkraPV	16	20	14	6	11	11	**78,78**	79
23.	*Patrik*	*Štencel*	1	MendelG OP	0	23	22	32	–	–	**77,55**	78
24.	*Daniela*	*Strnadová*	1	GJatečníÚL	9	16	18	15	7	7	**72,07**	180
25.	*František*	*Janošík*	2	MendelG OP	9	19	20	14	7	–	**69,58**	70
26.	*Dominik*	*Rigasz*	1	GJHroncaBA	–	10	22	28	–	9	**68,94**	69
27.	*Benedikt*	*Bareš*	4	G Dobruška	18	17	19	–	14	–	**67,61**	324
28.	*Ondrej*	*Králik*	1	GAlejKošic	19	18	20	9	–	–	**66,13**	66
29.	*Lenka*	*Poljaková*	2	GJŠkodyPŘ	15	17	20	9	–	–	**61,94**	318
30.	*Alica*	*Dományová*	2	G Gröss BA	17	9	–	15	7	–	**48,99**	49
31.	*Michal*	*Pecho*	4	SPŠDubnica	11	22	–	6	9	–	**47,41**	54
32.	*Martin*	*Šindelář*	2	G Gröss BA	12	13	12	9	–	–	**46,33**	177
33.	*Jan*	*Tregler*	2	GKepleraPH	21	11	12	–	–	–	**43,26**	43
34.	*Jakub*	*Černý*	4	GJNerudyPH	16	15	9	–	2	–	**42,00**	42
35.	*Thuc Anh*	*Leová*	0	GKepleraPH	13	8	12	7	–	–	**39,82**	40
36.	*Uršuľa Mária*	*Kossaczká*	2	G Gröss BA	–	15	13	10	–	–	**38,09**	38
37.	*Vít*	*Hanika*	3	GKepleraPH	8	6	12	8	–	–	**33,59**	266
38.	*Josef*	*Soural*	3	GBoskovice	20	–	–	–	13	–	**32,88**	33
39.	*Zdeněk*	*Pezlar*	4	GJarošeBO	17	1	–	–	12	–	**30,98**	617

40.	*Filip*	*Prutkay*	2	G Gröss BA	–	7	12	10	–	–	**29,71**	164
41.	*Patrik*	*Jendele*	3	SPŠsPLZ	13	4	10	3	–	–	**28,73**	115
42.	*Jan*	*Karásek*	4	GJNerudyPH	11	6	9	–	2	–	**28,00**	28
43.	*Veronika*	*Neubergová*	2	GKepleraPH	5	8	5	4	–	–	**22,45**	22
44.	*Magdaléna*	*Cincibuchová*	0	GKepleraPH	13	–	8	–	–	–	**21,37**	21
45.	*Julie*	*Matulová*	2	G Dobruška	9	–	5	4	–	–	**17,60**	75
46.	*Lucia*	*Kvasničková*	3	GKepleraPH	17	–	–	–	–	–	**17,45**	405
47.	*Sylvie*	*Fürstová*	2	GNVPlániPH	8	–	–	–	7	–	**15,53**	16
48.–49.	*Matouš*	*Schnabel*	1	MKG Říčany	13	–	–	–	–	–	**12,64**	13
48.–49.	*Jozef*	*Smolár*	1	GNámestovo	–	–	13	–	–	–	**12,64**	13
50.	*Aneta*	*Piklová*	4	G Strakon	–	–	10	–	–	–	**10,08**	76
51.	*Markéta*	*Hanušková*	4	G VelMezř	10	–	–	–	–	–	**9,63**	507
52.	*Martin*	*Dohnal*	2	GValašKlob	9	–	–	–	–	–	**9,48**	9
53.	*Jan Martin*	*Valek*	3	SPŠ PansPH	9	–	–	–	–	–	**9,17**	9
54.	*Maxim*	*Čambalík*	1	GJHroncaBA	8	–	–	–	–	–	**8,48**	8
55.–56.	*Vlastimil*	*Čejp*	3	GKepleraPH	7	0	–	–	–	–	**6,79**	7
55.–56.	*Matouš*	*Schnabel*	1	MKG Říčany	–	7	–	–	–	–	**6,79**	7
57.	*Eliška*	*Andrýsková*	2	GJŠkodyPŘ	–	7	–	–	–	–	**6,76**	7
58.	*Tadeáš*	*Roblík*	2	GŽidlochov	5	–	–	–	–	–	**5,27**	5
59.	*Aleš*	*Papáček*	4	G Třeboň	5	–	–	–	–	–	**5,08**	104
60.	*Martin*	*Kaifer*	3	GKepleraPH	0	3	–	–	–	–	**2,85**	10
61.	*Tomáš*	*Flídr*	4	G Kojetín	–	2	–	–	–	–	**2,21**	638

Výsledky po 41. ročníku

	jméno	příjmení	r.	škola	1p	2p	3p	4p	1j	2j	3j	4j	1s	2s	3s	celkem	hist.
1.	*Michal*	*Janík*	3	GKepleraPH	25	25	25	25	25	23	25	35	15	15	15	**252,61**	568
2.	*Jakub*	*Šošovička*	3	SG CEN BA	22	24	24	24	25	23	25	35	15	15	15	**246,37**	246
3.	*Matěj*	*Gajdoš*	4	GJatečníÚL	22	23	25	22	25	21	19	35	15	15	15	**237,00**	237
4.	*Jakub*	*Štepo*	3	GEBenešeKL	18	20	25	22	22	23	25	35	15	15	15	**234,62**	650
5.	*Samuel*	*Rosiar*	3	GKepleraPH	25	22	25	24	25	–	21	20	14	15	15	**205,02**	656
6.	*Viktor*	*Gola*	1	MG Vsetín	19	20	23	20	23	22	19	24	11	9	13	**204,55**	205
7.	*Veronika*	*Menšíková*	0	ArcibisGPH	21	20	23	16	23	19	20	22	12	14	10	**201,43**	201
8.	*David*	*Hromádka*	1	GNadAlejPH	20	19	19	21	19	22	22	25	9	7	13	**196,70**	197
9.	*Michal*	*Kuba*	3	GJPekařeMB	21	22	25	21	20	15	21	20	11	10	6	**193,54**	194
10.	*Štěpán*	*Varhaník*	2	G Chrudim	15	18	23	22	17	21	22	22	7	15	12	**192,55**	193
11.	*Jakub*	*Vlček*	3	G Příbor	18	10	20	21	21	18	19	26	10	14	14	**192,23**	399
12.	*Ivan*	*Žemlička*	1	GÚstavníPH	19	19	20	14	22	21	19	26	6	9	4	**179,75**	180
13.	*Ekaterina*	*Danilina*	3	GKepleraPH	16	10	23	20	23	20	21	20	4	10	10	**177,33**	346
14.	*Martin*	*Fof*	4	MendelG OP	15	17	25	12	21	15	18	14	15	13	9	**174,07**	456
15.	*Anastasia*	*Bredikhina*	1	GKepleraPH	16	20	19	7	23	22	21	22	5	10	7	**172,84**	376
16.	*Jan Theodor*	*Hrdý*	1	G UherBrod	19	19	22	11	14	16	22	14	11	11	11	**170,81**	171
17.	*Helena*	*Muchová*	0	GKepleraPH	20	15	19	16	20	18	16	16	13	9	–	**164,65**	165
18.	*Jaromír*	*Potůček*	3	GKepleraPH	18	20	21	17	22	18	22	12	4	6	6	**164,58**	272
19.	*Ondřej*	*Lukeš*	3	SŠkybernHK	–	–	–	24	24	24	25	32	–	15	14	**156,71**	157
20.	*Benedikt*	*Bareš*	4	G Dobruška	14	14	21	13	18	17	19	–	15	14	–	**144,74**	401
21.	*Ondrej*	*Králik*	1	GAlejKošic	15	21	22	16	19	18	20	9	–	–	–	**139,18**	139
22.	*Erik*	*Ježek*	0	ZŠŠvehlPH	–	–	–	–	25	25	24	35	–	15	15	**138,66**	139
23.	*Veronika*	*Chovancová*	3	PiarGTn	5	13	–	20	20	20	17	18	–	15	4	**133,59**	447
24.	*Daniela*	*Strnadová*	1	GJatečníÚL	2	8	22	21	9	16	18	15	8	7	7	**132,36**	240
25.	*Eliška*	*Valentová*	3	GJWolkraPV	–	12	21	20	16	20	14	6	–	11	11	**131,69**	132
26.	*Michal*	*Pecho*	4	SPŠDubnica	21	16	18	19	11	22	–	6	10	9	–	**131,01**	138
27.	*Lenka*	*Poljaková*	2	GJŠkodyPŘ	16	11	20	11	15	17	20	9	–	–	–	**120,83**	377
28.	*Alica*	*Dományová*	2	G Gröss BA	16	19	14	15	17	9	–	15	7	7	–	**120,38**	120
29.	*František*	*Janošík*	2	MendelG OP	–	13	13	9	9	19	20	14	5	7	–	**109,96**	110
30.	*Jan*	*Slíva*	1	GMensaPH	25	22	24	21	–	–	–	–	15	–	–	**107,04**	267
31.	*Zdeněk*	*Pezlar*	4	GJarošeBO	8	15	11	21	17	1	–	–	15	12	–	**100,56**	687
32.	*Jakub*	*Černý*	4	GJNerudyPH	11	10	19	9	16	15	9	–	9	2	–	**100,27**	100
33.	*Patrik*	*Štencel*	1	MendelG OP	–	–	–	16	0	23	22	32	–	–	–	**93,44**	93
34.	*Matouš*	*Šafránek*	4	GKepleraPH	25	22	25	–	–	–	–	–	15	–	–	**87,49**	459
35.	*Jan*	*Tregler*	2	GKepleraPH	7	13	4	8	21	11	12	–	6	–	–	**81,32**	81
36.	*Magdaléna*	*Cincibuchová*	0	GKepleraPH	13	15	18	10	13	–	8	–	–	–	–	**78,13**	78
37.	*Jan*	*Karásek*	4	GJNerudyPH	8	6	16	14	11	6	9	–	5	2	–	**77,00**	77
38.	*Martin*	*Šindelář*	2	G Gröss BA	–	–	20	10	12	13	12	9	–	–	–	**76,44**	207
39.	*Vít*	*Hanika*	3	GKepleraPH	3	17	13	7	8	6	12	8	–	–	–	**73,50**	306

40.	*Markéta*	*Hanušková*	4	G VelMeziř	18	15	12	12	10	–	–	–	3	–	–	**69,43**	566
41.	*Tomáš*	*Flídr*	4	G Kojetín	–	14	12	25	–	2	–	–	15	–	–	**69,05**	705
42.	*Dominik*	*Rigasz*	1	GJHroncaBA	–	–	–	–	–	10	22	28	–	–	9	**68,94**	69
43.	*Josef*	*Soural*	3	GBoskovice	–	17	11	–	20	–	–	–	6	13	–	**67,28**	67
44.	*Alexandr*	*Tabara*	4	GymnJanŠabr	14	14	15	19	–	–	–	–	4	–	–	**66,09**	369
45.	*Šimon*	*Rada*	4	GKepleraPH	17	8	14	19	–	–	–	–	9	–	–	**65,97**	86
46.	*Thuc Anh*	*Leová*	0	GKepleraPH	8	8	8	–	13	8	12	7	–	–	–	**64,84**	65
47.	*Petr*	*Hladík*	4	GMikul23PL	14	14	12	10	–	–	–	–	7	–	–	**56,80**	516
48.	*Denisa*	*Hanušková*	4	G VelMeziř	18	10	17	5	–	–	–	–	5	–	–	**53,92**	542
49.	*Julie*	*Matulová*	2	G Dobruška	8	6	14	–	9	–	5	4	–	–	–	**45,51**	103
50.	*Eliška*	*Andrýsková*	2	GJŠkodyPŘ	5	5	16	9	–	7	–	–	–	–	–	**42,78**	43
51.	*Veronika*	*Neubergová*	2	GKepleraPH	2	5	5	5	5	8	5	4	–	–	–	**40,17**	40
52.	*Filip*	*Prutkay*	2	G Gröss BA	–	–	–	10	–	7	12	10	–	–	–	**39,52**	174
53.	*Hynek*	*Jakeš*	4	SlovanG OL	19	19	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**38,23**	104
54.	*Uršuľa Mária*	*Kossaczká*	2	G Gröss BA	–	–	–	–	–	15	13	10	–	–	–	**38,09**	38
55.	*Lukáš*	*Wendzel*	3	G Fren	–	19	18	–	–	–	–	–	–	–	–	**37,15**	37
56.	*František*	*Hep*	3	CírkGPlzeň	7	7	12	8	–	–	–	–	–	–	–	**34,03**	34
57.	*Michaela*	*Valtrová*	3	MendelG OP	14	7	9	–	–	–	–	–	2	–	–	**32,67**	137
58.	*Daniel*	*Procházka*	4	GUHradiště	14	17	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**31,27**	31
59.	*Sylvie*	*Fürstová*	2	GNVPlániPH	9	–	–	5	8	–	–	–	–	7	–	**30,28**	30
60.	*Patrik*	*Jendele*	3	SPŠsPLZ	–	–	–	–	13	4	10	3	–	–	–	**28,73**	115
61.	*Helena*	*Boušová*	2	G Teplice	15	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**28,05**	28
62.	*Jan Martin*	*Valek*	3	SPŠ PansPH	–	16	–	–	9	–	–	–	–	–	–	**25,29**	25
63.	*Markéta*	*Kalendová*	2	ArcibisGPH	13	12	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**24,89**	25
64.	*Vít*	*Křivonoska*	3	GVoděraPH	14	10	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**24,77**	25
65.	*Jiří*	*Jirásek*	3	GMikul23PL	9	11	–	4	–	–	–	–	–	–	–	**24,10**	58
66.	*Bobur*	*Toshtemirov*	3	GMikul23PL	13	10	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**23,77**	24
67.	*Martin*	*Dohnal*	2	GValašKlob	–	5	8	–	9	–	–	–	–	–	–	**22,92**	23
68.	*Vendula*	*Onderková*	4	GJŠkodyPŘ	12	10	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**22,70**	418
69.	*Matouš*	*Schnabel*	1	MKG Říčany	–	15	–	–	–	7	–	–	–	–	–	**21,68**	22
70.	*Tadeáš*	*Roblík*	2	GŽidlochov	4	0	8	–	5	–	–	–	3	–	–	**20,56**	21
71.	*Aleš*	*Papáček*	4	G Třeboň	10	5	–	–	5	–	–	–	–	–	–	**19,87**	119
72.	*Marek*	*Štorek*	2	GNadAlejPH	9	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**18,96**	19
73.	*Rostislav*	*Litovkin*	2	GHeyrovPH	8	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**18,89**	19
74.	*Jan*	*Lepič*	3	G Strakon	13	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**18,39**	62
75.	*Jakub*	*Havlíček*	3	GKepleraPH	8	–	10	–	–	–	–	–	–	–	–	**18,30**	18
76.	*Lukáš*	*Backa*	2	GŠmejkalÚL	9	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**17,67**	18
77.	*Lucia*	*Kvasničková*	3	GKepleraPH	–	–	–	–	17	–	–	–	–	–	–	**17,45**	405
78.	*Aneta*	*Piklová*	4	G Strakon	4	3	–	–	–	–	10	–	–	–	–	**16,22**	82
79.	*Jana*	*Křivohlavá*	2	GJungmanLT	8	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**14,80**	26
80.	*Vojtěch*	*Štěpán*	3	G Benešov	7	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**14,62**	28
81.	*Ondřej*	*Popovský*	2	GDoppleraPH	14	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**14,05**	14
82.	*Adam*	*Kozubek*	4	GŠlapanice	14	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**14,00**	14
83.	*Štěpán*	*Fröde*	2	G Dobruška	14	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**13,98**	24
84.	*Daniel*	*Závorka*	3	GNadKavaPH	8	6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**13,53**	14
85.–86.	*Jakub*	*Savula*	2	G Jírov ČB	13	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**13,00**	13
85.–86.	*Michal*	*Uliáš*	4	SPŠSmíchov	2	6	5	–	–	–	–	–	–	–	–	**13,00**	13
87.–88.	*Matouš*	*Schnabel*	1	MKG Říčany	–	–	–	–	13	–	–	–	–	–	–	**12,64**	13
87.–88.	*Jozef*	*Smolár*	1	GNámestovo	–	–	–	–	–	–	13	–	–	–	–	**12,64**	13
89.	*Václav*	*Verner*	1	PORG PH	2	–	9	2	–	–	–	–	–	–	–	**12,56**	187
90.	*Jiří*	*Polách*	3	G FrýdlNOs	–	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,10**	11
91.	*Tobiáš*	*Kohout*	4	NPorg	11	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**11,00**	11

92.	*Václav*	*Tichý*	2	GKepleraPH	–	5	5	–	–	–	–	–	–	–	–	**10,54**	11
93.	*Kryštof*	*Kastowksý*	4	G Hlučín	10	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**10,00**	10
94.	*Martin*	*Hraba*	3	G Benešov	–	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**9,17**	9
95.	*Maxim*	*Čambalík*	1	GJHroncaBA	–	–	–	–	8	–	–	–	–	–	–	**8,48**	8
96.	*Anna*	*Bártová*	0	GKepleraPH	8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**8,34**	8
97.	*Vojtěch*	*Fila*	2	G Litomyšl	2	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**7,18**	7
98.	*Andrej*	*Mikuš*	4	GCyMeNitra	1	6	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**7,00**	7
99.–103.	*Vlastimil*	*Čejp*	3	GKepleraPH	–	–	–	–	7	0	–	–	–	–	–	**6,79**	7
99.–103.	*Martin*	*Haikl*	3	G TýnNVlt	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**6,79**	7
99.–103.	*Milan*	*Holotňák*	1	G Třinec	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**6,79**	7
99.–103.	*Kryštof*	*Maxera*	1	G Jírov ČB	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**6,79**	7
99.–103.	*Vilém*	*Učík*	1	GJungmanLT	–	7	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**6,79**	7
104.	*Ondřej*	*Svoboda*	2	G Mělník	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**5,27**	5
105.	*Filip*	*Hošek*	2	MKG Říčany	–	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**5,20**	18
106.	*Tomáš*	*Feldbabel*	2	SPŠ Třebíč	–	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**5,05**	50
107.	*Karel*	*Procházka*	4	GPBystrica	–	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**5,01**	115
108.	*Natalia*	*Curzydo*	4	G HavlČTěš	5	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**5,00**	5
109.	*Matyáš*	*Maroušek*	4	GEBenešeKL	4	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**4,00**	4
110.	*Kamila Laura*	*Malíková*	2	GEBenešeKL	4	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**3,65**	4
111.	*Peter*	*Kochelka*	4	GTajBanBys	3	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**3,22**	271
112.	*Karolína*	*Podivínská*	4	BiskG Brno	3	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**3,00**	3
113.	*Martin*	*Kaifer*	3	GKepleraPH	–	–	–	–	0	3	–	–	–	–	–	**2,85**	10
114.	*Paulína*	*Dujavová*	4	GRaymanaPV	3	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**2,77**	39
115.	*Barbora*	*Edlová*	1	G Tachov	3	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**2,67**	3
116.	*Šimon*	*Lipus*	2	G Třinec	2	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**1,91**	2
117.	*Ladislav*	*Vávra*	3	G RožnRadh	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**1,45**	12
118.	*Jolana*	*Štraitová*	3	GBudějovPH	1	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**1,32**	78
119.–122.	*Jan*	*Hrdina*	1	GNVPlániPH	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**0,00**	0
119.–122.	*Martin*	*Chrostek*	3	GBezručeFM	–	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**0,00**	0
119.–122.	*Petr*	*Kasper*	2	G Teplice	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**0,00**	0
119.–122.	*Kateřina*	*Krninská*	1	G PostupPH	0	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	**0,00**	0

adresa: *Korespondenční seminář*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
web: *http://prase.cz/*
e-mail: *info@prase.cz*