Odmocniny

3. jarní série — Termín odeslání: 4. dubna 2022

Úloha 1. (3 body)

Rozhodněte, zda lze zvolit po dvou různá přirozená čísla a, b, c taková, že $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ ani $\sqrt{abc}$ nejsou celá čísla, ale $\sqrt{ab}$, $\sqrt{bc}$ i $\sqrt{ca}$ jsou?

Úloha 2. (3 body)

Spočtěte hodnotu výrazu

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$$

Úloha 3. (3 body)

Daník na pololetním vysvědčení dostal samé jedničky. Z dlouhé chvíle si všechny své jedničky zapsal za sebe a ze získaného čísla (v desítkové soustavě) spočetl druhou odmocninu. Shodou okolností mu vyšlo celé číslo. Kolik mohl mít Daník předmětů?

Úloha 4. (5 bodů)

Jsou dána kladná racionální čísla p a q, pro něž je $\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}$ rovněž racionální číslo. Dokažte, že také $\sqrt[3]{p}$ je racionální.

Úloha 5. (5 bodů)

Najděte všechny dvojice reálných čísel x, y splňující

$$x^2+y^2+xy=133,$$
$$x+y+\sqrt{xy}=19.$$

Úloha 6. (5 bodů)

Na kružnici ω leží body A, B a P. Tečny k ω v bodech A, B pojmenujme po řadě t_A, t_B. Následně vzdálenosti bodu P od přímek t_A, t_B a AB označme po řadě a, b a c. Dokažte, že $c=\sqrt{ab}$.

Úloha 7. (5 bodů)

V PraSestánu se nachází n měst, z nichž některé dvojice jsou spojené obousměrnými leteckými linkami. Pepovi se povedlo nalézt leteckou trasu mezi městy, během níž poletí ℓ-krát a zároveň se v žádném městě neocitne více než jednou. Potom Pepa společně s Radečkem odhalil pozoruhodnou skutečnost: vždy když si nějaké město označí jako start a jiné jako cíl, dovede každý z nich procestovat nějakou leteckou trasu ze startu do cíle tak, že žádné město kromě startu a cíle nebude navštíveno oběma. Dokažte, že Pepa si dovede naplánovat okružní výlet, při kterém poletí alespoň $\sqrt{2\ell}$-krát, vrátí se do města, z něhož vyrazil, a žádné jiné město nenavštíví více než jednou.

Úloha 8. (5 bodů)

Majda položila na stůl dvacet po sobě jdoucích přirozených čísel. Dokažte, že Naty si z nich dovede vybrat číslo d takové, že pro libovolné přirozené číslo n platí nerovnost

$$n\sqrt{d} \cdot \left\{n\sqrt{d}\right\} \geq \frac{5}{2},$$

kde $\{x\}$ značí *desetinnou část* reálného čísla x, tedy to číslo z intervalu $\langle 0, 1)$, pro něž je $x - \{x\}$ celé číslo.

Matematická indukce 3

3. seriálová série Termín odeslání: 4. dubna 2022

Úloha 1. (5 bodů)

Nechť d je největší společný dělitel přirozených čísel m_1 a m_2. Dokažte, že pokud je n přirozené číslo různé od nuly, je nd největším společným dělitelem čísel nm_1 a nm_2. V důkazu vycházejte jen z definic a tvrzení ze seriálu.

Úloha 2. (5 bodů)

Ukažte, že pro kladná celá čísla a, b platí rovnost

$$\mathrm{NSD}\left(2^a - 1,\ 2^b - 1\right) = 2^{\mathrm{NSD}(a,b)} - 1,$$

kde $\mathrm{NSD}(x, y)$ je největší společný dělitel čísel x, y.

Úloha 3. (5 bodů)

Nechť a a b jsou kladná celá čísla. Definujme tento algoritmus.

Začneme s dvojicí (a, b). Dokud $a > 0$, budeme provádět následující krok:

(1) Pokud $a < b$, pak dvojici (a, b) nahradíme dvojicí $(2a, b - a)$.
(2) Pokud $a \geq b$, pak dvojici (a, b) nahradíme dvojicí $(a - b, 2b)$.

Pro jaké vstupní hodnoty se algoritmus po nějakém čase zastaví?

Finální myš-maš

4. jarní série Termín odeslání: 9. května 2022

V této sérii nejsou úlohy řazeny podle obtížnosti, ale podle témat (v rámci každého tématu je jedna úloha snazší a jedna obtížnější). Pozor, počítají se body za všechny úlohy!

Úloha 1.

(a) Michal namaloval nedegenerovaný trojúhelník ABC s délkami stran $a \leq b \leq c$. Všiml si, že tři štětce, které použil, mají přesně délky jednotlivých výšek v trojúhelníku ABC. Když se však z těchto štětců pokusil složit nedegenerovaný trojúhelník, zjistil, že to nejde. Dokažte, že pak už musí platit nerovnost $b^2 > ac$. (2 body)

(b) Malíř Dláža namaloval pravidelný $(2n+1)$-úhelník. Malířky Klátra a Klárka hrají hru, při níž se střídají v tazích a Klátra začíná. Ve svém tahu namalují dosud nenamalovanou úhlopříčku $(2n+1)$-úhelníku, která protne sudý počet již namalovaných úhlopříček ve vnitřních bodech. Malířka, která nemůže táhnout, prohrává. Zjistěte v závislosti na n, kdo má vyhrávající strategii. (3 body)

Úloha 2.

(a) Dokažte, že pro každé přirozené číslo n má n^2 více dělitelů dávajících zbytek 1 po dělení čtyřmi než dělitelů dávajících zbytek 3 po dělení čtyřmi. (2 body)

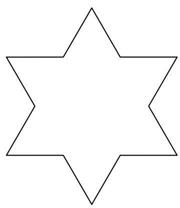
(b) Nechť $n \geq 2$ a uvažujme kladná reálná čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ splňující

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Ukažte, že platí $\max(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq 4 \min(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. (3 body)

Úloha 3.

(a) Rozdělte pravidelnou šesticípou hvězdu třemi rovnými řezy na čtyři části, ze kterých je možné složit konvexní mnohoúhelník. Šesticípá hvězda je tvořena šestiúhelníkem, nad jehož stranami jsou rovnostranné trojúhelníky. (2 body)



(b) Mějme ne nutně konvexní osmiúhelník $ABCDEFGH$ se všemi stranami stejně dlouhými takový, že $ACEG$ je rovnoběžník, body B, D leží uvnitř $ACEG$ a body F, H venku. Dokažte, že body B, D, F a H leží na jedné kružnici. (3 BODY)

ÚLOHA 4.

(a) Budiž P polynom s celočíselnými koeficienty splňující $P(-2) = P(2) = 2$. Ukažte, že P nemá celočíselný kořen. (2 BODY)

(b) Budiž P polynom s celočíselnými koeficienty, jehož každý komplexní kořen je celé číslo a který splňuje $P(0) = -1$, $P(5) = 3456$. Jaký nejmenší stupeň může mít P? (3 BODY)

ÚLOHA 5.

(a) Najděte všechny trojice reálných čísel (x, y, z), jež splňují soustavu rovnic

$$\begin{aligned} xy &= z - x - y, \\ yz &= x - y - z, \\ zx &= y - z - x. \end{aligned}$$

(2 BODY)

(b) Daník našel v lese n-tici kartiček s přirozenými čísly $x_1, \ldots, x_n$, jejichž součet je $2n - 1$. Tyto kartičky potom rozdělil na dvě hromádky A a B se součty po řadě S_A a S_B. V závislosti na hodnotách čísel $x_1, \ldots, x_n$ určete, jaké nejvyšší hodnoty mohl dosáhnout výraz $S_A \cdot S_B$. (3 BODY)

ÚLOHA 6.

(a) Najděte všechny dvojice přirozených čísel m, n takové, že $m^3 - n$ je násobkem $m^2 - n$, zatímco $n^3 - m$ je násobkem $n^2 - m$. (2 BODY)

(b) Nechť L je množina všech lichých přirozených čísel. Najděte všechny funkce f z L do L takové, že pro všechny dvojice $x, y \in L$ je $xy + 1$ násobkem $f(x) + f(y)$. (3 BODY)

ÚLOHA 7.

(a) Je dána 2022-prvková množina M reálných čísel taková, že pro libovolná $a, b \in M$ je $a^2 + b\sqrt{2}$ racionální číslo. Dokažte, že pro každé $a \in M$ je rovněž $a\sqrt{2}$ racionální. (2 BODY)

(b) Kladná reálná čísla a, b, c splňují $abc = 1$. Dokažte, že platí

$$\frac{1}{a + \frac{1}{b} + \frac{1}{2}} + \frac{1}{b + \frac{1}{c} + \frac{1}{2}} + \frac{1}{c + \frac{1}{a} + \frac{1}{2}} \geq \sqrt{2}.$$

(3 BODY)