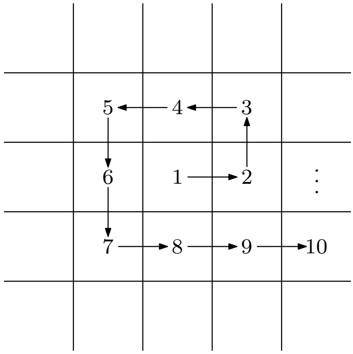
Branky, body, vteřiny

3. jarní série — Termín odeslání: 6. dubna 2020

Úloha 1. (3 body)

Housenka Hedvika spadla doprostřed čtvercové sítě. Rozhodla se, že poleze „do spirály“ tak, jak je naznačeno na obrázku. Každou vteřinu se posune o právě jedno políčko. Rozhodněte, kterým směrem poleze z 2020. na 2021. vteřinu.



Úloha 2. (3 body)

Petr dostal za úkol postavit na šachovnici 2020×2020 několik věží tak, aby každé bílé políčko bylo obsazené nebo ohrožené. Umístit jednu věž mu trvá vteřinu. Poraďte Petrovi, jak rozestavět věže, aby splnil zadání a zároveň umístění proběhlo co nejrychleji.

Úloha 3. (3 body)

Hokejového turnaje se zúčastnilo 8 týmu, hrál každý s každým a nenastaly žádné remízy. Dokažte, že můžeme vybrat čtveřici týmů A, B, C, D takovou, že tým A porazil B, C i D, tým B porazil C a D a tým C porazil D.

Úloha 4. (5 bodů)

Lenka hraje fotbal na lichoběžníku $ABCD$, kde AB, CD jsou rovnoběžné postranní čáry a na úsečkách BC, DA jsou branky. Lenka stojí v bodě L na brankové čáře BC. Následně Ondra vykopne od rohového praporku B míč na protější branku směrem rovnoběžným s přímkou LD. Druhý Ondra vykopne od rohového praporku C míč směrem rovnoběžným s přímkou LA. Dokažte, že oba míče překročí brankovou čáru DA v témže bodě.

Úloha 5. (5 bodů)

Polynom P stupně n s různými kořeny $a_1, \ldots, a_n$ nazveme *vteřinový*, pokud pro všechna $1 \leq i \leq n$ platí, že v bodě $a_i + 1$ má hodnotu 1. V závislosti na n najděte všechny vteřinové polynomy P.

Úloha 6. (5 bodů)

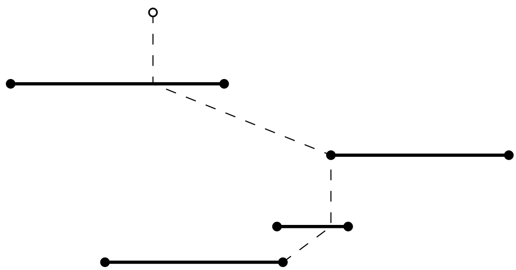
Radeček napsal na tabuli čísla $1 \cdot 2, 2 \cdot 3, \ldots, 2m \cdot (2m+1)$. V každé z následujících $m-1$ vteřin si Anička vybrala čísla a, b, c z tabule, smazala je a místo nich napsala číslo $\frac{abc}{ab+bc+ca}$. Na konci na tabuli zůstala dvě čísla, z nichž jedno bylo $\frac{4}{3}$. Dokažte, že druhé z nich bylo větší než 4, ať už Anička vybírala jakkoliv.

Úloha 7. (5 bodů)

Žabák Pepíček skáče po kamenech očíslovaných $1, 2, 3, \ldots, 2^n$ tak, že začíná na kameni s číslem 1 a žádný kámen nenavštíví více než jednou. Každou vteřinu přitom skočí z kamene s číslem x na kámen s číslem y tak, aby $|x-y|$ byla mocnina dvojky. Tímto skokem Pepíček získá $|x-y|$ bodů. Kolik nejvíce bodů může Pepíček získat?

Úloha 8. (5 bodů)

Filip s Radem vyrazili na sjezdovku projet slalomovou trať. Trať obsahuje několik branek (ne nutně stejně širokých) rovnoběžných s vrstevnicí, které musí oba závodníci všechny projet postupně odshora dolů. Oba začínají ve stejném bodě. Když Rado projíždí brankou, zatočí tak, aby cesta do následující branky byla nejkratší možná (viz obrázek). Filip projíždí trasou optimálně. Dokažte, že Rado jel nejvýše $\sqrt{2}$-násobně delší cestou než Filip.



Projektivní geometrie III

3. seriálová série — Termín odeslání: 6. dubna 2020

Úlohy této série jsou řazeny podle témat, nikoliv podle obtížnosti.

Úloha 1. (5 bodů)

Mějme kružnice Ω a ω takové, že jsou kružnicí opsanou, resp. vepsanou nějakého trojúhelníka. Na Ω zvolme bod A. Tečny z A k ω protnou Ω v bodech BC. Platí[1], že BC se dotýká ω v D. Dokažte, že zobrazení z A na Ω do D na ω je projektivní.

[1] Tohle není třeba dokazovat, plyne to z věty, které se říká *Ponceletovo porisma*. Pokud Tě o ní zajímá více, přečti si 3. díl seriálu *Geometrie trojúhelníka*: *https://prase.cz/archive/36/uvod3s.pdf*.

Úloha 2. (5 bodů)

Mějme trojúhelník ABC s kružnicí opsanou ω. Na ose úhlu u A zvolme bod P. Označme B_1, C_1 druhé průsečíky postupně PB, PC s kružnicí ω. Na AB zvol bod X tak, že $|\sphericalangle XB_1B| = 90°$. Analogicky na AC zvol Y tak, že $|\sphericalangle YC_1C| = 90°$. Dokažte, že přímka XY prochází pevným bodem nezávisle na pozici P.

Úloha 3. (5 bodů)

Uvažme trojúhelníky ABC, DEF sdílící kružnici opsanou Ω i vepsanou ω. Přímka BC se dotýká ω v K, přímka EF se ω dotýká v L. Označme $M = DK \cap \Omega$ a $N = AL \cap \Omega$. Dokažte, že přímky AM, DN, BC prochází jedním bodem.

Finální myš-maš

4. jarní série — Termín odeslání: 4. května 2020

V této sérii nejsou úlohy řazeny podle obtížnosti, ale podle témat (v rámci každého tématu je jedna úloha snazší a jedna obtížnější). Pozor, počítají se body za všechny úlohy!

Úloha 1.

(a) V jídelně je kulatý stůl a každý z alespoň tří žáků okolo stolu má na talíři nějaký počet brambor. Ve chvíli, když si nějaký z nich všimne, že oba jeho sousedi mají méně brambor, může jednu svou bramboru sníst a škodolibě zavolat kuchařku, ať oběma jeho sousedům po bramboře přidá. Brambory jsou tak nechutné, že je jindy nejedí. Existuje počáteční rozdělení brambor, pro které si takto můžou provádět naschvály donekonečna? (2 body)

(b) U vedlejšího kulatého stolu sedí $n \geq 3$ učitelů. Kuchařka připravila n různě velkých porcí o velikostech 1 až n klobásek. Kolika způsoby jim může kuchařka rozdat porce tak, aby pro každého učitele platilo, že počet jeho klobásek dělí součet počtu klobásek jeho sousedů. (3 body)

Úloha 2.

V řadě je napsaná konečná posloupnost alespoň dvou celých čísel. Kouzelnice Anička přijde k posloupnosti a může s jejími členy dělat následující operaci. Pokud má člen za souseda stejně velké číslo, zvětší ho o dva, v opačném případě pouze o jedna.

(a) Může Anička z libovolné počáteční posloupnosti vytvořit konstantní, pokud může operace provádět na libovolná čísla, kolikrát chce? (2 body)

(b) Pokud Anička musí operaci provést na každé číslo právě jednou, existuje počáteční posloupnost, ze které umí takto vytvořit konstantní? (3 body)

Úloha 3.

(a) Terka dostala tabulku 3×3 vyplněnou samými nulami. V každém kroku vybere dvě sousední políčka a buď k oběma přičte 1, nebo ji od obou odečte. Ukažte, že tímto postupem nikdy nedostane tabulku se samými dvojkami. (2 body)

(b) Nechť n je přirozené číslo. Hedvika chtěla vyplnit tabulku $1\times n$ červenými, zelenými a modrými čtverečky. Zjistila ale, že místo modrých čtverečků koupila modrá domina, která neumí lámat. Nechť p_n značí počet způsobů, jak umí (za použití červených čtverečků, zelených čtverečků a modrých domin) vyplnit tabulku tak, aby každé políčko bylo pokryto právě jedním útvarem a nic nepřečnívalo. Ukažte, že p_n dělí p_{2n+1}. (3 body)

Úloha 4.

(a) Budiž ABC trojúhelník se středem kružnice vepsané I a kružnicí opsanou ω. Přímka AI protíná ω podruhé v bodě M. Nechť D je průsečík BI a kružnice opsané CMI různý od I. Ukažte, že $BD = CD$. (2 body)

(b) Buď ω kružnice se středem O a poloměrem r_1. Nechť ℓ je přímka dotýkající se ω v daném bodě P a nechť Q je libovolný bod na ℓ. Úsečka OQ protíná ω v bodě S. Označme R průsečík PS a kružnice opsané OPQ různý od P a nechť r_2 je poloměr kružnice opsané OPQ. Dokažte, že $\frac{PS}{SR} = \frac{r_1}{r_2}$. (3 body)

Úloha $\frac{4!}{4} - \frac{4}{4}$.

(a) Určete hodnotu $s\left(s\left(s\left(s\left(4^{4^{4^4}}\right)\right)\right)\right)$, kde $s(n)$ značí ciferný součet čísla n.

(2 body)

(b) Mějme trojúhelník se stranami délek a, b, c. Dále víme, že $ab + bc + ca = 1$. Dokažte, že $(a+1)(b+1)(c+1) < 4$.

(3 body)

Úloha 6.

(a) Lenka si napsala na tabuli přirozené číslo n a hrála si s ním. V každém kroku napsané číslo nahradila součinem jeho cifer. Po nějaké době bylo na tabuli napsáno číslo 1. Najděte všechna možná n. (2 body)

(b) Martin dostal k narozeninám nekonečnou mřížku a snaží se do mřížových bodů umístit přirozená čísla tak, aby každé bylo použito právě jednou. Zároveň musí pro každé n platit, že součet čísel v každém čtverci $n\times n$ je násobkem n. Může se mu to podařit? (3 body)

Úloha 7.

(a) Na šachovnici 2020×2020 je umístěno 2020 šachových dam tak, že se žádné dvě navzájem neohrožují. Ukažte, že v každém z rohových čtverců 1010×1010 se nachází alespoň jedna dáma. (2 body)

(b) Pepa sbírá kartičky fotbalových brankářů. Každý brankář má na dresu některé z čísel $1, \ldots, n$. Navíc platí, že součet čísel brankářů na všech kartách je roven $k\cdot n!$ pro nějaké přirozené k. Dokažte, že Pepa dovede rozdělit svoje karty do k hromádek, v každé z nichž je součet čísel brankářů roven $n!$. (3 body)