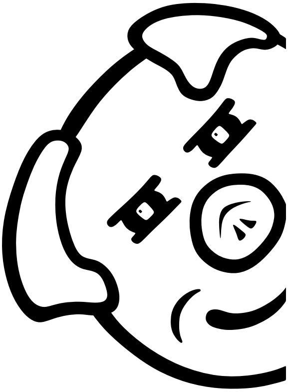
Matematický korespondenční seminář

Milý příteli !



Zima se s námi loučí jen pomalu, ale v PraSátku už jsme odstartovali druhou část ročníku první jarní sérií, která se vydala do kouzelného světa Entů a n-tic. Proto nyní v rukou držíš třetí komentáře, které Tě provedou zbytkem roku.

Jednak v nich nalezneš výsledky celé podzimní části, pomocí nichž vybíráme účastníky na jarní soustředění, a první jarní série. Začíst se také můžeš do anglických vzorových řešení čtvrté podzimní série nebo do českých vzorových řešení první jarní série. Ale to není všechno! Máme pro Tebe třetí díl seriálu o indukci s názvem **V rytmu algoritmů**, kde se setkáš nejen s čísly, ale i s polynomy a s kartami. Jako dezert si pak můžeš vychutnat třetí seriálovou sérii. Body z ní se budou jistě hodit k účasti na podzimním soustředění.

Nezapomínáme ani na běžné série, připravili jsme pro Tebe sérii o **odmocninách** a **Finální myš-maš**, ve kterém si můžeš zopakovat všechna témata letošního ročníku. Nezapomeň, že v myš-maši můžeš získat až 35 bodů, protože se počítají všechny úlohy!

Jaro ale není jen o sériích, neboť hned 18. března se koná online Náboj, kde můžeš v týmu se spolužáky změřit síly se středoškoláky z celého světa. Dále Tě taky rádi uvidíme na jarním výletě.

Hodně štěstí a mnoho dobrých nápadů za organizátory přeje

Hedvika Ranošová

Co je dále v komentářích?

- Vzorová řešení 4. podzimní a 1. jarní série
- Vzorové řešení 2. seriálové série
- Seriál – Matematická indukce 3 – V rytmu algoritmů
- Výsledkové listiny podzimní části a 1. jarní série

- Příloha: Zadání 3. a 4. jarní série a 3. seriálové série

Náboj

Mezinárodní týmová matematická soutěž Náboj se uskuteční již velmi brzy – v pátek 18. března, letos ve 13 různých zemích, nicméně v online prostředí. Podrobnosti najdeš na stránkách Náboje[1]. Je to skvělá příležitost k porovnání sil nejen s českou, ale i zahraniční elitou. Registrace končí 15. března, tak si tuto úžasnou příležitost určitě nenech ujít!

Jarní výlet

Nesmíme zapomenout ani na tradiční jarní výlet po krásách naší vlasti. Je to možnost, jak poznat organizátory PraSátka i další řešitele. Na termínu ještě pracujeme, ale až bude, určitě se objeví na našich stránkách i se všemi podrobnostmi. Těšíme se na Tebe!

[1] *https://math.naboj.org/*

Korespondenční seminář
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1

matfyz

Polynomials

4^{TH} AUTUMN SERIES MODEL SOLUTIONS

Problem 1.

Daniel would like to have two polynomials $P(x)$, $Q(x)$ such that the degree of the product $P(x)\cdot Q(x)$ is six and the degree of the sum $P(x)+Q(x)$ is two. Help him find an example of such polynomials.

(Josef Minařík)

SOLUTION:
We can take $x^3 + x^2$ and $-x^3$ as an example of two polynomials satisfying the given conditions. Clearly, their sum is x^2 and their product is $-x^6 - x^5$.

POZNÁMKY:
Většina řešitelů našla dva polynomy. Taková řešení si vysloužila všechny tři body. Zde bych však do budoucna upozornil, že pokud napíšete něco navíc, je to super, ale dejte si pozor, ať je to správně.

(Vojta „Dláža“ Gaďurek)

Problem 2.

Klátra owns the polynomial $P(x) = x^2 + 8x + 12$. Prove that for any positive integer n the value $P(n)$ is not a prime number. *(Marian Poljak)*

SOLUTION:
We can easily factorize Klátra's polynomial $P(n)$ as

$$P(n) = n^2 + 8n + 12 = n(n+6) + 2(n+6) = (n+2)(n+6).$$

For any positive integer n both $n+2$ and $n+6$ are positive integers greater than 1. By definition, a prime number can only have two positive divisors (1 and itself). But $P(n)$ has at least two divisors ($n+2$ and $n+6$) greater than 1, so it can't be a prime number.

POZNÁMKY:
Všechna došlá řešení se úspěšně dobrala k cíli, často dost podobně jako to vzorové. Bohužel jsem ale některým řešitelům musela strhnout bod za sice zjevný, ale důležitý poznatek, že žádná ze závorek nemůže nabývat hodnoty jedna. *(Adéla Karolína „Áďa“ Žáčková)*

Problem 3.

Fíla gave Áďa three integers a, b, c for her birthday. Martin gave her a polynomial $P(x)$ with integer coefficients satisfying $P(a) = 1$, $P(b) = 2$ and $P(c) = 3$. Prove that b lies between a and c.

(Lenka Kopfová)

Solution:
We use a well-known fact from the introductory text that given integers a, b and a polynomial $P(x)$ with integer coefficients, we have $a-b \mid P(a)-P(b)$. By applying this fact to the problem, we get

$$b-a \mid P(b)-P(a)=1,$$
$$c-b \mid P(c)-P(b)=1.$$

Therefore $(b-a),(c-b) \in \{1,-1\}$, which implies $a,c \in \{b-1,b+1\}$. But we know that $a \neq c$, as the polynomial P attains different values at a and c. So either $a=b+1$ and $c=b-1$, or $a=b-1$ and $c=b+1$. In both cases b lies between a and c, so we are done.

Poznámky:
Většina řešení byla správně, často ale postupovala trochu větším rozebíráním případů než vzorové řešení. Někteří řešitelé se snažili úlohu dokázat bez využití toho, že zadaná čísla i koeficienty polynomu jsou celá čísla. To ovšem nejde, protože pokud pro nějaký konečný počet bodů určíme funkční hodnoty v nich, vždy umíme najít polynom dostatečně velkého stupně, který v zadaných bodech určených funkčních hodnot nabývá. Celočíselnost tak v tomto případě byla naprosto klíčová, stejně jako zmíněné tvrzení, které bylo možno najít v úvodním textu této série. *(Lenka Kopfová)*

Problem 4.

Let $P(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ be a polynomial with roots $x_1,\ldots,x_n$. Express $(x_1^2-1)\cdots(x_n^2-1)$ in terms of $a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}$. *(Filip Čermák)*

Solution:
As we know from the introductory text, the polynomial $P(x)$ with roots $x_1,\ldots,x_n$ can be factorized as $a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$. Our polynomial $P(x)$ has a leading coefficient $a_n=1$, therefore $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$.

We want to express $(x_1^2-1)\cdots(x_n^2-1)$ in terms of coefficients of P, so we can rewrite it as

$$(x_1^2-1)\cdots(x_n^2-1)=(x_1-1)(x_1+1)\cdots(x_n-1)(x_n+1)=(x_1-1)\cdots(x_n-1)\cdot(x_1+1)\cdots(x_n+1),$$

using $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

Now we can see that the final form of the expression is pretty similar to our factorization of $P(x)$. We can again rewrite the expression as

$$(x_1-1)\cdots(x_n-1)\cdot(x_1+1)\cdots(x_n+1)=(-1)^n(1-x_1)\cdots(1-x_n)\cdot(-1)^n(-1-x_1)\cdots(-1-x_n)$$

and since $(-1)^n(-1)^n=(-1)^{2n}=1$, the powers of -1 just cancel out.

On the other hand, by evaluating $P(x)$ at ±1, we get $P(1)=(1-x_1)\cdots(1-x_n)$ and $P(-1)=(-1-x_1)\cdots(-1-x_n)$. Plugging these expressions into $P(1)P(-1)$ and using the equalities we've derived above yields

$$P(1)P(-1)=(x_1^2-1)\cdots(x_n^2-1).$$

Finally, we need to express $P(1)P(-1)$ in terms of the coefficients of P to get the desired answer:

$$P(1)P(-1)=\Big(a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}+1\Big)\Big(a_0-a_1+\cdots+(-1)^{n-1}a_{n-1}+(-1)^n\Big).$$

Poznámky:
Většina řešení, která přišla, byla správně a postupovala podobně vzorovému řešení. Občas se vyskytla nějaká plus mínus jednička, za kterou byl stržen bod, ale to se stávalo jen sporadicky.
(Filip Čermák)

Problem 5.

Vašek hid his favourite n-tuple $a_1, \dots, a_n$ of real numbers in a vault and the code is

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2.$$

Majda would like to steal his n-tuple, but she only knows that it satisfies

$$1 + x^n + x^{2n} = (1 + a_1 x + x^2) \cdot (1 + a_2 x + x^2) \cdots (1 + a_n x + x^2)$$

for all real x. Help Majda find the code in terms of n. *(Marian Poljak)*

Solution:

We will compare the coefficients of the polynomials from the equality in the problem statement. Let's first explore coefficients on the right-hand side. To obtain the linear term of the product, we must choose $a_i x$ from one factor and 1 from the rest. So the coefficient of the linear term is $a_1 + \dots + a_n$. We can get the quadratic term either by choosing $a_i x$ and $a_j x$ from two factors and 1 from the others, or simply by choosing x^2 from one factor and 1 from the rest. So the coefficient of the quadratic term is $n + \sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j$.

Now let's take a look at the left-hand side. If $n = 1$, the coefficients of the linear and the quadratic term are both 1. If $n = 2$, the coefficients of the linear and the quadratic term are 0 and 1, respectively. If $n > 2$, both these coefficients are 0.

If the two polynomials are equal for all real x, their coefficients must also be equal. Thus for $n = 1$, it is necessary that $a_1 = 1$. For $n = 2$, we get $a_1 + a_2 = 0$ and $a_1 a_2 + 2 = 1$, so $a_1 a_2 = -1$. For $n > 2$, we have $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ and $n + \sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j = 0$, therefore $\sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j = -n$.

We know that

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2 - 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j.$$

On the left-hand side, we have the code we want to find. If we substitute the above values to the right-hand side, we obtain 1 for $n = 1$, then 2 for $n = 2$ and finally $2n$ for $n > 2$.

Poznámky:

Většina řešení postupovala stejně jako vzorové, body jsem strhávala hlavně za nedořešení některých případů. *(Magdaléna Mišinová)*

Problem 6.

Find all non-constant polynomials P, Q with real coefficients which satisfy

$$P\left(Q(x)^3\right) = x \cdot P(x) \cdot Q(x)^3$$

for all real x. *(Matěj Doležálek)*

Solution:

Both sides of the equation are polynomials, which are equal for all $x \in \mathbb{R}$ if and only if their coefficients are equal.

Let m and n be the degrees of P and Q, respectively. Then the equation implies

$$3mn = 1 + m + 3n.$$

By rearranging, we obtain

$$(3n - 1)(m - 1) = 2.$$

Since the degrees are positive integers, both factors must be positive integers. Therefore, there are only two options:

$$3n-1=1 \;\;\&\;\; m-1=2,$$
$$3n-1=2 \;\;\&\;\; m-1=1.$$

Due to $\frac{2}{3}$ not being an integer, the only solution is $n=1$ and $m=2$. Hence we can write

$$P(x)=p_2x^2+p_1x+p_0,$$
$$Q(x)=q_1x+q_0$$

for some $p_2, p_1, p_0, q_1, q_0 \in \mathbb{R}$, such that $p_2, q_1 \neq 0$.

Let us compare the leading coefficients of both sides of the original equation: for the left-hand side we have $p_2 \cdot (q_1^3)^2$ and for the right-hand side we get $p_2 \cdot q_1^3$. Thus, $0 = p_2 \cdot q_1^6 - p_2 \cdot q_1^3 = p_2 q_1^3 \cdot (q_1^3 - 1)$. Given $p_2, q_1 \neq 0$, it follows that $q_1 = 1$.

We'll substitute $x=-q_0$ into both sides. Since $Q(-q_0) = q_0 - q_0 = 0$, we have

$$P(0) = P\left(Q(-q_0)^3\right) = (-q_0)\cdot P(-q_0)\cdot Q(-q_0)^3 = 0,$$

so 0 is a root of P and hence $p_0 = 0$.

Let us now plug in the coefficients and simplify:

$$P\left(Q(x)^3\right) = (x+q_0)^3 \cdot \left(p_2(x+q_0)^3 + p_1\right),$$
$$x \cdot P(x) \cdot Q(x)^3 = x(p_2x^2+p_1x)\cdot(x+q_0)^3.$$

Since the equality holds for $x \neq -q_0$, we have

$$p_2(x+q_0)^3 + p_1 = p_2x^3 + p_1x^2.$$

The linear coefficient on the left-hand side of this equation is $p_2 \cdot 3q_0^2$, but it must also be equal to 0, so $q_0 = 0$. The absolute coefficient then implies $p_1 = 0$.

Therefore, the only possible solutions are $P(x) = p_2x^2$ and $Q(x) = x$ for $p_2 \neq 0$. We can verify that all such pairs indeed satisfy the equation:

$$P\left(Q(x)^3\right) = p_2\left(x^3\right)^2 = p_2x^6,$$
$$x \cdot P(x) \cdot Q(x)^3 = x \cdot p_2x^2 \cdot x^3 = p_2x^6.$$

Solutions of the given equation are thus exactly the pairs $P(x) = p_2x^2$, $Q(x) = x$ for $p_2 \neq 0$.

Poznámky:

Většina řešitelů nalezla správná řešení úlohy, mnoho ale nepoužilo správné argumenty. Pokud je na pravé straně rovnice v součinu x, neznamená to nutně, že je absolutní člen $P(x)$ roven nule.[2] Je třeba vzít v potaz i koeficienty polynomu $Q(x)$ nebo třeba jako ve vzorovém řešení využít kořenu $Q(x)$. *(Hedvika Ranošová)*

[2] Protipříkladem budiž $P(x) = x+1$, $Q(x) = x-1$. Pak $P\left(Q(x)^3\right) = x^3 + 3x^2 + 3x = x(x^2+3x+3)$, ale oba absolutní členy jsou nenulové.

Problem 7.

Tajl lost all his polynomials. He only knows that his polynomials were exactly those polynomials $P(n)$ with integer coefficients which satisfy

$$P(n) \mid n! + 2$$

for all positive integers n. Find all Tajl's polynomials. *(Matěj Doležálek)*

SOLUTION:
Let P be a polynomial satisfying the given condition. Note that P cannot have any positive integer root, i.e. $P(n) \neq 0$ for $n \in \mathbb{N}$. Let $n \in \mathbb{N}$ be arbitrary, then there obviously exists an $N \in \mathbb{N}$ satisfying $N \geq |P(n)|$ and $N \equiv n \mod P(n)$. The introductory text tells us that $a - b \mid P(a) - P(b)$ for all $a, b \in \mathbb{Z}$. In particular, this implies

$$P(n) \mid N - n \mid P(N) - P(n),$$

and hence

$$P(n) \mid P(N) \mid N! + 2.$$

However, $P(n)$ divides $N!$, so it must also divide 2.

It follows that $P(n) \in \{-2, -1, 1, 2\}$ for all $n \in \mathbb{N}$, which means $P(n)$ is bounded and thus has to be constant. The only numbers dividing both $1! + 2$ and $2! + 2$ are 1 and -1. It is easy to check that the constant polynomials $P(n) = 1$ and $P(n) = -1$ satisfy the given condition.

POZNÁMKY:
Téměř všechna správná řešení postupovala podobně jako to vzorové. Mnoho řešitelů uhodlo, že jedinými polynomy splňujícími zadání jsou $P(n) = 1$ a $P(n) = -1$, za což bohužel žádné body nebyly. Někteří také zapomněli na záporné řešení. *(Josef Minařík)*

Problem 8.

Ducky is swimming in a pond full of all polynomials. Polynomial $P(x)$ is called fishy if all of its coefficients are integers and there are infinitely many pairs (a, b) of coprime[3] positive integers, which satisfy

$$a + b \mid P(a) + P(b).$$

Find all fishy polynomials. *(Rado van Švarc)*

SOLUTION:
The zero polynomial is clearly fishy, so we may consider only non-zero polynomials from now on. Let $P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_0$ be a non-zero polynomial of degree n with integer coefficients. We shall prove the following: P is not fishy if and only if there is exactly one even k, such that $0 \leq k \leq n$ and $c_k \neq 0$.

First, let us observe that for any positive integers a, b, we have $b \equiv -a \pmod{a + b}$. Since P has integer coefficients, this implies $P(a) + P(b) \equiv P(a) + P(-a) \pmod{a + b}$. Hence a polynomial is fishy precisely when there exist infinitely many pairs of coprime positive integers (a, b) such that $a + b \mid P(a) + P(-a)$. We can also note that, by Euclid's algorithm, we have $\gcd(a + b, a) = \gcd(a, b) = 1$.

Note that in the expression $P(a) + P(-a)$, all the odd powers of a end up cancelling out, thus the fishiness of P is not affected by any particular choice of coefficients c_ℓ, where ℓ is a positive odd integer. Therefore we can, without loss of generality, assume that $c_\ell = 0$ for all odd ℓ, so that P is an even polynomial, i.e. of the form $P(x) = c_{2m} x^{2m} + c_{2m-2} x^{2m-2} + \cdots + c_0$ for a non-negative integer m and non-zero c_{2m}.

[3] Two numbers are called *coprime* if their greatest common divisor is one.

If c_{2m} is the only non-zero coefficient of P, then all the divisors of $P(a) + P(-a) = 2c_{2m}a^{2m}$ that are relatively prime to a must divide $2c_{2m}$. In particular, they all must be less than or equal to $2c_{2m}$, so only pairs with $a+b \le 2c_{2m}$ can satisfy the divisibility and our polynomial is not fishy.

On the other hand suppose that $c_{2k} \neq 0$ for some $0 \le k < m$, and pick the smallest such k. Further, let a be a prime and $d = |c_{2k}a^{2m-2k} + c_{2k-2}a^{2m-2k-2} + \cdots + c_{2k}| = \left|\frac{P(a)}{a^{2k}}\right|$. Clearly, d is a divisor of $2P(a) = P(a) + P(-a)$. By Euclid's algorithm, if $a > |c_{2k}|$, we have

$$\gcd(d, a) = \gcd(c_{2k}a^{2m-2k} + c_{2k-2}a^{2m-2k-2} + \cdots + c_{2k}, a) = \gcd(c_{2k}, a) = 1.$$

Also, since $2m - 2k \ge 2$ and d is defined as the absolute value of a polynomial in a with degree $2m - 2k$, we will have $d > a$ for all large enough numbers a. Hence for any sufficiently large prime a, this choice of d provides us with a pair $(a, b) = (a, d - a)$ that satisfies all the hypotheses of the problem. Since there are infinitely many primes, this proves that all such polynomials are fishy.

To sum up, we have shown that if P has exactly one non-zero even-indexed coefficient, it is not fishy, and that otherwise, it is fishy, which is precisely what we wanted.

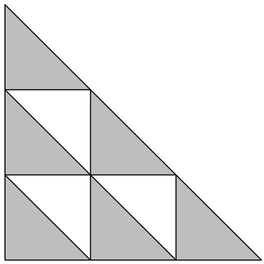
Poznámky:
Někteří řešitelé pouze poznamenali, že všechny liché polynomy vyhovují zadání (nebo se mě o tom dokonce pokusili více či méně seriózně přesvědčit), za což jsem žádné body nedával. Zbylá řešení mě ovšem velmi potěšila a strhával jsem body pouze za všemožné nepřesnosti jako například opomenutí degenerovaného případu, kdy má P pouze jeden nenulový sudý koeficient. *(Danil Koževnikov)*

Entové a n-tice

1. jarní série — Vzorové řešení

Úloha 1.

Entové mají listy tvaru rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku o délce odvěsny 1 rozdělené na podobné trojúhelníčky s délkou odvěsny $\frac{1}{n}$, kde n je věk enta. Trojúhelníčky orientované stejně jako původní trojúhelník jsou tmavé, ty opačně orientované jsou světlé. Ent Stromovous má 5 let a ent Stromovlas 4 roky. Listy kterého z nich mají více tmavé plochy?



Příklad listu pro $n = 3$.

(Marian Poljak)

Řešení:

Všimněme si, že list n-letého enta je rozdělen na n^2 malých trojúhelníčků, neboť délka odvěsny malého trojúhelníčku je $\frac{1}{n}$ a tedy jeho obsah je $\frac{1}{n^2}$ obsahu listu. Tmavých trojúhelníčků je ve spodní vrstvě n, ve vrstvě nad ní $n-1$, nad nimi $n-2$, atd. Celkem tedy máme $n+(n-1)+\cdots+1 = \frac{n(n+1)}{2}$ tmavých listů.

Nyní už snadno dopočteme, že poměr počtu tmavých trojúhelníčku ku celkovému počtu trojúhelníčků na listu je

$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2} = \frac{n+1}{2n}.$$

Protože jsou všechny trojúhelníčky stejně velké, bude poměr obsahu tmavé plochy ku obsahu celého listu také takový.

Vidíme, že čím starší ent je, tím má méně tmavé plochy (neboť funkce $\frac{n+1}{2n}$ je klesající). Dosadíme hodnoty pro Stromovouse: $\frac{5+1}{2\cdot 5} = \frac{3}{5} = 60$ %; a Stromovlase $\frac{4+1}{2\cdot 4} = \frac{5}{8} = 62{,}5$ %; a tím ověříme, že Stromovlas má tmavší listy.

Poznámky:

Téměř všechna řešení došla ke správnému výsledku a většinou, podobně jako vzorák, počítala počet tmavých trojúhelníčků a k tomu buď počet světlých nebo počet všech. Někteří odvodili obecný vzorec pro libovolný věk enta, nicméně stačilo i spočítat obsahy tmavé plochy pro zadané hodnoty.

(Michal Töpfer)

Úloha 2.

Pro přirozené číslo n zjednodušte výraz

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2n-1)^2 - (2n)^2 + (2n+1)^2.$$

(Matěj Doležálek)

Řešení:

Nejprve zpřeházíme pořadí sčítanců a kromě jedničky je popárujeme do závorek:

$$1 + \left(3^2 - 2^2\right) + \left(5^2 - 4^2\right) + \cdots + \Big((2n+1)^2 - (2n)^2\Big).$$

Pak závorky rozložíme na součin podle známého vzorce $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

$$1 + (3-2)(3+2) + (5-4)(5+4) + \cdots + \Big((2n+1) - (2n)\Big)\Big((2n+1) + (2n)\Big).$$

Všimneme si, že každá levá závorka vzniklá z rozkladu je rovna 1, protože je tvaru $(k+1) - k$. Po odstranění závorek tohoto tvaru dostaneme

$$1 + (3+2) + (5+4) + \cdots + \Big((2n+1) + (2n)\Big).$$

Nyní se zbavíme závorek a uspořádáme členy, čímž

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 \cdots + 2n + (2n+1).$$

Zadaný výraz jsme upravili na součet přirozených čísel od 1 do $2n+1$. Pro výpočet si k součtu přidáme ještě nulu, čímž hodnotu nezměníme, a budeme sčítat čísla od 0 do $2n+1$. Popárujeme první a poslední člen součtu, druhý a předposlední a tak dál. Součet každého tohoto páru je $2n+1$. Celkem je těchto párů $\frac{2n+2}{2} = n+1$. Jejich součet je tedy

$$(n+1) \cdot (2n+1) = 2n^2 + 3n + 1.$$

Poznámky:

K výsledku se šlo dostat mnoha způsoby, ten uvedený je asi nejpřímočařejší. Ve všech řešení bylo v nějakou chvíli potřeba sečíst aritmetickou posloupnost, občas trochu ošklivější než tu ve vzorovém řešení. Šlo se při tom odvolat na to, že je to známá věc, a nebylo potřeba to nějak víc rozepisovat. Po tomhle odvolání se ale několik řešitelů jalo dokazovat funkčnost vzorce, který jim vyšel, matematickou indukcí. To je zbytečné, když už věříme vzorcům na součet aritmetické řady.

Několik řešitelů také během úprav ztratilo jedničku. Tato řešení využívala trochu jiné myšlenky na začátku. Je dobré u podobných úloh otestovat výsledný vzorec pro pár hodnot. Z toho by bylo hned vidět, že výsledek je skoro správně a ztracená jednička by se opět našla. *(Martin Hubata)*

Úloha 3.

Ukažte, že do roviny nelze nakreslit devítici úseček tak, aby každá úsečka protínala právě tři jiné úsečky. *(Natália Bátorová)*

Řešení:

Pro spor předpokládejme, že taková situace existuje. Řekneme, že a *protíná* b, pokud mají nějaký společný bod. Všimněme si, že takto definované protnutí chápeme pro každou dvojici přímek dvakrát (a protíná b a b protíná a). Zároveň ale protnutí není to stejné co průsečík (např. jedním bodem můžou procházet tři přímky, potom však v tomto bodě dochází k šesti protnutím).

Pokud se má každá z devíti úseček protínat s třemi dalšími, musí celkem dojít k 27 protnutím. Protože ale počítáme každé protnutí dvakrát, musí jich celkově být sudý počet, což 27 není, čímž docházíme ke sporu.

Poznámky:

Většina řešitelů postupovala správně a dosáhla plného počtu bodů. Řešení často využívala grafových nástrojů a terminologie, což zpravidla vedlo k elegantním formulacím. Mnozí ztotožňovali protnutí s průsečíky, načež museli několikanásobná protnutí ošetřit jako speciální případy. Paritu protnutí však nebylo nutné dokazovat pro každý počet úseček zvlášť – stačilo si uvědomit, že protnutí v situaci s n úsečkami bude $n \cdot (n-1)$, což je vždy sudé číslo.

Několik řešitelů se spletlo a úlohu dokazovalo pro přímky namísto úseček, což je ovšem oslabení úlohy, za něž nebylo možné udělit žádné body. *(Daniel Perout)*

Úloha 4.

O n-tici $a_1, a_2, \ldots, a_n$ řekneme, že je skoro rostoucí, pokud obsahuje každé číslo od 1 do n právě jednou a splňuje současně

(i) $a_i < a_{i+2}$ *pro všechna* $1 \le i \le n-2$,
(ii) $a_i < a_{i+3}$ *pro všechna* $1 \le i \le n-3$.

Dokažte, že počet skoro rostoucích n-tic pro dané n je F_{n+1}, kde F_k značí k-té Fibonacciho číslo definované pomocí $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a rekurence $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ pro $k \ge 2$. *(Josef Minařík)*

Řešení:

Provedeme důkaz (silnou) indukcí. Zjistíme, že počet skoro rostoucích n-tic je dán rekurzivním vztahem jako počet skoro rostoucích $(n-1)$-tic plus počet skoro rostoucích $(n-2)$-tic.

V prvním kroku indukce budeme muset ověřit platnost pro $n = 1$ a $n = 2$. Pokud bychom ověřili pouze první případ, nemohli bychom indukční krok pro $n = 2$ použít, neboť bychom potřebovali znát jak počet 1-tic, tak počet 0-tic, které ale ze zadání neexistují (n-tice má obsahovat čísla od 1 do n, 0-tice proto nemůže existovat). Nyní uvažujme jen ty n-tice, které obsahují čísla od 1 do n: je jen jedna taková 1-tice, a to (1) (počet je roven $F_2 = 1$) a jsou jen dvě dvojice, tj. $(1, 2)$ a $(2, 1)$ (počet je roven $F_3 = 2$). Podmínky (i) a (ii) ze zadání jsou splněny triviálně (i by mělo být mezi 1 a -1 či 0 v první podmínce, respektive -2 či -1 ve druhé podmínce, což nikdy nenastane).

V indukčním kroku bychom chtěli zjistit počet skoro rostoucích n-tic pro $n \ge 3$, přitom předpokládáme, že počet skoro rostoucích $(n-1)$-tic je F_n a počet skoro rostoucích $(n-2)$-tic je F_{n-1}.

Uvažme libovolnou skoro rostoucí n-tici. Číslo n může být pouze na pozici $n-1$ nebo n. Pokud by existovalo $i \le n-2$ takové, že $a_i = n$, pak by existovalo i číslo a_{i+2}, které by z podmínky (i) muselo být (ostře) větší než $a_i = n$. Ale vybíráme pouze čísla z intervalu $\langle 1, n\rangle$, proto k takové situaci nemůže dojít. Můžeme tedy rozlišit dvě skupiny skoro rostoucích n-tic:

(a) n-tice, kde je n na poslední pozici,
(b) n-tice, kde je n na předposlední pozici.

Skupiny (a) a (b) potom ani (zřejmě) nesdílí, ani nevynechávají (viz výše) žádnou skoro rostoucí n-tici.

Skupina (a): Čísla 1 až $n-1$ rozmísťujeme na prvních $n-1$ pozic. Zároveň víme, že se bude muset jednat o skoro rostoucí $(n-1)$-tici. Pokud je $(n-1)$-tice skoro rostoucí, pak rozšířením o n na

n-té pozici získáme také skoro rostoucí posloupnost. (Číslo n na konci splňuje obě dvě podmínky.) Proto n-tic ve skupině (a) bude právě tolik, jako je skoro rostoucích $n-1$-tic, kterých je F_n.

Skupina (b): Jaké číslo může být na poslední pozici? Toto číslo musí být větší než čísla na pozicích $n-2, n-4, \dots$ z podmínky (i). Zároveň z podmínky (ii) musí být větší než číslo $n-3$, které je z podmínky (ii) zase větší než čísla na pozicích $n-5, n-7, \dots$ Tedy číslo na poslední pozici musí být větší než každý prvek n-tice kromě čísla na předposlední pozici. Na poslední pozici proto může být pouze číslo $n-1$. Určitě na prvních $n-2$ pozicích musí být čísla 1 až $n-2$ rozmístěna tak, aby tvořila skoro rostoucí $(n-2)$-tici. Zároveň ale rozšíření libovolné skoro rostoucí $(n-2)$-tice o čísla n a $n-1$ bude znovu skoro rostoucí n-tice – podmínky budou splněny, neboť n i $n-1$ jsou ostře větší než kterékoli z čísel 1 až $n-2$. Proto skoro rostoucích n-tic ve skupině (b) je právě tolik, jako je skoro rostoucích $(n-2)$-tic, kterých je F_{n-1}.

Z výše uvedeného vyplývá, že skoro rostoucích n-tic je právě $F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$, jak jsme chtěli dokázat.

Poznámky:

Téměř všichni řešitelé se vydali cestou indukce a zdárně se dobrali cíle. Často ale chybělo ověření počtu n-tic pro $n = 2$. I sebelepší indukční krok se může rozbít, když neplatí předpoklady – že známe počet $(n-1)$-tic i n-tic. *(Klára „Klátra“ Pernicová)*

Úloha 5.

V lese žije n entů a jedna veverka. Entové stojí na místě, některé dvojice z nich jsou si přitom dost blízko na to, aby mezi nimi zvládla veverka přeskočit. Shodou okolností jsou entové rozestaveni tak, že mezi libovolnými dvěma z nich existuje právě jedna cesta, po které může veverka přeskákat.[4] *Vzdáleností dvou entů rozumíme počet skoků, které veverka potřebuje k tomu, aby se mezi nimi přesunula. Osamělost enta definujeme jako součet jeho vzdáleností od všech ostatních entů. Dokažte, že pokud se osamělosti některých dvou entů liší právě o 1, pak je n liché.* (Radek Olšák)

Řešení:

Úlohu budeme dokazovat obměnou, využijeme tedy ekvivalenci

$$(A \implies B) \iff (\neg B \implies \neg A).$$

Nejprve si zadání lehce zobecníme, přičemž tvrzení ze zadání snadno plyne ze zobecněné verze. Dokážeme, že pokud je rozdíl nějakých osamělostí lichý, tak n je liché. Obměnou tohoto výroku (tedy výrokem ekvivalentním) je, že pokud je n sudé, tak rozdíl libovolných dvou osamělostí bude sudý.

Zvolíme libovolnou hranu stromu (dvojici entů). Nechť se vrcholy (entové), mezi kterými hrana vede, jmenují A a B. Nyní tuto hranu odebereme a tím rozdělíme strom na dvě komponenty souvislosti. Pojmenujme je C_A a C_B podle vrcholu, který obsahují; nechť mají m a $n-m$ vrcholů. Osamělost vrcholu A v C_A je O_A a osamělost B v C_B je O_B.

Nyní si všimneme, že v původním stromu je délka cesty mezi B a vrcholy v C_A o 1 delší než mezi A a vrcholy z C_A. (Zde si vytvoříme fiktivní cestu z A do A s délkou 0, aby délka z B do A byla o jedna delší.)

Osamělost B v původním grafu nazvěme o_B. Komponenta C_A obsahuje m vrcholů, tedy

$$o_B = O_B + O_A + m.$$

Obdobně získáme, že osamělost A je

$$o_A = O_B + O_A + n - m.$$

[4]Formálně řečeno tedy entové představují *strom.* O stromech se lze více dozvědět v seriálu *Letem grafovým světem* zde: *https://prase.cz/archive/34/serial1.pdf.*

Osamělosti odečteme a získáme

$$o_B - o_A = O_B + O_A + m - (O_B + O_A + n - m),$$

což upravíme na

$$o_B - o_A = 2m - n.$$

Pokud je n sudé, tak i rozdíl $o_B - o_A$ je sudý, a tedy osamělosti obou vrcholů mají stejnou paritu. Pokud mají osamělosti každých dvou sousedních vrcholů stejnou paritu, musí mít stejnou paritu i osamělosti libovolných dvou vrcholů.

Tedy rozdíl osamělostí libovolných dvou vrcholů je sudý, pokud n je sudé. To už nám stačí, neboť díky obměně z toho plyne i tvrzení ze zadání.

Poznámky:
Většina správných řešení používala podobnou myšlenku. Některá řešení byla velmi velmi dlouhá, taková dostala $-i$. *(Vojta „Dláža“ Gaďurek)*

Úloha 6.

Ent Pepa má ve svém lese několik stromů. Všiml si, že pro každé dva z nich je rozdíl jejich výšek větší než vzdálenost mezi nimi. Zároveň žádný strom není vyšší než 100 metrů. Pepa by chtěl kolem svých stromů postavit ohradu. Dokažte, že stačí ohrada dlouhá 200 metrů. (Lenka Kopfová)

Řešení:
Uvažujme les s n stromy. Výšky stromů označme $h_1, \dots, h_n$ tak, že platí

$$h_1 > h_2 > h_3 > \dots > h_{n-1} > h_n,$$

tedy strom výšky h_n je nejnižší a strom výšky h_1 nejvyšší. Pepa začne ohrádku stavět od stromu výšky h_1 ke stromu výšky h_2, odtud ke stromu výšky h_3 až ke stromu výšky h_n, odkud ohrádku povede zpět ke stromu výšky h_1. Délku ohrádky označíme ℓ. Tuto délku můžeme vyjádřit jako součet délek úseků vedených mezi jednotlivými stromy. Jelikož platí, že vzdálenost mezi dvěma stromy je menší než rozdíl jejich výšek, tak

$$|h_1 - h_2| + |h_2 - h_3| + |h_3 - h_4| + \dots + |h_{n-1} - h_n| + |h_n - h_1| > \ell.$$

Protože pro $1 \le i \le n-1$ platí $h_i > h_{i+1}$, můžeme odstranit absolutní hodnoty a dostáváme

$$h_1 - h_2 + h_2 - h_3 + h_3 - h_4 + \dots + h_{n-1} - h_n - h_n + h_1 > \ell,$$

kde se všechny výšky kromě h_1 a h_n odečtou. Dostaneme tedy

$$2h_1 - 2h_n > \ell.$$

Jelikož nejvyšší strom s výškou h_1 může mít nejvýše 100 metrů a nejnižší strom musí mít více než 0 metrů, platí

$$100 - 0 > h_1 - h_n,$$

$$200 > 2h_1 - 2h_n > \ell.$$

Pepovi tedy bude na jeho ohrádku stačit 200 metrů, což jsme chtěli dokázat.

Poznámky:
Většina došlých řešení se ubírala správným směrem, v některých případech se nepodařilo myšlenku ukázanou na případu pro tři nebo čtyři stromy zobecnit pro libovolné rozestavění n stromů. Dále se dá ukázat, že takovouto ohrádku délky ℓ lze upravit na konvexní obal všech stromů (tedy na pěknou ohrádku tvořenou konvexním mnohoúhelníkem), přičemž nová ohrádka nepřesáhne délku ℓ, což lze dokázat z trojúhelníkové nerovnosti. *(Klárka Grinerová)*

Úloha 7.

Najděte všechny n-tice reálných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, které jsou řešeními cyklické soustavy rovnic

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_1 - 1 &= a_2, \\ a_2^2 + a_2 - 1 &= a_3, \\ &\vdots \\ a_n^2 + a_n - 1 &= a_1. \end{aligned}$$

(Josef Minařík)

Řešení:

Sečtením všech rovnic v zadání získáme

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n = a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_1,$$

což můžeme upravit na

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = n.$$

Upravením všech rovnic do tvaru $a_i\,(a_i + 1) = a_{i+1} + 1$ a jejich vynásobením dále získáme

$$a_1 a_2 \cdots a_n \cdot (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_n + 1) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_n + 1)\,. \tag{$*$}$$

Nejprve uvažujme případ, kdy pro nějaké j platí $a_j = -1$. Pak jistě $a_{j+1} = a_j^2 + a_j - 1 = -1$, tedy i a_{j+1} je rovno -1 a indukcí máme $a_i = -1$ pro všechna i. Je jasné, že toto je řešení původní soustavy.

Dále tedy nechť žádné a_i není rovno -1, tudíž můžeme v rovnici $(*)$ vydělit pravou stranou, čímž získáme

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \cdots a_n &= 1, \\ a_1^2 a_2^2 \cdots a_n^2 &= 1. \end{aligned}$$

Použitím AG-nerovnosti na (nezáporná) čísla a_i^2 potom získáme

$$n = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geq n \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i^2} = n \sqrt[n]{1} = n.$$

V AG-nerovnosti tedy musí nastat rovnost, k čemuž dojde, jen pokud platí $a_i^2 = 1$ pro každé i. Jelikož ale žádné z a_i není rovno -1, musí být všechna rovna 1. Snadno ověříme, že se jedná o řešení soustavy.

Máme tedy právě dvě řešení, a to $(1, 1, \ldots, 1)$ a $(-1, -1, \ldots, -1)$.

Poznámky:

Řešení, která se vydala stejným směrem jako vzorové, zpravidla zdárně dospěla k cíli. Řešení, která se snažila rozebírat případy podle velikosti některého a_i, naopak většinou mnoho bodů nezískala.

(Václav Janáček)

Úloha 8.

Jsou dány dvě n-tice kladných reálných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pro něž platí

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1.$$

Dokažte, že

$$2\sum_{i<j} x_i x_j \leq \frac{n-2}{n-1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i x_i^2}{1-a_i},$$

kde v sumě na levé straně sčítáme $x_i x_j$ pro všechny dvojice indexů (i,j) splňující $1 \leq i < j \leq n$.

(Magdaléna Mišinová)

Řešení:
Víme, že

$$1 = (x_1 + \cdots + x_n)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + 2\sum_{i<j} x_i x_j,$$

můžeme tedy nerovnost upravit na

$$1 - (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \leq \frac{n-2}{n-1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i x_i^2}{1-a_i},$$

$$1 - \frac{n-2}{n-1} \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i x_i^2}{1-a_i} + x_i^2 \right),$$

$$\frac{1}{n-1} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{1-a_i}.$$

Nyní použijeme známou Cauchyho-Schwarzovu nerovnost, konkrétně její šikovný tvar určený k odhadu součtu zlomků (tzv. *CS zlomkobijec*). Poté využijeme podmínek ze zadání, čímž je úloha vyřešena:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{1-a_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(1-a_i)} = \frac{1}{n-1}.$$

Poznámky:
Kromě originálního řešení od *Ondřeje Lukeše* se všechna správná řešení vydala tímto směrem. Pro více informací o Cauchyho-Schwarzově nerovnosti a obecně o technikách pro řešení podobných úloh bych rád odkázal čtenáře na knihu *Zdolávání nerovností.* *(Marian Poljak)*

Matematická indukce 2

2. SERIÁLOVÁ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Úloha 1.

Ukažte, že pro všechna přirozená čísla $n, k \geq 1$ platí rovnost

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2)\cdots(r+k-1) = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{k+1}.$$

(Kateřina Panešová)

ŘEŠENÍ INDUKCÍ:

Budeme indukovat podle n. Nejprve ověříme platnost pro všechny dvojice $(n, k) = (1, k)$. Dosadíme tedy $n = 1$ do levé strany zadání

$$\sum_{r=1}^{1} r(r+1)(r+2)\cdots(r+k-1) = k! = \frac{k!(k+1)}{k+1} = \frac{(k+1)!}{k+1}.$$

Tudíž pro každou dvojici $(n, k) = (1, k)$ tvrzení platí. Nyní budeme postupovat indukcí, tedy jako indukční předpoklad máme

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{(r+k-1)!}{(r-1)!} = \frac{(n+k)!}{(n-1)!(k+1)}.$$

Budeme postupně upravovat levou stranu zadání pro $n + 1$. V druhé rovnosti použijeme indukční předpoklad, čímž získáme

$$\sum_{r=1}^{n+1} \frac{(r+k-1)!}{(r-1)!} = \frac{n+k!}{n!} + \sum_{r=1}^{n-1} \frac{(r+k-1)!}{(r-1)!} = \frac{(n+k)!}{n!} + \frac{(n+k)!}{(n-1)! \cdot (k+1)} =$$
$$= \frac{(k+1)\cdot(n+k)! + n\cdot(n+k)!}{n!\cdot(k+1)} = \frac{(n+k)!\cdot(k+1+n)}{n!\cdot(k+1)} = \frac{(n+k+1)!}{n!\cdot(k+1)}.$$

To je přesně levá strana pro $n + 1$, tedy tvrzení je dokázáno.

ŘEŠENÍ KOMBINATORICKÝM NEPOČÍTÁNÍM:

Dokazovaný výraz vydělíme $k!$ a přepíšeme si ho do kombinačních čísel. Po úpravě chceme dokázat

$$\sum_{r=1}^{n} \binom{r+k-1}{k} = \binom{n+k}{k+1}.$$

Pravá strana z definice počítá, jak vybrat $n+1$ míčků z řady $n+k$ míčků. Levá strana počítá totéž vyzkoušením všech n možností výběru míčku, který bude mezi vybranými nejvíc vpravo. Ten bude $r+k$-tý pro nějaké r od 1 do n, protože se před něj ještě musí vejít k míčků. Ze všech $(r+k-1)$ míčků před ním pak potřebujeme dovybrat zbylých k. Oba výrazy se tedy rovnají.

Řešení diskrétním kalkulem[5]:
V diskrétním kalkulu si definujeme *rostoucí mocninu* pomocí $x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)(x+n-1)$. Ta se v diskrétním kalkulu chová podobně jako standardní mocnina ve standardním kalkulu, tedy $\Delta x^{\overline{n}} = nx^{\overline{n-1}}$. Úloha po nás chce spočítat

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2)\cdots(r+k-1) = \sum_{r=1}^{n} r^{\overline{k}}.$$

V diskrétním kalkulu má suma roli integrálu, tedy podobně jako ve standardním kalkulu počítáme integrál jako inverz derivace, můžeme v diskrétním kalkulu sumu spočítat jako inverz diference. Takže

$$\sum_{r=1}^{n} r^{\overline{k}} = \frac{n^{\overline{k+1}}}{k+1},$$

což jsme přesně chtěli dokázat.

Poznámky:
Indukci, podobně jako v prvním vzorovém řešení, využila většina řešitelů. Jejich řešení byla převážně správná. Někteří si však neuvědomili, že indukci stačilo provést podle n a snažili se ji provádět i podle k. *(Radek Olšák)*

Úloha 2.

Definujme mocniny jako v druhém dílu seriálu pomocí

$$m^0 = 1, \qquad m^{n+1} = m^n m$$

pro $m, n \in \mathbb{N}_0$. Pomocí indukce dokažte pro $m, n, r \in \mathbb{N}_0$ vztahy

$$\begin{aligned} m^{n+r} &= m^n m^r, \\ m^{nr} &= (m^n)^r, \\ (mn)^r &= m^r n^r. \end{aligned}$$

(Kateřina Panešová)

Řešení:
Nejprve si připomeňme definice sčítání, násobení a mocnění, které plynou z věty o rekurzi dokázané v seriálu:

$$\begin{aligned} &(\alpha 1) \quad m + 0 = m, && (\alpha 2) \quad m + (n+1) = (m+n) + 1, \\ &(\mu 1) \quad m0 = 0, && (\mu 2) \quad m(n+1) = mn + m, \\ &(\pi 1) \quad m^0 = 1, && (\pi 2) \quad m^{n+1} = m^n m. \end{aligned}$$

Kromě těchto definic budeme používat také vztahy

$$\begin{aligned} &(a) \quad 0 + m = m, \\ &(b) \quad 1 + m = m + 1, \\ &(c) \quad 0m = 0, \\ &(d) \quad 1m = m, \end{aligned}$$

které jsme také dokázali v seriálu.

[5] O diskrétním kalkulu se lze více dozvědět třeba v těchto sborníkových příspěvcích:
https://prase.cz/library/DiskretnyKalkulusMSz/DiskretnyKalkulusMSz.pdf,
https://prase.cz/library/iKS-KombiIdentityJL/iKS-KombiIdentityJL.pdf.

Nyní už se můžeme vrhnout na důkaz rovnosti $m^{n+r} = m^n m^r$. Použijeme indukci podle r. Nechť

$$S = \{r \in \mathbb{N}_0;\ m^{n+r} = m^n m^r \text{ pro všechna } m, n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Ověřme, že nula patří do S. Platí

$$\begin{aligned}
m^{n+0} &= m^n && \text{podle } (\alpha 1)\\
&= 0 + m^n && \text{podle } (a)\\
&= m^n \cdot 0 + m^n && \text{podle } (\mu 1)\\
&= m^n(0+1) && \text{podle } (\mu 2)\\
&= m^n \cdot 1 && \text{podle } (a)\\
&= m^n m^0 && \text{podle } (\pi 1),
\end{aligned}$$

takže $0 \in S$. Nyní předpokládejme, že $r \in S$. Potom

$$\begin{aligned}
m^{n+(r+1)} &= m^{(n+r)+1} && \text{podle } (\alpha 2)\\
&= m^{n+r} m && \text{podle } (\pi 2)\\
&= (m^n m^r) m && \text{podle indukčního předpokladu}\\
&= m^n (m^r m) && \text{podle } \textbf{asociativity násobení}\\
&= m^n m^{r+1} && \text{podle } (\pi 2),
\end{aligned}$$

a proto i $(r+1) \in S$. Z třetího Peanova axiomu potom plyne, že $S = \mathbb{N}_0$, což jsme chtěli ukázat.

Dále chceme ukázat rovnost $m^{nr} = (m^n)^r$. Opět použijeme indukci podle r. Definujme

$$S = \{r \in \mathbb{N}_0;\ m^{nr} = (m^n)^r \text{ pro všechna } m, n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Pro $r = 0$ platí

$$\begin{aligned}
m^{n0} &= m^0 && \text{podle } (\mu 1)\\
&= 1 && \text{podle } (\pi 1)\\
&= (m^n)^0 && \text{podle } (\pi 1),
\end{aligned}$$

a tedy $0 \in S$. Nyní předpokládejme, že r je v S. Potom pro $r + 1$ platí

$$\begin{aligned}
m^{n(r+1)} &= m^{nr+n} && \text{podle } (\mu 2)\\
&= m^{nr} m^n && \text{podle první dokázané rovnosti}\\
&= (m^n)^r m^n && \text{podle indukčního předpokladu}\\
&= (m^n)^{r+1} && \text{podle } (\pi 2),
\end{aligned}$$

takže $(r+1) \in S$. Z třetího Peanova axiomu máme $S = \mathbb{N}_0$, tj. rovnost platí pro všechna přirozená čísla.

Pojďme nyní dokázat třetí rovnost, a sice $(mn)^r = m^r n^r$, indukcí podle r. Buď

$$S = \{r \in \mathbb{N}_0;\ (mn)^r = m^r n^r \text{ pro všechna } m, n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Nejprve si všimněme, že

$$\begin{aligned}
(mn)^0 &= 1 && \text{podle } (\pi 1)\\
&= 1 \cdot 1 && \text{podle } (d)\\
&= m^0 n^0 && \text{podle } (\pi 1),
\end{aligned}$$

z čehož $0 \in S$. Pokud $r \in S$, tak platí

$$
\begin{aligned}
(mn)^{r+1} &= (mn)^r(mn) && \text{podle } (\pi 2)\\
&= (m^r n^r)(mn) && \text{podle indukčního předpokladu}\\
&= (m^r n^r)(nm) && \text{podle komutativity násobení}\\
&= m^r(n^r(nm)) && \text{podle asociativity násobení}\\
&= m^r((n^r n)m) && \text{podle asociativity násobení}\\
&= m^r(m(n^r n)) && \text{podle komutativity násobení}\\
&= (m^r m)(n^r n) && \text{podle asociativity násobení}\\
&= m^{r+1}n^{r+1} && \text{podle } (\pi 2),
\end{aligned}
$$

a proto i $(r+1)$ náleží S. Potom třetí Peanův axiom říká, že $S = \mathbb{N}_0$ neboli že rovnost platí pro všechna přirozená čísla r, což jsme chtěli ukázat.

Poznámky:
Ve vzorovém řešení jsem používala vždy co nejnižší možný předpoklad: například raději použiji vztah, který vyplývá z definice, než vztah dokázaný později v seriálu, pokud je to jen trochu možné. Takto je dobře vidět, že důkaz určité vlastnosti třeba závisí na asociativitě, ale už není potřeba komutativita, i když bychom ji samozřejmě do důkazu uměli nějak „nacpat“. Ve Tvém řešení však plně stačí, když použiješ jakékoli tvrzení již dokázané v seriálu.

Řešitelé často zapomínali zdůvodnit, co z čeho vyplývá. Protože smyslem úlohy bylo napsat opravdu formální důkaz jako v seriálu, byla jsem na tohle spíše přísná. Nejčastější chybou bylo nezmínění využití asociativity v první rovnosti, proto jsem ji ve vzoráku vyznačila tučně. Celkově mám z došlých řešení radost, většina byla velmi pěkná a dobře používala tvrzení již dokázaná v seriálu. *(Kateřina Panešová)*

Úloha 3.

Nechť jsou x_1, x_2 navzájem různé kořeny rovnice $x^2 + px - 1 = 0$, kde p je liché celé číslo. Dále pro $n \in \mathbb{N}_0$ označme

$$y_n = x_1^n + x_2^n.$$

Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ jsou y_n a y_{n+1} nesoudělná celá čísla. *(Kateřina Panešová)*

Řešení:
Z Viètových vztahů dostaneme

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= -p,\\
x_1 \cdot x_2 &= -1.
\end{aligned}
$$

Podíváme-li se na hodnoty y_0 a y_1, máme

$$
\begin{aligned}
y_0 &= x_1^0 + x_2^0 = 2,\\
y_1 &= x_1^1 + x_2^1 = -p.
\end{aligned}
$$

Všimněme si, že pro $n \geq 2$ platí

$$y_n = x_1^n + x_2^n = (x_1 + x_2)\left(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}\right) - x_1x_2\left(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}\right) = -py_{n-1} + y_{n-2},$$

čímž jsme získali rekurentní vzorec pro y_n. Použitím indukce teď nejprve dokážeme, že všechna y_n jsou celá:

(1) y_0 i y_1 jsou celá, protože $y_0 = 2$ a $y_1 = -p$, což je ze zadání celé.
(2) Předpokládáme, že y_{n-2} i y_{n-1} jsou celá. Vzhledem k rekurentnímu vzorci pro y_n a tomu, že součet i součin celých čísel je stále celým číslem, je i y_n celým číslem.

Indukcí vyřešíme i nesoudělnost po sobě jdoucích y_n:

(1) y_0 i y_1 jsou nesoudělná, protože $y_0 = 2$ a $y_1 = -p$, což je liché, protože p je ze zadání liché. Liché číslo ale z definice není násobkem 2, což je jediný dělitel y_0 větší než 1.

(2) Předpokládáme, že y_{n-2} a y_{n-1} jsou nesoudělná. Pro spor dál předpokládejme, že existuje dělitel d čísel y_{n-1} a y_n různý od 1. Z rekurentního vzorce pro y_n víme, že d je zároveň i dělitelem $-py_{n-1} + y_{n-2}$. Vzhledem k tomu, že d je dělitelem y_{n-1}, tak je i dělitelem $-py_{n-1}$. To ale znamená, že d je dělitelem y_{n-2}, jinak by d nemohlo být zároveň dělitel $-py_{n-1} + y_{n-2}$ a $-py_{n-1}$. To je ale v rozporu s předpokladem, že y_{n-2} a y_{n-1} jsou nesoudělná.

Poznámky:

Na vztahy odvozené v řešení pomocí Viètových vztahů jde samozřejmě přijít i přes vyjádření kořenů x_1 a x_2 zadané kvadratické rovnice. Použitím zmíněných vztahů si ale ušetříme dost práce.

Rekurentní vzorec pro y_n šel odvodit mnoha způsoby, většina z nich byla podobná tomu ve vzorovém řešení, tedy spočívaly přibližně ve všimnutí si, že součin $(x_1 + x_2)\left(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}\right)$ je skoro to, co chceme, a pak se od něj jen odečetlo to, co přebývalo.

Většina řešení, co nalezla rekurentní vzorec pro y_n, správně zdůvodnila i nesoudělnost po sobě jdoucích y_n. Někteří se opírali o princip použitý v Euklidově algoritmu. Skutečně by tu měl být použitý pouze princip z něj a ne on samotný, protože mimo jiné není zaručeno, že $y_{n-2} > y_{n-1}$. Platí ale zmíněný princip $\mathrm{NSD}\,(x, y) = \mathrm{NSD}\,(x, y - x)$.

Mnoho řešení opomnělo zmínit, proč jsou y_n jsou celočíselná. Body jsem za to nestrhával těm, co přišli na rekurentní vzorec pro y_n, protože z něj to lze nahlédnout, ale šla by navrhnout podobná úloha, kde by celočíselnost nebyla samozřejmostí. *(Martin Hubata)*

Matematická indukce III – V rytmu algoritmů

Milý příteli,
vítáme Tě u třetího a posledního dílu seriálu o matematické indukci. Tentokrát se podíváme na algoritmy, které využívají indukci. Řeč bude o tom, jak najít nejvyššího společného dělitele dvou čísel, jak najít společné kořeny polynomů, ale zabrousíme i do oblasti diofantických rovnic. Poté se podíváme na příklad z trochu jiného soudku, neboť prozkoumáme způsoby seřazení balíčku karet podle jejich hodnoty. Závěrečná kapitola je spíše k zamyšlení nad tím, jak určit, zda algoritmus po nějakém čase doběhne.

Podnětné čtení Ti přejí

autoři

O smyslu algoritmizace

Algoritmus je proces nebo postup, který po konečně mnoha krocích dospěje k nějakému závěru, nejčastěji k vyřešení zadané úlohy. Jednotlivé kroky jsou jednoznačně zadané a často jednoduché na provedení. Zároveň je daný algoritmus v jistém smyslu univerzální, tedy dokáže vyřešit více úloh podobného druhu.

Etymologické okénko. Původ slova algoritmus sahá do 9. století. Název je odvozen od jména perského matematika Al-Chorezmího, který zavedl počítání s arabskými číslicemi (tehdy nazývané indickými) a položil základy algebry. Původní slovo *algorismus* znamenalo pouze počítání v desítkové soustavě. Později se pod vlivem řeckého slova *arithmos* začala používat zkomolenina *algoritmus*. Význam, pod kterým jej známe dnes, však slovo získalo až v 19. století.

Algoritmy však byly známé již starým Babyloňanům 2500 let před naším letopočtem. Staří Řekové zas používali například Eratosthenovo síto pro hledání prvočísel nebo Eukleidův algoritmus, který si představíme i v tomto dílu.

Proč jsou algoritmy užitečné? Ve statistice slouží k analýze dat a také k rozpoznání těch dat, která mají nějaký reprezentativní význam, například při jejich roztřídění do takzvaných clusterů. V aplikované matematice jsou algoritmy používány pro hledání přibližných řešení matematických modelů skutečného světa. Nicméně i v čisté matematice mají algoritmy svůj význam – například pro důkaz existence řešení. Síla algoritmů spočívá také v jejich jednoduchosti a repetitivní podstatě, čehož dokáží počítače využít pro extra rychlé nalezení řešení. Lidé oproti tomu nejsou tak efektivní v provádění ručních opakovaných výpočtů, ale umí napsat program, který to za ně udělá v řádu milisekund!

Dělicí algoritmus

Úmluva. V průběhu budeme pracovat s přirozenými čísly $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ jako jsme je definovali v předchozím díle. Podotkněme, že nulu zde považujeme za přirozené číslo.

Mějme dvě přirozená čísla m, n, kde n je různé od nuly. Již ze základní školy víme, jak se dělí se zbytkem. Při dělení se zbytkem hledáme přirozená čísla q a r, kde r je menší než n, pro která platí

$$m = qn + r.$$

Je tato operace dělení dobře definovaná? Existuje vždy právě jeden výsledek, tedy právě jedna dvojice čísel q a r? Není to na první pohled zřejmé[6], proto si to pojďme dokázat:

Věta. *Nechť m, n jsou dvě přirozená čísla, kde $n \neq 0$. Potom existuje právě jedna dvojice přirozených čísel q a r takových, že $m = qn + r$ a $r < n$.*

Důkaz. Nejprve ukážeme existenci. Postupujme indukcí podle m. Nechť

$$S = \{m \in \mathbb{N}_0;\ m = qn + r \text{ pro nějaká } q, r \in \mathbb{N}_0, r < n\}.$$

Všimněme si, že $0 \in S$, neboť $0 = 0n + 0$. Nyní předpokládejme, že $m \in S$. Potom $m = qn + r$ a $r < n$, tedy

$$m + 1 = qn + r + 1.$$

Jelikož $r < n$, tak $r + 1 \leq n$ (jsme v přirozených číslech). Tedy buď $r + 1 = n$ a dostáváme

$$m + 1 = (q + 1)n + 0,$$

nebo $r + 1 < n$ a potom

$$m + 1 = qn + (r + 1),$$

kde $r + 1 < n$. V obou případech platí $m + 1 \in S$, tedy dle principu indukce (třetího Peanova axiomu) máme $S = \mathbb{N}_0$.

Nyní ukážeme, že daná q a r jsou jednoznačná. Mějme

$$m = qn + r = q'n + r',$$

kde $r, r' < n$. Potom

$$qn \leq m < (q + 1)n,$$
$$q'n \leq m < (q' + 1)n.$$

Z toho dostáváme $qn < (q' + 1)n$, a jelikož $n > 0$, tak $q < q' + 1$, tedy $q \leq q'$, protože pracujeme s přirozenými čísly. Obdobně dostaneme $q' \leq q$, takže dohromady $q = q'$. A z předpokladu pak plyne rovnost zbytků $r = m - qn = m - q'n = r'$. Tedy dvojice čísel q a r je opravdu jednoznačná. □

Přirozeně se můžeme ptát, co se stane, když budeme dělicí algoritmus aplikovat opakovaně. Pojďme to společně probádat.

Nechť a, b jsou dvě přirozená čísla. Potom dle dělicího algoritmu existují q_1 a $r_1 < b$ taková, že

$$a = q_1 b + r_1.$$

Pokračujme dál a aplikujme dělicí algoritmus na čísla b a r_1.

$$\begin{aligned} b &= q_2 r_1 + r_2, \\ r_1 &= q_3 r_2 + r_3, \\ r_2 &= q_4 r_3 + r_4, \\ r_3 &= q_5 r_4 + r_5, \\ &\ \vdots \\ r_i &= q_{i+2} r_{i+1} + r_{i+2}. \end{aligned}$$

[6] Například při dělení se zbytkem v okruhu *Gaussových čísel* $\mathbb{Z}[i]$ není zbytek jednoznačný, takže to rozhodně není samozřejmost! O Gaussových číslech se můžeš dočíst v prvním díle minulého seriálu *Teorie nejen čísel 1.*

Napřed několik pozorování:

Pozorování první. V každém kroku máme dle dělicího algoritmu zaručená čísla q_{i+2} a $r_{i+2} < r_{i+1}$, dokud není nějaký zbytek roven nule, protože nulou dělit nemůžeme (viz dělicí algoritmus).

Pozorování druhé. Získali jsme klesající posloupnost $b > r_1 > r_2 > r_3 > \cdots$

Pozorování třetí. Proces se po nějakém čase vždy zastaví.

Cvičení 1. Rozmysli si, že třetí pozorování vyplývá z prvního a druhého pozorování a z Úlohy 3 v předchozím dílu.

V následující kapitole se k tomuto procesu vrátíme a prozkoumáme jeho další zajímavé vlastnosti!

Eukleidův algoritmus

Pamatuješ si, jak jste ve škole hledali nejvyššího společného dělitele dvou čísel? Postup byl následující: nejprve obě čísla rozložíme na součin prvočísel a poté hledáme, která prvočísla mají oba rozklady společná. Avšak to jsme to trochu uspěchali – jak například víme, že lze pokaždé prvočíselný rozklad najít, a pokud ho náhodou najdeme, jak víme, že je jen jeden? To nám náš postup trochu komplikuje, skoro to vypadá, že by dvě čísla mohla mít více různých největších společných dělitelů!

Abychom si tento problém vyjasnili, potřebujeme nejdřív přesně zadefinovat potřebné pojmy.

Definice. Nechť m, n jsou přirozená čísla, kde n je různé od nuly. Potom říkáme, že n *dělí* m, pokud existuje přirozené číslo k takové, že $m = nk$. Tuto skutečnost zapisujeme jako $n \mid m$.

Všimněme si, že každé číslo (kromě jedničky) má alespoň dva dělitele, jedničku a sebe sama. Některá čísla jsou výjimečná tím, že je už dál dělit nelze.

Definice. Nechť p je přirozené číslo. Potom p je *prvočíslo*, jestliže p má právě dva různé dělitele.

Poznámka. Poznamenejme, že číslo 1 podle definice není prvočíslo. Proč to tak je? Není za tím žádná magie, důvod je ten, že definice vymýšlí lidé tak, aby byly co nejužitečnější. A prostě se hodí, aby jednička prvočíslem nebyla.

Pokud číslo d dělí m a současně dělí i n, potom říkáme, že d je *společný dělitel* čísel m a n. Číslo 1 je tak pokaždé společným dělitelem. Pokud je to zároveň jediný společný dělitel, říkáme, že čísla m a n jsou *nesoudělná*.

Vraťme se nyní k nejvyššímu společnému děliteli.

Definice. Přirozené číslo d je *největším společným dělitelem* čísel m, n, pokud platí následující dvě podmínky:

(i) d je společný dělitel m a n,
(ii) pokud c je dalším společným dělitelem m a n, pak $c \mid d$.

Potom píšeme $d = \mathrm{NSD}(m, n)$.

Poznámka. Rozmysli si, že tato definice je ekvivalentní s tím, že d je největší ze společných dělitelů.

Poznámka. S naší novou definicí můžeme říct, že čísla m a n jsou nesoudělná právě tehdy, když $\mathrm{NSD}(m, n) = 1$.

Přišel čas vrátit se k opakovanému použití dělicího algoritmu, kterým jsme končili předchozí kapitolu. Vyzbrojeni novou terminologií můžeme učinit další pozorování:

Pozorování čtvrté. Pokud proces skončí u $r_{i+2} = 0$, dostáváme rovnost $r_i = q_{i+1} r_{i+1}$, z čehož plyne, že r_{i+1} dělí r_i. O řádek výš máme rovnost

$$r_{i-1} = q_{i+1} r_i + r_{i+1},$$

tedy pravá strana je dělitelná číslem r_{i+1}, protože r_{i+1} dělí r_i. Proto je i r_{i-1} na levé straně dělitelné r_{i+1}. Takto postupujeme pořád nahoru a iterativně dostáváme, že číslo r_{i+1} dělí jak b, tak a, a tudíž je společným dělitelem výchozích dvou čísel.

Za chvíli ukážeme ještě mnohem silnější tvrzení, a sice že r_{i+1} je největším společným dělitelem čísel a a b.

Toto opakované použití dělicího algoritmu má svůj vlastní název – *Eukleidův algoritmus*. Výsledkem Eukleidova algoritmu je právě číslo r_{i+1}, tedy poslední nenulový zbytek.

Věta. *Nechť a a $b \neq 0$ jsou přirozená čísla. Potom Eukleidův algoritmus generuje nejvyššího společného dělitele čísel a a b.*

Důkaz. Nejprve si připomeňme značení jednotlivých členů v algoritmu:

$$\begin{aligned}
a &= q_1 b + r_1,\\
b &= q_2 r_1 + r_2,\\
r_1 &= q_3 r_2 + r_3,\\
r_2 &= q_4 r_3 + r_4,\\
r_3 &= q_5 r_4 + r_5,\\
&\vdots\\
r_i &= q_{i+2} r_{i+1} + r_{i+2},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Když v důkazu používáme algoritmus, měli bychom si položit následující otázky:

(1) Doběhne algoritmus někdy, tedy zastaví se proces po nějakém čase?
(2) Pokud se zastaví, vyhodí nám požadovanou odpověď (v našem případě největšího společného dělitele)?
(3) Jak rychle algoritmus konverguje, tj. jak rychle se blíží ke správné odpovědi?

Prvním krokem důkazu je ukázat, že se algoritmus zastaví, což je součástí Cvičení 1. Nechť r_{i+2} je první zbytek roven nule. Chceme ukázat, že r_{i+1} neboli přecházející zbytek je nejvyšším společným dělitelem čísel a a b.

Druhý krok již máme téměř za sebou: ve čtvrtém pozorování jsme nahlédli, že r_{i+1} je společným dělitelem a a b.

Nyní bychom rádi dokázali, že se jedná o nejvyššího společného dělitele. Budeme postupovat podle naší definice. Nechť tedy d je dalším dělitelem a a b. To znamená, že existují přirozená čísla α a β taková, že

$$a = \alpha d \qquad \text{a} \qquad b = \beta d.$$

Jelikož $a = q_1 b + r_1$, tak $r_1 = (\alpha - q_1 \beta) d$, takže d dělí r_1. Induktivně dostáváme, že d dělí i další zbytky včetně předposledního, tedy d dělí r_{i+1}. Potom dle definice r_{i+1} je nejvyšším společným dělitelem a a b. □

Cvičení 2. Najdi nejvyššího společného dělitele čísel 3570 a 323 nejprve pomocí rozkladu na součin prvočísel a poté použitím Eukleidova algoritmu.

Cvičení 3. Ukaž, že čísla 19891 a 2022 jsou nesoudělná.

Dělicí algoritmus a Eukleidův algoritmus lze použít i pro dva polynomy. Místo zmenšujících se zbytků však potřebujeme něco jiného, co se bude při každé iteraci snižovat, což zaručí, že algoritmus někdy doběhne. Toto „něco“ je pak stupeň polynomu.

Úloha 1. Vyslov tvrzení podobné dělicímu algoritmu pro polynomy s reálnými koeficienty a dokaž jej.

Eukleidův algoritmus pak funguje úplně stejně i pro dva polynomy. Vyzkoušejte si to na úloze!

Úloha 2. Najdi mnohočlen nejvyššího možného řádu, který dělí $x^3 - 9x^2 - x + 105$ a zároveň $x^2 - 9x + 14$.

Úloha 3. Najdi všechny společné kořeny polynomů $x^4 + x^3 - 21x^2 - x + 20$ a $x^3 - x^2 - 22x + 40$.

Nyní přichází na řadu otázka, jak efektivní Eukleidův algoritmus je. Kolikrát je obecně třeba iterovat dělicí algoritmus, než se dostaneme k výsledku? Počet operací můžeme shora odhadnout podle velikosti b: jelikož $b > r_1 > r_2 > \cdots$, tak zbytek nula dostaneme nanejvýš po b aplikacích dělicího algoritmu.

Avšak je možné dosáhnout i přesnějších odhadů!

Věta. *Nechť $a > b > 0$ jsou dvě přirozená čísla. Předpokládejme, že Eukleidův algoritmus pro a a b sestává z N kroků. Potom nejnižší hodnota, které může a (resp. b) nabývat, je Fibonacciho číslo*[7] *$a = F(N+2)$ (resp. $b = F(N+1)$).*

Věta. *Počet iterací v Eukleidově algoritmu nikdy nemůže překročit pět krát počet cifer čísla b.*

Tato věta ukazuje, že horní mez počtu iterací roste úměrně počtu cifer čísla b, což ukazuje na *logaritmický* růst. Růst je měřítkem toho, jaká je cena algoritmu, tedy kolik kroků proces potřebuje, než se zastaví, vzhledem ke vstupním hodnotám, v tomto případě hodnotě čísla b. Je zřejmé, že čím větší čísla do Eukleidova algoritmu vhodíme, tím déle může iterativní proces trvat. Růst potom vyjadřuje konkrétní vztah mezi velikostí vstupu a cenou.

Důkaz těchto vět přesahuje odbornost tohoto textu, přesto je zmiňujeme pro zajímavost. O těchto vlastnostech algoritmu pravděpodobně Eukleides nevěděl, protože například druhá z vět byla dokázána až v roce 1844.

Diofantické rovnice

Ukážeme si zajímavé použití Eukleidova algoritmu při řešení diofantických rovnic. Diofantické rovnice jsou rovnice, jejichž řešení hledáme pouze v oboru celých čísel $\mathbb{Z}$. Taková rovnice může například vypadat takto:

$$13x + 7y = 2,$$

kde $x, y \in \mathbb{Z}$. Zkuste dosadit $(x, y) = (5, -9)$. Jak ale na toto řešení přijít? Existuje obecný postup? Nejsou možná i jiná řešení? Jak najít všechna řešení?

Zkusme použít Eukleidův algoritmus na koeficienty proměnných:

$$\begin{aligned} 13 &= 1 \cdot 7 + 6, \\ 7 &= 1 \cdot 6 + 1. \end{aligned}$$

Dobrá, to nám řeklo jen to, co už jsme dávno věděli: že čísla 13 a 7 jsou nesoudělná. Bodejť, vždyť jsou to prvočísla. Avšak můžeme z toho získat víc ...

[7] Fibonacciho čísla jsou definována rekurzí $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ a $F(n+1) = F(n) + F(n-1)$ pro $n \geq 1$. Více o Fibonacciho číslech najdeš v prvním dílu seriálu.

Postupujme pozpátku, z druhé rovnosti vyjádříme $1 = 7 - 1 \cdot 6$ a z první nerovnosti pak $6 = 13 - 1 \cdot 7$. Dohromady dostáváme

$$1 = 7 - 6 = 7 - (13 - 7) = (-1) \cdot 13 + 2 \cdot 7.$$

Stačí tuto rovnost vynásobit dvěma, abychom dostali

$$2 = (-2) \cdot 13 + 4 \cdot 7,$$

takže jsme zkonstruovali další řešení naší rovnice, a to $(x, y) = (-2, 4)$.

Cvičení 4. Pomocí Eukleidova algoritmu najdi jedno celočíselné řešení

$$27x - 15y = 21.$$

Umíme tedy generovat alespoň jedno řešení (pokud nějaké existuje). Dokonce platí i něco silnějšího: pokud existuje jedno řešení, tak jich už nutně existuje nekonečně mnoho. Než se však pustíme do jejich hledání, zkus si vyřešit následující cvičení, která tě nasměrují na cestu k nalezení odpovědí na otázky v úvodu kapitoly.

Cvičení 5. Ukaž, že rovnice

$$72x - 117y = 42$$

nemá celočíselná řešení.

Cvičení 6. Nechť a a b jsou nesoudělná přirozená čísla. Najdi všechna celočíselná řešení (x, y) rovnice

$$ax + by = 0$$

a ukaž, že jiná řešení nejsou.

Možná už na základě svých pozorování při řešení předchozích cvičení zvládneš sám (sama) dokázat následující větu:

Věta. *Předpokládejme, že (x_0, y_0) je řešení diofantické rovnice $ax + by = c$, kde $a, b, c \in \mathbb{Z}$ jsou dané konstanty. Potom (x, y) řeší tuto rovnici právě tehdy, když $x = x_0 + x_h$ a $y = y_0 + y_h$, kde (x_h, y_h) je (nějakým) řešením* **homogenní** *rovnice*

$$ax + by = 0.$$

Důkaz. Tvrzení, které chceme dokázat, je ekvivalence, takže musíme dokázat oba směry implikace.

Nejprve tedy předpokládejme, že (x, y) řeší (nehomogenní) rovnici $ax + by = c$. Jelikož (x_0, y_0) je také řešením, tak

$$\begin{aligned} 0 &= c - c \\ &= (ax + by) - (ax_0 + by_0) \\ &= a(x - x_0) + b(y - y_0). \end{aligned}$$

Pokud tedy položíme $x_h = x - x_0$ a $y_h = y - y_0$, tak (x_h, y_h) je řešením homogenní rovnice. Potom $(x, y) = (x_0 + x_h, y_0 + y_h)$ má požadovaný tvar.

Nyní ukážeme opačnou implikaci, a sice že $(x, y) = (x_0 + x_h, y_0 + y_h)$, kde (x_h, y_h) řeší homogenní rovnici, je řešením (nehomogenní) rovnice $ax + by = c$. Máme

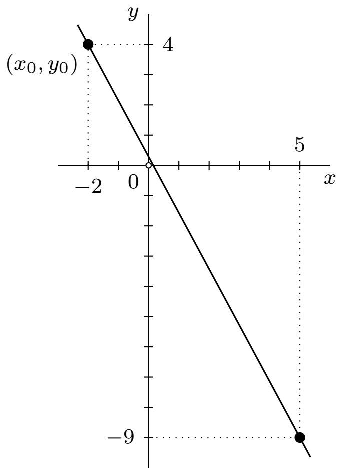
$$\begin{aligned} ax + by &= a(x_0 + x_h) + b(y_0 + y_h) \\ &= (ax_0 + by_0) + (ax_h + by_h) \\ &= c + 0 \\ &= c \end{aligned}$$

a jsme hotovi. □

Dobrá, víme tedy, že stačí najít jedno řešení (x_0, y_0), a pak nejenže $(x, y) = (x_0 + x_h, y_0 + y_h)$ je řešením, ale navíc všechna další řešení mají nutně tento tvar! To nám patřičně zužuje výběr a za chvíli nám to umožní ukázat, že jsme nalezli všechna řešení.

Nyní pojďme prozkoumat, co jsou zač ta řešení homogenní rovnice. Dobrá zpráva je, že jsi už většinu práce odvedl(a), protože jsi jistě poctivě vyřešil(a) Cvičení 6. Důležité je podotknout, že ve Cvičení 6 jsi vyřešil(a) homogenní rovnici pro a a b nesoudělná. Naštěstí je tu „easy fix“: Pokud jsou a a b soudělná, prostě vydělíme celou rovnici jejich největším společným dělitelem. A pokud jím není dělitelné číslo c, tak už díky Cvičení 5 víme, že potom rovnice nemá řešení (v oboru celých čísel) – stačí zobecnit tvrzení pro rovnici $ax + by = c$, která nemá řešení, pokud c není dělitelné největším společným dělitelem čísel a a b.

Řešení diofantické rovnice si můžeme představit i graficky. V rovině $\mathbb{R}^2$ s osami x a y jsou body s celočíselnými souřadnicemi právě mřížové body celočíselné mřížky. Nalezení jednoho konkrétního řešení (x_0, y_0) odpovídá jednomu bodu mřížky. Potom řešení homogenní rovnice určuje, kterým směrem se vydat z tohoto bodu. Všechna řešení pak leží na jedné přímce, která prochází některými mřížovými body, a tyto body jsou hledaná řešení rovnice.



Na obrázku je konkrétní řešení $(x_0, y_0) = (-2, 4)$ rovnice $13x + 7y = 2$, od kterého se vydáme směrem homogenního řešení. V tomto případě přičítáme násobky vektoru $(7, -13)$.

Úloha 4. Najdi všechna řešení diofantické rovnice

$$321x + 17y = 1.$$

Úloha 5. Najdi všechna celočíselná řešení rovnice

$$2022x + 312y = 18.$$

Úloha 6. Odvoď Bézoutovo lemma: Pokud a a b jsou nenulová přirozená čísla, potom existují celá čísla s a t taková, že

$$as + bt = \mathrm{NSD}(a, b).$$

Úloha 7. Nechť a, b a c jsou přirozená čísla taková, že c dělí ab. Ukaž, že pokud $\mathrm{NSD}(a, c) = 1$, tak c dělí b.

Úloha 8. Nechť a, b a c jsou taková přirozená čísla, že $\mathrm{NSD}(a, c) = 1 = \mathrm{NSD}(b, c)$. Dokaž, že potom $\mathrm{NSD}(ab, c) = 1$.

Jak co nejrychleji seřadit balíček karet?

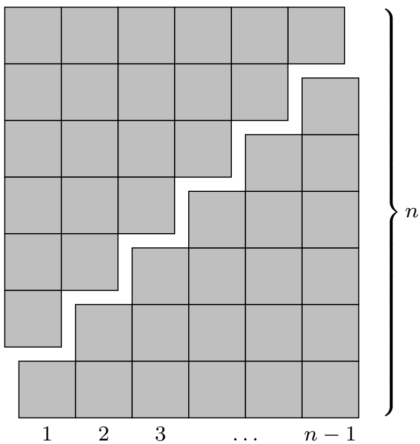
V této kapitole se zaměříme na ryze praktický problém: máme seřadit karty v balíčku vzestupně podle jejich hodnoty a chceme to provést co nejefektivněji.

Intuitivní přístup je brát postupně karty z balíčku a umístit je na správné místo do řady. Představme si, že v balíčku jsou karty s hodnotami 3, 7, 2, 4, 5 v tomto pořadí. Vytáhneme trojku, poté sedmičku položíme napravo od ní, pak vytáhneme dvojku a umístíme ji nalevo od trojky, potom čtyřku dáme mezi trojku a sedmičku a nakonec pětku vložíme mezi čtyřku a sedmičku. Tak jsme čísla seřadili jako 2, 3, 4, 5, 7.

Tomuto přístupu se říká *řazení vkládáním*. Pokud má tento algoritmus provést počítač na n prvcích, hodí se vědět, kolik jednotlivých operací musí v nejhorším možném případě provést. Operacemi myslíme jednotlivá porovnávání dvou prvků. V každém kroku vezmeme jednu kartu z neseřazeného balíčku a postupně ji porovnáváme s prvky v seřazené řadě. Začneme zprava (od největšího): pokud je vkládaná karta větší nebo stejná, umístíme ji napravo a jsme hotovi, je-li však nižší, pokračujeme porovnáním s kartou nalevo, a tak dále. V nejhorším případě musíme kartu porovnat se všemi již vyloženými kartami. Pro n karet tedy musíme provést nanejvýš

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n - 1)$$

jednotlivých porovnání. Že to je v součtu $\frac{n(n-1)}{2}$, to si můžeš dokázat (např. indukcí[8]), pro stručnost to však zde nahlédneme jen pomocí obrázku:



Tedy v nejhorším možném případě musíme provést řádově n^2 operací – to je kvadratický růst, což je pro objemné balíčky karet opravdu hodně.

Řazení vkládáním, při kterém v každém kroku do $n - 1$ již seřazených karet přidáme n-tou na správné místo, však není jediný přístup k řešení našeho problému.

Dalším možným způsobem je *řazení výběrem*. Proces probíhá tak, že z neseřazené řady vybereme nejnižší prvek a umístíme ho na první místo v seřazené řadě. Toto opakujeme s druhým nejnižším

[8] Viz první díl seriálu.

prvkem a tak dále. Kolik porovnání musíme provést? Nejnižší prvek můžeme najít následovně: porovnáme první dva prvky v řadě a z nich vezmeme ten nižší, který porovnáme s následujícím prvkem v řadě, a z těchto dvou opět vybereme ten nižší. Obdobně pokračujeme až na konec řady, kdy nám zbyde ten úplně nejnižší prvek. Hledáme-li tedy nejnižší prvek z řady o n prvcích, musíme provést $n-1$ porovnání. Celkem tedy řazení výběrem pracuje v

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$$

krocích. To už víme, že je dohromady $\frac{n(n-1)}{2}$ kroků. Tedy řazení výběrem trvá stejně dlouho jako řazení vkládáním! Růst je opět kvadratický.

Pro zajímavost si představíme ještě jeden poměrně neefektivní způsob řazení, a tím je *bublinkové řazení*[9]. Nejprve porovnáme první a druhý prvek na začátku řady a případně je prohodíme, pokud je první prvek větší než druhý. Dále porovnáme druhý a třetí prvek a případně jejich pořadí prohodíme. Takto projdeme celou řadu, v každém kroku se soustředíme pouze na dvojici sousedních prvků. Pravděpodobně po tomto prvním projetí řadou nejsou prvky ve správném pořadí. Proto tento proces opakujeme znovu a znovu, dokud není řada seřazená.

Samozřejmě se nabízí otázka, zda nebudeme náhodou „probublávat“ naší řadou donekonečna. Zastaví se algoritmus někdy? Případně jak pozná, že se má zastavit?

Snadno nahlédneme, že nejvyšší číslo vždy probublá na konec řady. Můžeme tedy proces v každém procházení řadou o jeden krok snížit. Postupně tedy zafixujeme poslední číslo, pak předposlední a induktivně dojdeme k závěru, že potřebujeme projet řadou nanejvýš $(n-1)$-krát. Takže algoritmus se po nějakém čase zastaví. Navíc se může zastavit i dřív, pokud jej naprogramujeme tak, že se může zastavit už tehdy, když projede řadou a žádné dva prvky neprohodí. V nejhorším možném případě však musí postupně udělat $(n-1)$ probublání řadou, tedy celkem

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$$

jednotlivých porovnání. Dostali jsme opět stejnou odpověď – kvadratický růst. Není to frustrující – vyzkoušeli jsme již tři různé způsoby řazení a nedostali jsme nic lepšího než kvadratický růst? Naštěstí existují i efektivnější řazení. Pojďme se na jedno podívat.

Představme si, že máme dvě hromádky karet, v nichž je dohromady n karet, které jsou již seřazené. Dokážeme je nyní spojit dohromady? Jistě, otázkou je spíš jak rychle, tedy v kolika krocích.

Cvičení 7. Vymysli způsob, jakým bys spojil(a) dva již seřazené balíčky do jednoho seřazeného. Z kolika kroků (porovnávání) se Tvůj algoritmus skládá?

Chceme seřadit celý balíček, místo toho si však představíme, že řadíme dva menší balíčky, které poté spojíme.

Poznámka. Všimněme si, že předchozí algoritmus řazení vkládáním je vlastně speciálním případem tohoto spojování dvou balíčků dohromady, kdy jeden balíček čítá $n-1$ karet a druhý jen jednu.

Toto jo základní myšlenka algoritmu typu *rozděl a panuj*. Daný problém rozdělíme na menší části, které lze vyřešit, a tyto části pak spojíme. Jak vyřešíme ty menší části? Znovu vyvoláme náš algoritmus – rozdělíme je na ještě menší části, které vyřešíme! Takto pokračujeme dál, dělíme na menší a menší části, až se dostaneme k těm, které lze nějak triviálně vyřešit (v našem případě je triviální jednotkou balíček o jedné kartě, který je rovnou srovnaný). Brzy zjistíme, že tento rekurzivní přístup je rychlejší než řazení vkládáním.

Definujme $P(n)$ jako počet kroků, kolik potřebuje algoritmus rozděl a panuj na seřazení n karet. Pro jednoduchost předpokládejme, že n je mocnina dvou, abychom mohli bez obav dělit balíček na

[9] To nejlepší video najdeš pod tímto odkazem: *https://youtu.be/lyZQPjUT5B4.*

půlky. V triviálním případě pro $n = 1$ máme $P(n) = 0$. Pro $n > 1$ pak dostáváme rekurzivní relaci

$$P(n) = 2 \cdot P\left(\frac{n}{2}\right) + n - 1,$$

což znázorňuje to, že balíček rozdělíme na půlky, které zvlášť vyřešíme v $P\left(\frac{n}{2}\right)$ krocích a poté je spojíme dohromady v $n - 1$ krocích[10]. Vyřešením této rekurzivní rovnice dostaneme počet kroků algoritmu v závislosti na n.

Úloha 9. Pomocí indukce (nebo jinak) ukaž, že $P(n) \leq n \log_2 n$ pro $n = 2^k$, kde k je přirozené číslo.

Tedy počet kroků v tomto algoritmu roste nanejvýš jako $n \log_2 n$, což je pro velká n o mnoho lepší než řazení vkládáním!

Úloha 10. Řazení vkládáním si lze také představit jako rekurenci. Napiš jaké vztahy splňuje příslušné $P(n)$ a indukcí ukaž, že řešením je opravdu $\frac{n(n-1)}{2}$.

Halting problem

Dostaneme-li nějaký algoritmus, vždy bychom si měli položit některé důležité otázky. Ku příkladu výše jsme zkoumali rychlost algoritmu, tedy kolik kroků potřebuje, než dospěje k výsledku. Avšak možná nejdůležitější otázkou je, zda se algoritmus vůbec někdy zastaví. U Eukleidova algoritmu a u bublinkového řazení jsme dokázali, že po nějakém čase se proces vždy zastaví. Existuje však obecný postup, kterým by šlo dokázat, že se algoritmus zastaví či nezastaví?

Problém zastavení zní takto: Máme před sebou algoritmus a nějakou jeho vstupní hodnotu (například dvě čísla, jejichž společného dělitele hledáme). Vložíme-li do algoritmu tuto vstupní hodnotu, zastaví se někdy nebo poběží donekonečna? A teď pojďme o úroveň výš – zkusme navrhnout obecný postup, který by pro daný algoritmus ukázal, zda se zastaví. To znamená navrhnout algoritmus, který toto rozhodne.

Bohužel (nebo naštěstí) se o to pokoušet nemusíme – nemělo by to cenu:

Věta. *Neexistuje žádný algoritmus, který by byl vždy schopen správně rozhodnout, zda se jiný algoritmus vůbec někdy zastaví při zadaném vstupu.*

Důkaz. Naznačíme jen základní myšlenku stojící za důkazem, nebudeme zde zabíhat do detailů. Důkaz využívá takzvanou *diagonální metodu*, která se často objevuje v teorii množin a můžeš ji znát třeba z Cantorova důkazu, že reálná čísla jsou nespočetná množina.

Pro spor připusťme, že existuje algoritmus $\mathrm{Halt}(T, t)$, který pro daný vstup t rozhodne, zda se daný algoritmus T zastaví. Tedy $\mathrm{Halt}(T, t) = 1$, pokud T zastaví při vstupu t, a $\mathrm{Halt}(T, t) = 0$, pokud proces T při vstupu t poběží donekonečna.

Úmluva. Pokud do algoritmu vložíme vstup, který s ním není kompatibilní, předpokládáme, že algoritmus vyhodí chybovou hlášku a zastaví se.

Nyní definujme diagonální funkci $\mathrm{Diagonal}(s)$ takto:

$$\mathrm{Diagonal}(s) = 1, \quad \text{pokud } \mathrm{Halt}(s, s) = 0,$$

zatímco v opačném případě, kdy $\mathrm{Halt}(s, s) = 1$, se proces $\mathrm{Diagonal}(s)$ zacyklí v nekonečné smyčce.

Poznámka. Podle naší úmluvy výše definice dává smysl. Existují algoritmy, které na vstupu přijímají jiný algoritmus. Proto je možné dát do Haltu jako vstup jiný algoritmus, a pokud jej Halt nezvládne zpracovat, prostě se zastaví.

[10]Viz Cvičení 7.

Je to vcelku zvláštní funkce, protože využívá algoritmu Halt pro rozhodnutí, zda algoritmus s zastaví „sám na sobě“. Nyní toto paradoxní odkazování na sebe sama pojďme pozvednout na vyšší úroveň – zeptejme se, co se stane, když do Diagonal vložíme jako vstupní hodnotu algoritmus Diagonal.

Jsou pouze dvě možnosti:

(1) Pokud $\mathrm{Diagonal}(\mathrm{Diagonal}) = 1$, znamená to, že $\mathrm{Halt}(\mathrm{Diagonal}, \mathrm{Diagonal}) = 0$, tedy program Diagonal nikdy nezastaví, je-li vstupem Diagonal. To je ale ve sporu s tím, že $\mathrm{Diagonal}(\mathrm{Diagonal}) = 1$, tedy že Diagonal sám na sobě zastaví (a vyhodí hodnotu 1).

(2) Pokud Diagonal(Diagonal) nikdy nezastaví a zacyklí se v nekonečné smyčce, musí platit $\mathrm{Halt}(\mathrm{Diagonal}, \mathrm{Diagonal}) = 1$. To znamená, že algoritmus Diagonal po nějakém čase zastaví, je-li na vstupu sám Diagonal. To je však spor s předchozím předpokladem, že se Diagonal(Diagonal) zacyklí v nekonečné smyčce.

V obou případech dojdeme ke sporu. Nějaký předpoklad, který jsme v průběhu použili, tedy nebyl pravdivý. A protože jediné tvrzení, jehož pravdivost jsme předpokládali, je to, že existuje algoritmus Halt, tak nutně žádný takový algoritmus neexistuje. Tím je důkaz hotov. ☐

Tuto větu dokázal v roce 1936 anglický matematik Alan Turing. O Turingově práci na rozluštění Enigmy (přístroje, kterým Němci za druhé světové války šifrovali tajné zprávy) se můžeš dozvědět například ve filmu Kód Enigmy (The Imitation Game) z roku 2014.

Ne vždy lze rozhodnout, zda se algoritmus zastaví, případně sice víme, že se zastaví, ale až po nepřiměřeně dlouhé době, přičemž přibližný výsledek dostaneme už za kratší čas. V praxi proto na vstupu často zadáváme, kolik iterací má algoritmus provést, či jak přesný výsledek potřebujeme (například přesnost na čtyři desetinná místa).

Poděkování a rozloučení

Gratulujeme, že ses dočetl(a) až sem! Věříme, že ses při čtení dozvěděl(a) něco nového a hlavně že Tě některá část seriálu podnítila k zamyšlení a hledání odpovědí na otázky, které Ti vyvstaly na mysli. Přejeme mnoho zdaru při řešení seriálových úloh!

Zároveň bychom rádi poděkovali všem orgům, kteří se na seriálu podíleli, a že jich nebylo poskrovnu. Zejména děkujeme Hedvice za jazykové korektury a užitečné postřehy, Matějovi za TEXnickou podporu, krásné obrázky a další nápady a Radovi za odborné korektury. Poděkování patří také Lence a Radkovi, kteří pro vás připravili čokoLeanovou výzvu. A samozřejmě děkujeme všem orgům, kteří pomáhali s výběrem a opravováním úloh.

Návody ke cvičením

2. Největším společným dělitelem je číslo 17. Který způsob byl v tomto případě rychlejší?

3. Použij Eukleidův algoritmus k zjištění, že jejich nejvyšší společný dělitel je 1.

4. $(x, y) = (-7, -14)$.

5. Jaký je největší společný dělitel čísel 72 a 117?

6. Uprav rovnost na $ax = -by$ a podívej se na to, čím jsou jednotlivé strany dělitelné. Jakého tvaru jsou pak x a y?

Odpověď je $x = nb$ a $y = -na$, kde n je celé číslo.

7. Dává smysl vždy porovnat nejmenší dvě karty, z každé hromádky jednu, a tu nižší umístit na následující místo v nové řadě. V nové řadě je potom n karet, tedy proběhlo $n - 1$ porovnávání.

Návody k úlohám

1. Tvrzení: Nechť $a(x)$ a $b(x)$ jsou dva polynomy. Potom existuje právě jedna dvojice polynomů $q(x)$ a $r(x)$ taková, že $a(x) = q(x)b(x) + r(x)$, přičemž stupeň $r(x)$ je ostře nižší než řád $b(x)$.

Důkaz je obdobou důkazu dělicího algoritmu pro přirozená čísla.

2. Nejprve vyděl první mnohočlen druhým, poté pokračuj v duchu Eukleidova algoritmu.

3. Pomocí Eukleidova algoritmu najdi největšího společného dělitele $x^2 + x - 20$. Kořeny tohoto kvadratického polynomu již snadno spočítáš.

4. $(x, y) = (8 - 17n, -151 + 321n)$, kde $n \in \mathbb{Z}$.

5. $(x, y) = (75 - 52n, 486 + 337n)$, kde $n \in \mathbb{Z}$.

6. Použij Eukleidův algoritmus pozpátku.

7. Použij Bézoutovo lemma.

8. Použij Bézoutovo lemma, rovnosti vynásob a uvaž, co musí splňovat jakýkoli společný dělitel ab a c.

9. Použij indukci podle k.

10. $P(1) = 0$ a $P(n) = P(n-1) + n$.

Výsledky podzimní části

	jméno	příjmení	r.	škola	1p	2p	3p	4p	1s	celkem	hist.
1.	*Michal*	*Janík*	3	GKepleraPH	25	25	25	25	15	**115,00**	430
2.	*Samuel*	*Rosiar*	3	GKepleraPH	25	22	25	24	14	**109,57**	561
3.	*Jakub*	*Šošovička*	3	SG CEN BA	22	24	24	24	15	**108,95**	109
4.	*Jan*	*Slíva*	1	GMensaPH	25	22	24	21	15	**107,04**	267
5.	*Matěj*	*Gajdoš*	4	GJatečníÚL	22	23	25	22	15	**107,00**	107
6.	*Michal*	*Kuba*	3	GJPekařeMB	21	22	25	21	11	**100,44**	100
7.	*Jakub*	*Štepo*	3	GEBenešeKL	18	20	25	22	15	**99,78**	515
8.	*Viktor*	*Gola*	1	MG Vsetín	19	20	23	20	11	**94,15**	94
9.	*Veronika*	*Menšíková*	0	ArcibisGPH	21	20	23	16	12	**92,36**	92
10.	*David*	*Hromádka*	1	GNadAlejPH	20	19	19	21	9	**87,61**	88
11.	*Matouš*	*Šafránek*	4	GKepleraPH	25	22	25	–	15	**87,49**	459
12.	*Štěpán*	*Varhaník*	2	G Chrudim	15	18	23	22	7	**84,71**	85
13.	*Helena*	*Muchová*	0	GKepleraPH	20	15	19	16	13	**83,79**	84
14.	*Martin*	*Fof*	4	MendelG OP	15	17	25	12	15	**83,63**	366
15.	*Michal*	*Pecho*	4	SPŠDubnica	21	16	18	19	10	**83,60**	91
16.	*Jan Theodor*	*Hrdý*	1	G UherBrod	19	19	22	11	11	**82,14**	82
17.	*Jaromír*	*Potůček*	3	GKepleraPH	18	20	21	17	4	**79,55**	187
18.	*Jakub*	*Vlček*	3	G Příbor	18	10	20	21	10	**79,25**	286
19.	*Ivan*	*Žemlička*	1	GÚstavníPH	19	19	20	14	6	**77,82**	78
20.	*Benedikt*	*Bareš*	4	G Dobruška	14	14	21	13	15	**77,13**	333
21.	*Ondrej*	*Králik*	1	GAlejKošic	15	21	22	16	–	**73,05**	73
22.	*Ekaterina*	*Danilina*	3	GKepleraPH	16	10	23	20	4	**73,02**	242
23.	*Alica*	*Dományová*	2	G Gröss BA	16	19	14	15	7	**71,39**	71
24.	*Zdeněk*	*Pezlar*	4	GJarošeBO	8	15	11	21	15	**69,58**	656
25.	*Anastasia*	*Bredikhina*	1	GKepleraPH	16	20	19	7	5	**67,74**	271
26.	*Tomáš*	*Flídr*	4	G Kojetín	–	14	12	25	15	**66,84**	703
27.	*Alexandr*	*Tabara*	4	GymnJanŠabr	14	14	15	19	4	**66,09**	369
28.	*Šimon*	*Rada*	4	GKepleraPH	17	8	14	19	9	**65,97**	86
29.	*Daniela*	*Strnadová*	1	GJatečníÚL	2	8	22	21	8	**60,29**	168
30.	*Markéta*	*Hanušková*	4	G VelMeziř	18	15	12	12	3	**59,80**	557
31.	*Lenka*	*Poljaková*	2	GJŠkodyPŘ	16	11	20	11	–	**58,89**	315
32.	*Jakub*	*Černý*	4	GJNerudyPH	11	10	19	9	9	**58,27**	58
33.	*Petr*	*Hladík*	4	GMikul23PL	14	14	12	10	7	**56,80**	516
34.	*Magdaléna*	*Cincibuchová*	0	GKepleraPH	13	15	18	10	–	**56,76**	57
35.	*Denisa*	*Hanušková*	4	G VelMeziř	18	10	17	5	5	**53,92**	542
36.	*Eliška*	*Valentová*	3	GJWolkraPV	–	12	21	20	–	**52,91**	53
37.	*Jan*	*Karásek*	4	GJNerudyPH	8	6	16	14	5	**49,00**	49
38.	*František*	*Janošík*	2	MendelG OP	–	13	13	9	5	**40,38**	40
39.	*Vít*	*Hanika*	3	GKepleraPH	3	17	13	7	–	**39,91**	272

40.	*Veronika*	*Chovancová*	3	PiarGTn	5	13	–	20	–	**38,27**	351
41.	*Hynek*	*Jakeš*	4	SlovanG OL	19	19	–	–	–	**38,23**	104
42.	*Jan*	*Tregler*	2	GKepleraPH	7	13	4	8	6	**38,06**	38
43.	*Lukáš*	*Wendzel*	3	G Fren	–	19	18	–	–	**37,15**	37
44.	*Eliška*	*Andrýsková*	2	GJŠkodyPŘ	5	5	16	9	–	**36,02**	36
45.	*Josef*	*Soural*	3	GBoskovice	–	17	11	–	6	**34,40**	34
46.	*František*	*Hep*	3	CírkGPlzeň	7	7	12	8	–	**34,03**	34
47.	*Michaela*	*Valtrová*	3	MendelG OP	14	7	9	–	2	**32,67**	137
48.	*Daniel*	*Procházka*	4	GUHradiště	14	17	–	–	–	**31,27**	31
49.	*Martin*	*Šindelář*	2	G Gröss BA	–	–	20	10	–	**30,11**	161
50.	*Helena*	*Boušová*	2	G Teplice	15	13	–	–	–	**28,05**	28
51.	*Julie*	*Matulová*	2	G Dobruška	8	6	14	–	–	**27,91**	85
52.	*Thuc Anh*	*Leová*	0	GKepleraPH	8	8	8	–	–	**25,02**	25
53.	*Markéta*	*Kalendová*	2	ArcibisGPH	13	12	–	–	–	**24,89**	25
54.	*Vít*	*Křivonoska*	3	GVoděraPH	14	10	–	–	–	**24,77**	25
55.	*Jiří*	*Jirásek*	3	GMikul23PL	9	11	–	4	–	**24,10**	58
56.	*Bobur*	*Toshtemirov*	3	GMikul23PL	13	10	–	–	–	**23,77**	24
57.	*Ondřej*	*Lukeš*	3	SŠkybernHK	–	–	–	24	–	**23,63**	24
58.	*Vendula*	*Onderková*	4	GJŠkodyPŘ	12	10	–	–	–	**22,70**	418
59.	*Marek*	*Štorek*	2	GNadAlejPH	9	9	–	–	–	**18,96**	19
60.	*Rostislav*	*Litovkin*	2	GHeyrovPH	8	11	–	–	–	**18,89**	19
61.	*Jan*	*Lepič*	3	G Strakon	13	5	–	–	–	**18,39**	62
62.	*Jakub*	*Havlíček*	3	GKepleraPH	8	–	10	–	–	**18,30**	18
63.	*Veronika*	*Neubergová*	2	GKepleraPH	2	5	5	5	–	**17,72**	18
64.	*Lukáš*	*Backa*	2	GŠmejkalÚL	9	9	–	–	–	**17,67**	18
65.	*Jan Martin*	*Valek*	3	SPŠ PansPH	–	16	–	–	–	**16,12**	16
66.	*Patrik*	*Štencel*	1	MendelG OP	–	–	–	16	–	**15,89**	16
67.	*Tadeáš*	*Roblík*	2	GŽidlochov	4	0	8	–	3	**15,29**	15
68.	*Matouš*	*Schnabel*	1	MKG Říčany	–	15	–	–	–	**14,89**	15
69.	*Jana*	*Křivohlavá*	2	GJungmanLT	8	7	–	–	–	**14,80**	26
70.	*Aleš*	*Papáček*	4	G Třeboň	10	5	–	–	–	**14,79**	114
71.	*Sylvie*	*Fürstová*	2	GNVPlániPH	9	–	–	5	–	**14,75**	15
72.	*Vojtěch*	*Štěpán*	3	G Benešov	7	8	–	–	–	**14,62**	28
73.	*Ondřej*	*Popovský*	2	GDoppleraPH	14	–	–	–	–	**14,05**	14
74.	*Adam*	*Kozubek*	4	GŠlapanice	14	–	–	–	–	**14,00**	14
75.	*Štěpán*	*Fröde*	2	G Dobruška	14	–	–	–	–	**13,98**	24
76.	*Daniel*	*Závorka*	3	GNadKavaPH	8	6	–	–	–	**13,53**	14
77.	*Martin*	*Dohnal*	2	GValašKlob	–	5	8	–	–	**13,44**	13
78.–79.	*Jakub*	*Savula*	2	G Jírov ČB	13	–	–	–	–	**13,00**	13
78.–79.	*Michal*	*Uliáš*	4	SPŠSmíchov	2	6	5	–	–	**13,00**	13
80.	*Václav*	*Verner*	1	PORG PH	2	–	9	2	–	**12,56**	187
81.	*Jiří*	*Polách*	3	G FrýdlNOs	–	11	–	–	–	**11,10**	11
82.	*Tobiáš*	*Kohout*	4	NPorg	11	–	–	–	–	**11,00**	11
83.	*Václav*	*Tichý*	2	GKepleraPH	–	5	5	–	–	**10,54**	11
84.	*Kryštof*	*Kastowksý*	4	G Hlučín	10	–	–	–	–	**10,00**	10
85.	*Filip*	*Prutkay*	2	G Gröss BA	–	–	–	10	–	**9,81**	144
86.	*Martin*	*Hraba*	3	G Benešov	–	9	–	–	–	**9,17**	9
87.	*Anna*	*Bártová*	0	GKepleraPH	8	–	–	–	–	**8,34**	8
88.	*Vojtěch*	*Fila*	2	G Litomyšl	2	5	–	–	–	**7,18**	7
89.	*Andrej*	*Mikuš*	4	GCyMeNitra	1	6	–	–	–	**7,00**	7
90.–93.	*Martin*	*Haikl*	3	G TýnNVlt	7	–	–	–	–	**6,79**	7
90.–93.	*Milan*	*Holotňák*	1	G Třinec	7	–	–	–	–	**6,79**	7

90.–93.	*Kryštof*	*Maxera*	1	G Jírov ČB	7	–	–	–	–	**6,79**	7
90.–93.	*Vilém*	*Učík*	1	GJungmanLT	–	7	–	–	–	**6,79**	7
94.	*Aneta*	*Piklová*	4	G Strakon	4	3	–	–	–	**6,14**	72
95.	*Ondřej*	*Svoboda*	2	G Mělník	5	–	–	–	–	**5,27**	5
96.	*Filip*	*Hošek*	2	MKG Říčany	–	5	–	–	–	**5,20**	18
97.	*Tomáš*	*Feldbabel*	2	SPŠ Třebíč	–	5	–	–	–	**5,05**	50
98.	*Karel*	*Procházka*	4	GPBystrica	–	5	–	–	–	**5,01**	115
99.	*Natalia*	*Curzydo*	4	G HavlČTěš	5	–	–	–	–	**5,00**	5
100.	*Matyáš*	*Maroušek*	4	GEBenešeKL	4	–	–	–	–	**4,00**	4
101.	*Kamila Laura*	*Malíková*	2	GEBenešeKL	4	–	–	–	–	**3,65**	4
102.	*Peter*	*Kochelka*	4	GTajBanBys	3	–	–	–	–	**3,22**	271
103.	*Karolína*	*Podivínská*	4	BiskG Brno	3	–	–	–	–	**3,00**	3
104.	*Paulína*	*Dujavová*	4	GRaymanaPV	3	–	–	–	–	**2,77**	39
105.	*Barbora*	*Edlová*	1	G Tachov	3	–	–	–	–	**2,67**	3
106.	*Šimon*	*Lipus*	2	G Třinec	2	–	–	–	–	**1,91**	2
107.	*Ladislav*	*Vávra*	3	G RožnRadh	1	–	–	–	–	**1,45**	12
108.	*Jolana*	*Štraitová*	3	GBudějovPH	1	–	–	–	–	**1,32**	78
109.–112.	*Jan*	*Hrdina*	1	GNVPlániPH	0	–	–	–	–	**0,00**	0
109.–112.	*Martin*	*Chrostek*	3	GBezručeFM	–	0	–	–	–	**0,00**	0
109.–112.	*Petr*	*Kasper*	2	G Teplice	0	–	–	–	–	**0,00**	0
109.–112.	*Kateřina*	*Krninská*	1	G PostupPH	0	–	–	–	–	**0,00**	0

1. jarní série – Entové a n-tice

Výsledková listina

	jméno	příjmení	r.	škola	1	2	3	4	5	6	7	8	re±im	celkem
1.–4.	*Matěj*	*Gajdoš*	4	GJatečníÚL	–	3	–	5	5	5	5	5	25	**25,00**
1.–4.	*Jakub*	*Šošovička*	3	SG CEN BA	–	–	–	5	5	5	5	5	25	**25,00**
1.–4.	*Michal*	*Janík*	3	GKepleraPH	–	3	3	5	5	5	5	5	25	**25,00**
1.–4.	*Samuel*	*Rosiar*	3	GKepleraPH	–	–	–	5	5	5	5	5	25	**25,00**
5.	*Erik*	*Ježek*	0	ZŠŠvehlPH	3	3	3	5	5	5	2	5	23	**24,51**
6.	*Ondřej*	*Lukeš*	3	SŠkybernHK	3	3	0	5	5	5	3	5	23	**23,63**
7.	*Viktor*	*Gola*	1	MG Vsetín	3	3	3	5	5	5	1	–	21	**23,42**
8.	*Ekaterina*	*Danilina*	3	GKepleraPH	3	3	–	5	5	–	5	5	23	**23,23**
9.	*Veronika*	*Menšíková*	0	ArcibisGPH	3	3	3	–	5	5	–	–	19	**23,11**
10.	*Anastasia*	*Bredikhina*	1	GKepleraPH	3	3	3	5	5	5	–	–	21	**22,85**
11.	*Ivan*	*Žemlička*	1	GÚstavníPH	3	3	3	5	5	–	1	–	19	**22,43**
12.	*Jakub*	*Štepo*	3	GEBenešeKL	3	3	3	5	5	5	5	–	23	**22,24**
13.	*Jaromír*	*Potůček*	3	GKepleraPH	3	3	0	5	–	0	5	5	21	**21,76**
14.	*Jakub*	*Vlček*	3	G Příbor	3	3	3	5	5	–	5	–	21	**21,15**
15.	*Jan*	*Tregler*	2	GKepleraPH	3	3	3	5	4	–	–	–	18 – *i*	**20,65**
16.	*Martin*	*Fof*	4	MendelG OP	–	3	3	5	5	5	4	–	22	**20,51**
17.	*Helena*	*Muchová*	0	GKepleraPH	3	3	3	–	–	5	–	–	14	**20,44**
18.	*Veronika*	*Chovancová*	3	PiarGTn	3	3	–	5	5	–	5	–	21	**20,31**
19.–20.	*Michal*	*Kuba*	3	GJPekařeMB	3	2	3	5	5	–	–	–	18	**19,83**
19.–20.	*Josef*	*Soural*	3	GBoskovice	3	3	1	–	5	5	2	–	18	**19,83**
21.–22.	*David*	*Hromádka*	1	GNadAlejPH	3	3	3	5	–	–	–	–	14	**19,28**
21.–22.	*Ondrej*	*Králik*	1	GAlejKošic	3	3	3	3	2	1	1	–	14	**19,28**
23.	*Benedikt*	*Bareš*	4	G Dobruška	–	–	2	5	5	5	3	–	20	**18,02**
24.	*Lucia*	*Kvasničková*	3	GKepleraPH	3	3	3	5	–	1	–	5	19	**17,45**
25.	*Zdeněk*	*Pezlar*	4	GJarošeBO	–	–	–	5	5	5	1	5	21	**17,33**
26.–27.	*Alica*	*Dományová*	2	G Gröss BA	3	2	3	5	–	–	–	–	13	**16,90**
26.–27.	*Štěpán*	*Varhaník*	2	G Chrudim	3	3	2	–	–	–	5	–	13	**16,90**
28.	*Eliška*	*Valentová*	3	GJWolkraPV	3	3	3	5	–	–	–	–	14	**16,36**
29.	*Jakub*	*Černý*	4	GJNerudyPH	3	3	3	–	5	–	2	–	16	**16,00**
30.	*Lenka*	*Poljaková*	2	GJŠkodyPŘ	3	3	–	5	–	–	2	–	13	**15,19**
31.	*Jan Theodor*	*Hrdý*	1	G UherBrod	3	3	–	–	–	2	–	–	8	**13,81**
32.–33.	*Magdaléna*	*Cincibuchová*	0	GKepleraPH	3	–	3	–	–	–	–	–	6	**13,03**
32.–33.	*Thuc Anh*	*Leová*	0	GKepleraPH	3	3	–	–	–	–	–	–	6	**13,03**
34.	*Patrik*	*Jendele*	3	SPŠsPLZ	3	3	–	–	–	5	–	–	11	**12,73**
35.	*Matouš*	*Schnabel*	1	MKG Říčany	3	1	0	–	1	1	1	–	7	**12,64**
36.	*Martin*	*Šindelář*	2	G Gröss BA	3	3	3	–	–	–	–	–	9	**12,09**
37.	*Jan*	*Karásek*	4	GJNerudyPH	3	2	–	4	–	–	1	1	11	**11,00**
38.	*Michal*	*Pecho*	4	SPŠDubnica	3	3	–	5	–	–	–	–	11	**10,89**
39.	*Markéta*	*Hanušková*	4	G VelMezíř	–	–	–	5	4	–	5	–	14	**9,63**

40.–41.	*Martin*	*Dohnal*	2	GValašKlob	3 3 – – – – – – –	6	**9,48**
40.–41.	*František*	*Janošík*	2	MendelG OP	3 – 3 – – – – – –	6	**9,48**
42.	*Jan Martin*	*Valek*	3	SPŠ PansPH	3 – 3 – 1 – – –	7	**9,17**
43.	*Julie*	*Matulová*	2	G Dobruška	3 – 3 – – – – – –	6	**9,10**
44.	*Daniela*	*Strnadová*	1	GJatečníÚL	3 2 0 – – 0 – –	5	**8,99**
45.	*Maxim*	*Čambalík*	1	GJHroncaBA	3 1 – – – – – – –	4	**8,48**
46.	*Sylvie*	*Fürstová*	2	GNVPlániPH	2 – 3 – – – – – –	5	**8,17**
47.	*Vít*	*Hanika*	3	GKepleraPH	3 3 – – – 2 – –	8	**7,90**
48.	*Vlastimil*	*Čejp*	3	GKepleraPH	3 2 0 – – – – – –	5	**6,79**
49.–50.	*Veronika*	*Neubergová*	2	GKepleraPH	3 – – – – – – – –	3	**5,27**
49.–50.	*Tadeáš*	*Roblík*	2	GŽidlochov	3 – – – – – – – –	3	**5,27**
51.	*Aleš*	*Papáček*	4	G Třeboň	3 3 – – – – – – –	6	**5,08**
52.–53.	*Patrik*	*Štencel*	1	MendelG OP	0 0 0 – – – – – –	0	**0,00**
52.–53.	*Martin*	*Kaifer*	3	GKepleraPH	0 0 0 – – – – – –	0	**0,00**

adresa: *Korespondenční seminář*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
web: *http://prase.cz/*
e-mail: *info@prase.cz*