Čtyřky

1. JARNÍ SÉRIE TERMÍN ODESLÁNÍ: 3. ÚNORA 2020

ÚLOHA $\frac{4}{4} \cdot \frac{4}{4}$. (3 BODY)

Tabulka 4×4 je vyplněna čísly 1 a 2 tak, že součet čísel v každém čtverci 3×3 je dělitelný čtyřmi a součet čísel v celé tabulce není dělitelný čtyřmi. Jaký je největší a nejmenší možný součet čísel v tabulce?

ÚLOHA $\frac{4}{4} + \frac{4}{4}$. (3 BODY)

Lenka má čtverec $EFGH$ s délkou strany 1. Na jeho stranách EF, FG, GH, HE leží po řadě body A, B, C, D. Dokažte, že platí

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 \leq 4.$$

ÚLOHA $\frac{4+4+4}{4}$. (3 BODY)

Najděte nejmenší přirozené číslo n takové, že neexistuje celé číslo m, jehož druhá mocnina končí v desítkové soustavě n čtyřkami.

ÚLOHA $4 + \frac{4-4}{4}$. (5 BODŮ)

Mějme čtyřúhelník $ABCD$. Kružnice nad průměry AB, AD se podruhé protnou v bodě A'. Obdobně druhý průsečík kružnic nad průměry BC, BA označíme B', druhý průsečík kružnic nad CD, CB označíme C' a druhý průsečík kružnic nad DA, DC označíme D'. Dokažte, že čtyřúhelníky $ABCD$ a $A'B'C'D'$ jsou podobné.

ÚLOHA $\frac{4 \cdot 4+4}{4}$. (5 BODŮ)

Uvažme posloupnost[1] $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ takovou, že $a_0 = 0$. Další členy definujme následovně. Pro přirozené číslo n označme ℓ_n největší liché číslo, které dělí n. Pak položme $a_n = a_{n-1} + 1$, pokud ℓ_n dává po dělení čtyřmi zbytek 1, a $a_n = a_{n-1} - 1$, pokud dává zbytek 3. Dokažte, že pro každé přirozené číslo m existuje nekonečně mnoho i takových, že $a_i = m$.

ÚLOHA $\frac{4+4}{4} + 4$. (5 BODŮ)

Skupina orgů se rozhodla, že si uspořádají curlingový turnaj. Každý zápas funguje tak, že se čtyři orgové dohodnou a vyzvou na souboj jinou čtveřici. Po skončení turnaje si všimli, že každý hrál proti každému právě v jednom zápase (tzn. byli v opačných týmech). Určete, kolik orgů mohlo být ve skupině.

[1] Pokud nevíš, co je to posloupnost, koukni se na *prase.cz/commentary/C/serie2p/uvod2p.pdf*.

Úloha $4+4-\frac{4}{4}$. (5 bodů)

Ve čtyřstěnu $ABCD$ označme středy kružnic vepsaných trojúhelníkům BCD, CDA, DAB, ABC po řadě I_A, I_B, I_C, I_D. Nechť platí, že úsečky AI_A, BI_B, CI_C a DI_D prochází jedním bodem. Dokažte, že

$$|AB|\cdot|CD| = |AC|\cdot|BD| = |AD|\cdot|BC|.$$

Úloha $4+4+4-4$. (5 bodů)

PraSátka se rozhodla Marianovi k narozeninám, které bude mít v den odeslání této série, dát čtyři polynomy P, Q, R, S s reálnými koeficienty. Chtějí, aby pro libovolná celá čísla x, y, z, t taková, že $xy - zt = 1$, platilo

$$P(x)Q(y) - R(z)S(t) = 1.$$

Určete všechny čtveřice polynomů, které mohou Marianovi dát.

Projektivní geometrie II

2. seriálová série Termín odeslání: 3. února 2020

Úlohy této série jsou řazeny podle témat, nikoliv podle obtížnosti.

Úloha 1. (5 bodů)

Mějme tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Předpokládejme, že v něm existuje bod X splňující $|\sphericalangle XAB| = |\sphericalangle XBC| = |\sphericalangle XCD| = |\sphericalangle XDA|$. Dokažte, že $ABCD$ je harmonický.

Úloha 2. (5 bodů)

Mějme tři kružnice α, β, γ, z nichž každé dvě jsou na sebe kolmé. Nechť X_1, X_2 jsou průsečíky α, β, dále nechť Y_1, Y_2 jsou průsečíky β, γ. Nakonec budiž Z jeden z průsečíků α a γ. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům X_1Y_1Z a X_2Y_2Z se dotýkají v jednom bodě.

ÚLOHA 3. (5 BODŮ)

Mějme konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Předpokládejme, že kružnice nad průměry AB a DC se protínají v bodech X a Y. Označme P průsečík AC, BD a Q průsečík AD, BC. Dokažte, že P, Q, X, Y leží na jedné kružnici.

Přirozená čísla

2. JARNÍ SÉRIE — TERMÍN ODESLÁNÍ: 2. BŘEZNA 2020

ÚLOHA 1. (3 BODY)

Marian napsal na tabuli přirozené číslo a zeptal se svých třiceti sourozenců na jeho dělitele. Jako odpovědi dostal čísla $2, 3, \ldots, 31$. Právě dvě z těchto čísel nebyla děliteli původního čísla, a dokonce se lišila právě o 1. Určete všechny takové možné dvojice.

ÚLOHA 2. (3 BODY)

Najděte nějaké přirozené číslo takové, že jeho pětinásobek je pátá mocnina přirozeného čísla, jeho šestinásobek šestá a jeho sedminásobek sedmá.

ÚLOHA 3. (3 BODY)

Jsou dána přirozená čísla a, b taková, že ab i $(a+1)(b+1)$ jsou druhé mocniny přirozených čísel. Dokažte, že existuje přirozené $n > 1$ takové, že $(a+n)(b+n)$ je druhá mocnina přirozeného čísla.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

Je dána nekonečná posloupnost přirozených čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ taková, že pro každá dvě různá přirozená čísla i, j platí $\mathrm{NSD}(i,j) = \mathrm{NSD}(a_i, a_j)$. Dokažte, že $a_n = n$ pro každé přirozené n.

ÚLOHA 5. (5 BODŮ)

Nechť $\mathbb{P}$ je množina všech prvočísel. Najděte všechny funkce $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ takové, že pro libovolná prvočísla $p, q \in \mathbb{P}$ platí

$$f(p)^{f(q)} + q^p = f(q)^{f(p)} + p^q.$$

Úloha 6. (5 bodů)

Najděte polynom P stupně alespoň 2020 s celočíselnými koeficienty takový, že pro libovolné přirozené n jsou

$$n,\ P(n),\ P(P(n)),\ P(P(P(n))),\ \ldots$$

po dvou nesoudělná čísla.

Úloha 7. (5 bodů)

Radeček si vybral liché přirozené číslo $n > 1$ a napsal na tabuli čísla $n, \ldots, 2n-1$. Pak přišel Danil a zlomyslně mu jedno z nich smazal. Dokažte, že mohl zvolit takové, že součet zbylých čísel není dělitelný žádným z čísel, která byla původně na tabuli.

Úloha 8. (5 bodů)

Jsou dána přirozená čísla n, k taková, že pro libovolné prvočíslo p existuje celé číslo a splňující $p \mid a^k - n$. Rozhodněte, zdali nutně musí n být k-tou mocninou přirozeného čísla.