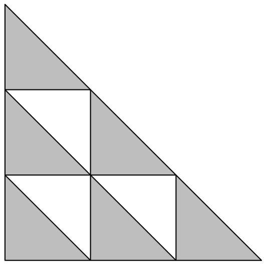
Entové a n-tice

1. JARNÍ SÉRIE — TERMÍN ODESLÁNÍ: 7. ÚNORA 2022

ÚLOHA 1. (3 BODY)

Entové mají listy tvaru rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku o délce odvěsny 1 rozdělené na podobné trojúhelníčky s délkou odvěsny $\frac{1}{n}$, kde n je věk enta. Trojúhelníčky orientované stejně jako původní trojúhelník jsou tmavé, ty opačně orientované jsou světlé. Ent Stromovous má 5 let a ent Stromovlas 4 roky. Listy kterého z nich mají více tmavé plochy?



Příklad listu pro $n = 3$.

ÚLOHA 2. (3 BODY)

Pro přirozené číslo n zjednodušte výraz

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (2n-1)^2 - (2n)^2 + (2n+1)^2.$$

ÚLOHA 3. (3 BODY)

Ukažte, že do roviny nelze nakreslit devítici úseček tak, aby každá úsečka protínala právě tři jiné úsečky.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

O n-tici $a_1, a_2, \ldots, a_n$ řekneme, že je *skoro rostoucí*, pokud obsahuje každé číslo od 1 do n právě jednou a splňuje současně

(i) $a_i < a_{i+2}$ pro všechna $1 \leq i \leq n-2$,
(ii) $a_i < a_{i+3}$ pro všechna $1 \leq i \leq n-3$.

Dokažte, že počet skoro rostoucích n-tic pro dané n je F_{n+1}, kde F_k značí k-té Fibonacciho číslo definované pomocí $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ a rekurence $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ pro $k \geq 2$.

Úloha 5. (5 bodů)

V lese žije n entů a jedna veverka. Entové stojí na místě, některé dvojice z nich jsou si přitom dost blízko na to, aby mezi nimi zvládla veverka přeskočit. Shodou okolností jsou entové rozestaveni tak, že mezi libovolnými dvěma z nich existuje právě jedna cesta, po které může veverka přeskákat.[1] *Vzdáleností* dvou entů rozumíme počet skoků, které veverka potřebuje k tomu, aby se mezi nimi přesunula. *Osamělost* enta definujeme jako součet jeho vzdáleností od všech ostatních entů. Dokažte, že pokud se osamělosti některých dvou entů liší právě o 1, pak je n liché.

Úloha 6. (5 bodů)

Ent Pepa má ve svém lese několik stromů. Všiml si, že pro každé dva z nich je rozdíl jejich výšek větší než vzdálenost mezi nimi. Zároveň žádný strom není vyšší než 100 metrů. Pepa by chtěl kolem svých stromů postavit ohradu. Dokažte, že stačí ohrada dlouhá 200 metrů.

Úloha 7. (5 bodů)

Najděte všechny n-tice reálných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, které jsou řešeními cyklické soustavy rovnic

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_1 - 1 &= a_2, \\ a_2^2 + a_2 - 1 &= a_3, \\ &\vdots \\ a_n^2 + a_n - 1 &= a_1. \end{aligned}$$

Úloha 8. (5 bodů)

Jsou dány dvě n-tice kladných reálných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ a $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pro něž platí

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1.$$

Dokažte, že

$$2\sum_{i<j} x_i x_j \leq \frac{n-2}{n-1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i x_i^2}{1-a_i},$$

kde v sumě na levé straně sčítáme $x_i x_j$ pro všechny dvojice indexů (i, j) splňující $1 \leq i < j \leq n$.

[1] Formálně řečeno tedy entové představují *strom*. O stromech se lze více dozvědět v seriálu *Letem grafovým světem* zde: *https://prase.cz/archive/34/serial1.pdf*.

Matematická indukce 2

2. seriálová série   Termín odeslání: 7. února 2022

V úloze 2 vycházejte z Peanových axiomů a tvrzení dokázaných v seriálu. Ve zbylých úlohách nemusíte.

Úloha 1. (5 bodů)

Ukažte, že pro všechna přirozená čísla $n, k \geq 1$ platí rovnost

$$\sum_{r=1}^{n} r(r+1)(r+2)\cdots(r+k-1) = \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}{k+1}.$$

Úloha 2. (5 bodů)

Definujme mocniny jako v druhém dílu seriálu pomocí

$$m^0 = 1, \qquad m^{n+1} = m^n m$$

pro $m, n \in \mathbb{N}_0$. Pomocí indukce dokažte pro $m, n, r \in \mathbb{N}_0$ vztahy

$$\begin{aligned} m^{n+r} &= m^n m^r, \\ m^{nr} &= (m^n)^r, \\ (mn)^r &= m^r n^r. \end{aligned}$$

Úloha 3. (5 bodů)

Nechť jsou x_1, x_2 navzájem různé kořeny rovnice $x^2 + px - 1 = 0$, kde p je liché celé číslo. Dále pro $n \in \mathbb{N}_0$ označme

$$y_n = x_1^n + x_2^n.$$

Ukažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ jsou y_n a y_{n+1} nesoudělná celá čísla.

Násobky

2. jarní série Termín odeslání: 7. března 2022

Úloha 1. (3 body)
Najděte sto (ne nutně různých) přirozených čísel, jejichž součet je roven jejich nejmenšímu společnému násobku.

Úloha 2. (3 body)
Uvažujme dvojici přirozených čísel a, b takovou, že $a + 13b$ je násobkem 11 a zároveň $a + 11b$ je násobkem 13. Určete nejmenší možnou hodnotu součtu $a + b$.

Úloha 3. (3 body)
Najděte nejmenší přirozené číslo, jehož ciferný součet je 1000 a jehož dvojnásobek má ciferný součet 1010.

Úloha 4. (5 bodů)
Mějme trojúhelník ABC, ve kterém platí $|AB| > |AC|$ a $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$. Označme H jeho ortocentrum a I střed jeho kružnice vepsané. Dokažte, že

$$2 \cdot |\sphericalangle AHI| = 3 \cdot |\sphericalangle ABC|.$$

Úloha 5. (5 bodů)
V čtyřúhelníku $ABCD$ je součet $|BC|$ a $|AD|$ roven dvojnásobku délky úsečky spojující středy AB a CD. Dokažte, že přímky BC a AD jsou rovnoběžné.

Úloha 6. (5 bodů)
Mějme posloupnost přirozených čísel definovanou pomocí $a_1 = 2021$ a vztahu

$$a_{n+1} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 - 1.$$

Dokažte, že a_n má ve svém rozkladu alespoň $2n$ prvočísel včetně násobnosti.[2]

Úloha 7. (5 bodů)
Pro prvočíslo p označme množinu $M_p = \{1, \ldots, p-1\}$. Nalezněte všechna prvočísla p, pro něž existuje funkce f z M_p do M_p taková, že pro každé $n \in M_p$ je $n \cdot f(n) \cdot f(f(n)) - 1$ násobkem p.

Úloha 8. (5 bodů)
Nalezněte všechny dvojice prvočísel p, q, pro něž je $2^p + 2^q$ násobkem čísla pq.

---

[2] Například $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ má v rozkladu 3 prvočísla včetně násobnosti.