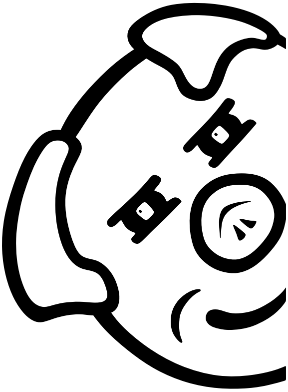
Matematický korespondenční seminář

# Milý příteli!



Vánoce již skončily, ale jako novoroční dárek tu pro Tebe máme druhé komentáře! Nalezneš v nich řešení druhé a třetí podzimní série a prvního dílu seriálu.

K tomu Ti posíláme zadání prvních dvou jarních sérií a také další díl seriálu o matematické indukci. Pokud jsi první díl vynechal(a) a myslíš si, že už nemá cenu se do něj pouštět, věz, že tomu tak není! Za seriálové úlohy ještě můžeš získat celých 30 bodů, a to určitě stojí i za zpětné dostudování prvního dílu.

41. ročník nyní přechází do své jarní části, podle níž budeme zvát nejúspěšnější řešitele na příští podzimní soustředění. Naskýtá se tak skvělá příležitost začít opět s „čistým bodovým štítem" a s plnou vervou se pustit do zdolávání letošních jarních sérií.

Hodně zdaru v novém roce za všechny organizátory přeje

Matěj Doležálek

## Co je dále v komentářích?

- Vzorová řešení 2. a 3. podzimní série
- Vzorové řešení 1. seriálové série
- Seriál – Matematická indukce 2 – Recept na přirozená čísla
- Průběžná výsledková listina

- Příloha: Zadání 1. a 2. jarní série a 2. seriálové série

## Náboj

Mezinárodní týmová matematická soutěž Náboj se v tomto roce uskuteční v pátek 18. března a stejně jako v loňském roce proběhne online. Podrobnosti najdeš na stránkách Náboje[1], důležité pro Tebe ale je, že registrace se spouští již v pondělí 14. února a končí 11. března. Rozhodně je tedy na čase začít se poohlížet po nějakém týmu, protože plno bývá rychle a zájem veliký. Vždyť kolikrát se koná takováto mimořádná událost, při které řeší zároveň a s nadšením několik set lidí matematické úlohy. A když už se jednou za rok tato příležitost naskytne, tak u ní nemůžeš chybět!

## Soustředění

Pro čtyřiadvacet nejlepších z podzimní části letošního ročníku (která končí anglickou sérií) uspořádáme v druhé půlce dubna soustředění. Místo ještě není známé, ale určitě se máš na co těšit a stojí za to o místa na soustředění zabojovat.

*Korespondenční seminář*
*KAM MFF UK*
*Malostranské náměstí 25*
*118 00 Praha 1*

matfyz

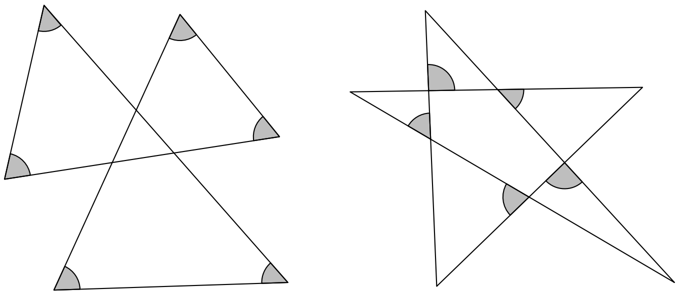
[1] *https://math.naboj.org/*

# Porovnávání

2. podzimní série — Vzorové řešení

## Úloha 1.

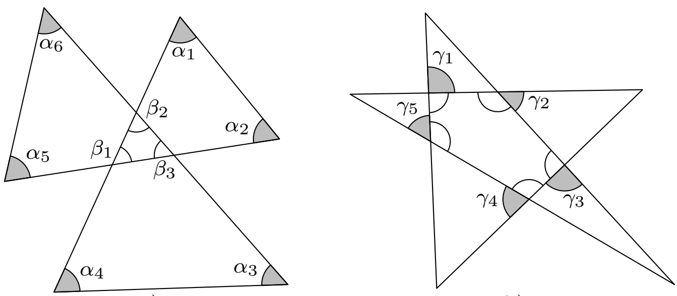
*Rozhodněte a zdůvodněte, zda je součet vyznačených úhlů větší v obrázku a), či v obrázku b).*



a) b)

*(Marian Poljak)*

Řešení:
Nejprve spočteme součet vyznačených úhlů v obrázku a). Vyznačené úhly si označíme $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$, dále si označíme $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ vnitřní úhly trojúhelníka vzniklého z úseček na obrázku. Pak platí $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 = 180°$, protože tyto úhly tvoří trojúhelník. Analogicky tuto úvahu provedeme pro další dvě trojice úhlů. Konečně $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 180°$, proto je součet vyznačených úhlů roven $3 \cdot 180° - 180° = 360°$.




a) b)

V obrázku b) úsečky vytvořily pětiúhelník. Vyznačené úhly $\gamma_1, \ldots, \gamma_5$ jsou pak vždy vedlejší úhly k vnitřním úhlům pětiúhelníka. Součet dvou vedlejších úhlů je vždy $180°$ a součet vnitřních úhlů v pětiúhelníku je $540°$. Dohromady je tedy součet vyznačených úhlů $5 \cdot 180° - 540° = 360°$.

Součet vyznačených úhlů v obou obrázcích je tak stejný.

Poznámky:
Většina řešení byla správná a postupem kopírovala vzorové řešení. Nemá-li úloha zadané konkrétní hodnoty, je třeba vždy sepisovat řešení obecně, jinak nelze získat plný počet bodů. Pokud tedy řešení obsahovalo výsledek jen pro konkrétní rozložení přímek, nezískala žádný bod.

*(Hedvika Ranošová)*

## Úloha 2.

*Nechť $n \geq 2$ je přirozené číslo. Porovnejte $\sqrt{n}$ a*

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}.$$

*(Marian Poljak)*

Řešení:
Všimněme si, že

$$\frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}} = \frac{1}{\sqrt{i}+\sqrt{i+1}} \cdot \frac{\sqrt{i}-\sqrt{i+1}}{\sqrt{i}-\sqrt{i+1}} = \frac{\sqrt{i}-\sqrt{i+1}}{-1} = -\sqrt{i}+\sqrt{i+1}.$$

Dosazením do zadání pak dostáváme

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}} = \\ &= \left(-\sqrt{1}+\sqrt{2}\right) + \left(-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) + \cdots + \left(-\sqrt{n-1}+\sqrt{n}\right) = \\ &= -1+\sqrt{n} < \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Zadaný výraz je tedy ostře menší než $\sqrt{n}$.

Poznámky:
Drtivá většina došlých řešení byla správně a postupovala stejně jako vzorové řešení, případně pomocí indukce.

*(Lenka Kopfová)*

## Úloha 3.

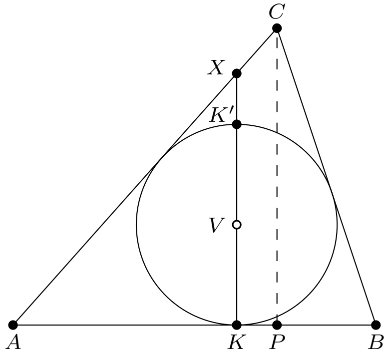
*Pravoúhlý trojúhelník má přeponu délky $c$ a poloměr kružnice vepsané $r$. Dokažte, že $c > 4r$.*

*(Matěj Doležálek)*

Řešení:
Nejprve si ukážeme, že výška v libovolném trojúhelníku je ostře delší než průměr jeho kružnice vepsané.

Uvažme trojúhelník $ABC$ s kružnicí vepsanou $k$, jejíž střed budeme značit $V$ a poloměr $r$. Bod dotyku kružnice $k$ se stranou $AB$ označme $K$. Dále označme $v$ výšku na stranu $c$. Přímka $KV$ musí trojúhelník $ABC$ protnout v alespoň dvou bodech, z nichž jeden je $K$. Druhý průsečík bude ležet na straně $AC$ nebo $BC$ (BÚNO můžeme předpokládat, že leží na $AC$), označme jej $X$. Nechť $K'$ je druhý krajní bod průměru $k$, na němž leží $K$. Protože kružnice vepsaná leží uvnitř trojúhelníku, bude $K'$ také ležet uvnitř trojúhelníku, speciálně $K' \in KX$. Zřejmě $K' \neq K$, ale také $K' \neq X$ (na tečně v $K'$ by ležel bod $A$, ten však leží na tečně v $K$ a tyto tečny jsou rovnoběžky). Průměr $k$ je tedy ostře menší než $|KX|$. Nyní, protože $X$ leží na $AC$, můžeme mluvit o úsečce $XC$ (za úsečku budeme považovat i degenerovaný případ $X = C$). Vzdálenost libovolného bodu $L \in XC$ od $AB$

bude větší nebo rovná $|KX|$. Speciálně tedy vzdálenost $C$ od $AB$, což je délka výšky $v$, je větší než $|KX|$, což je delší než průměr.




Nyní uvážíme pravoúhlý trojúhelník ze zadání úlohy, označíme jeho vrcholy $A$, $B$, $C$, aby $AB$ byla přepona o délce $c$. $C$ leží na Thaletově kružnici nad $AB$, má proto od $AB$ nejvýše vzdálenost poloměru této kružnice, což je $\frac{|AB|}{2} = \frac{c}{2}$, tedy $\frac{c}{2} \geq v$. Z výše dokázaného tvrzení pak $v > 2r$, z čehož dostáváme $c > 4r$.

Poznámky:
Řešení, která se podobala vzorovému, tj. náhledová, bez větších algebraických úvah, dostávala plný počet a imaginární bod.

Největší část došlých řešení využívala úpravy nerovnosti a použití nějakého vzorce pro poloměr kružnice vepsané. Obvykle taková řešení dosáhla úspěchu, a proto získala plný počet bodů.

Na tomto místě bych chtěl upozornit, že korektní postup je od známých nerovností (např. $x^2 \geq 0$) jejich úpravami až k požadované nerovnosti, nebo explicitně uvést, že provedené úpravy jsou ekvivalentní (a tedy nezáleží na pořadí). Za opačný postup (tedy úpravou kýžené nerovnosti) jsem body nestrhával, ale dávejte si na to prosím pozor.

Častým postupem bylo také nejprve ukázat, že při dané délce přepony je délka poloměru $r$ největší pro rovnoramenný trojúhelník, a poté důkaz $c > 4r$ provést právě pro rovnoramenný trojúhelník. Tato cesta byla více riskantní, neboť půlce takových řešení se nepovedlo korektně ukázat první krok. Objevilo se tu více důkazů pomocí derivací (která buď byla špatně, nebo si vysloužila záporný imaginární bod), nebo důkazů, které se odvolávají na vágně formulované vlastnosti goniometrických funkcí (ta byla v drtivé většině špatně). Řešení, která ukázala pouze situaci v rovnoramenném trojúhelníku bez správného důkazu, že stačí ukázat pouze tento jeden případ, dostala jeden bod. *(Daniel Perout)*

## Úloha 4.

*V pravoúhlém trojúhelníku $ABC$ je $M$ střed přepony $AB$. Zvolíme bod $P$ na úsečce $AM$ a bod $Q$ na úsečce $MB$ tak, že $|PQ| = |CQ|$. Dokažte, že platí $|AP| \leq 2 \cdot |MQ|$.* *(Pavel Hudec)*

Řešení:
Z trojúhelníkové nerovnosti pro tři body $C$, $Q$ a $M$ víme, že platí

$$|CQ| + |MQ| \geq |MC|.$$

Protože $ABC$ je pravoúhlý trojúhelník, je střed přepony $M$ zároveň i středem kružnice opsané, tudíž platí $|AM| = |MC|$. Dosadíme-li toto do výše odvozené nerovnosti, získáme

$$|CQ| + |MQ| \geq |AM|.$$

Ze zadání víme, že $|CQ| = |PQ|$, což můžeme znovu dosadit do nerovnosti, abychom dostali

$$|PQ| + |MQ| \geq |AM|.$$

Nyní si uvědomíme, že $|PQ| = |PM| + |MQ|$ a $|AM| = |AP| + |PM|$. Dosadíme, čímž obdržíme

$$\begin{aligned} \Big(|PM| + |MQ|\Big) + |MQ| &\geq |AP| + |PM|, \\ 2|MQ| &\geq |AP|, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

Poznámky:
Řešení se nashromáždilo větší množství a vícero druhů. Většina řešitelů se vydala cestou nalezení nějaké nerovnosti a poté její úpravy na námi hledanou anebo opačnou cestou, tedy prve úprava hledané nerovnosti a pak důkaz, že tato upravená platí. Druhá cesta byla výrazně těžší, i přesto všechna řešení byla správná. Jiní řešitelé se vydali cestou hledaní maxim a minim. Taková řešení nemusí být z principu špatná, ale je potřeba řádně odůvodnit, proč vaše minimum je opravdu minimem a maximum maximem, jinými slovy proč z platnosti vašich speciálních případů vyplývá obecná platnost. Většina přijatých důkazů tohoto typu byla špatně. Část řešení se dala na cestu analytické geometrie. Mezi nimi bychom našli elegantnější i pracná, přesto všechna vedla k úspěchu.

*(Vojta „Dláža“ Gaďurek)*

## Úloha 5.

*Je dáno přirozené číslo $m$ a taková $k$-tice přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$ nepřevyšujících $m$, že každé z čísel $1, 2, \ldots, m$ je dělitelné nanejvýš jedním $a_i$ pro $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Dokažte, že platí*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} \leq \frac{3}{2}.$$

*(Josef Minařík)*

Řešení:
Nerovnost přenásobíme na

$$\frac{m}{a_1} + \frac{m}{a_2} + \cdots + \frac{m}{a_k} \leq \frac{3m}{2}$$

a dokážeme tuto ekvivalentní nerovnost.

Vyřešme nejprve případ, kdy se mezi čísly $a_1, \ldots, a_k$ vyskytuje číslo 1. BÚNO nechť $a_1 = 1$, potom $a_1$ dělí všechna čísla $1, \ldots, m$. Potom už musí být $k = 1$: kdybychom měli ještě nějaké $a_2$, pak by ze zadání nepřevyšovalo $m$, ale přitom by bylo násobkem $a_1$ i $a_2$, což je spor se zadáním. Máme tedy $k = 1$ a nerovnost $\frac{m}{a_1} = m \leq \frac{3m}{2}$ zjevně platí. Ve zbytku řešení nyní můžeme předpokládat, že všechna $a_i$ jsou větší než 1.

Označme $N(a_i)$ množinu násobků $a_i$ mezi čísly $1, \ldots, m$. Násobkem $a_i$ je každé $a_i$-té číslo, takže $N(a_i)$ má přesně $\left\lfloor \frac{m}{a_i} \right\rfloor$ prvků.[2] Dále ze zadání víme, že jednotlivé množiny $N(a_i)$ jsou navzájem disjunktní, neboť žádné z čísel $1, \ldots, m$ nemá jako dělitele dvě různá $a_i$. Jelikož navíc předpokládáme, že žádné z $a_i$ není 1, víme, že žádná množina $N(a_i)$ neobsahuje číslo 1. Tím pádem jsou jednotlivé $N(a_i)$ navzájem disjunktní podmnožiny $(m-1)$-prvkové množiny $\{2, 3, \ldots, m\}$, takže máme

$$m - 1 \geq |N(a_1)| + |N(a_2)| + \cdots + |N(a_k)| = \left\lfloor \frac{m}{a_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{a_2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{a_k} \right\rfloor.$$

[2] Pro reálné číslo $x$ značí $\lfloor x \rfloor$ *dolní celou část* z $x$, tedy největší celé číslo, které nepřevyšuje $x$.

Dále využijeme vztahu $\lfloor x\rfloor \le x < \lfloor x\rfloor + 1$. Díky němu máme odhad na levou stranu dokazované nerovnosti pomocí

$$\begin{aligned}\frac{m}{a_1}+\frac{m}{a_2}+\cdots+\frac{m}{a_k} &\le \left(\left\lfloor\frac{m}{a_1}\right\rfloor+1\right)+\left(\left\lfloor\frac{m}{a_2}\right\rfloor+1\right)+\cdots+\left(\left\lfloor\frac{m}{a_k}\right\rfloor+1\right)\\ &\le \left\lfloor\frac{m}{a_1}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{m}{a_2}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{m}{a_k}\right\rfloor+k \le m-1+k.\end{aligned}$$

K dokázání nerovnosti $\frac{m}{a_1}+\frac{m}{a_2}+\cdots+\frac{m}{a_k} \le \frac{3m}{2}$ už tak stačí, abychom dokázali $k \le \frac{m}{2}+1$.

Pro spor tedy předpokládejme, že $k > \frac{m}{2}+1$. Mezi čísly $1,\ldots,m$ máme přesně $\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil$ lichých čísel.[3] Rozdělme tedy tato čísla do $\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil$ skupinek podle jejich největšího lichého dělitele. Dostaneme tak skupinky

$$\begin{array}{rrrrrl} 1, & 2, & 4, & 8, & 16, & \ldots;\\ 3, & 6, & 12, & 24, & 48, & \ldots;\\ 5, & 10, & 20, & 40, & 80, & \ldots;\\ \vdots &&&&& \end{array}$$

Pro horní celou část platí odhad $\left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil < \frac{m}{2}+1$, takže jelikož $k > \frac{m}{2}+1$, musí už nutně být $k > \left\lceil\frac{m}{2}\right\rceil$. Z Dirichletova principu tak v jedné z výše uvedených skupinek musí ležet dvě různá $a_i$, $a_j$. BÚNO uvažme $a_i < a_j$. Čísla ve stejné skupince se liší jen přenásobením o nějakou mocninu dvojky, takže $a_j = a_i \cdot 2^r$ pro nějaké přirozené $r$. To pak ale speciálně znamená, že $a_i \mid a_j$, takže číslo $a_j \le m$ je násobkem jak $a_j$, tak $a_i$, což je spor se zadáním.

Určitě tak muselo platit $k \le \frac{m}{2}+1$, což už dohromady s předchozím odhadem dá

$$\frac{m}{a_1}+\frac{m}{a_2}+\cdots+\frac{m}{a_k} \le \frac{3m}{2},$$

jak jsme chtěli.

Poznámky:

Z došlých devíti řešení byla jen dvě, která si zasloužila nějaké body. Obě z nich vedla až k cíli a více či méně odpovídala vzorovému řešení.

Část ze zbylých řešení rozebrala několik neobecných případů (za což pochopitelně body uděleny nebyly). Opakovalo se taky řešení, které jako $a_1,\ldots,a_k$ vzalo $\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor,\ldots,m$, v žádném z nich ale nebyl důkaz optimality (zřejmě proto, že toto není optimální přiřazení), proto za toto řešení též nebyly uděleny žádné body. *(Daniel Perout, Matěj Doležálek)*

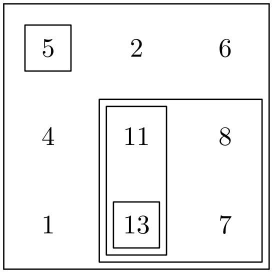
## Úloha 6.

*PraSestán je tvořen tabulkou s $m \times n$ políčky, na každém z nichž se pase nějaké množství prasat. Pohraničím obdélníkové oblasti $O$ tvořené políčky tabulky rozumíme množinu těch políček, která neleží v $O$, ale která s některým políčkem v $O$ sousedí stranou. Obdélníková oblast $O$ je bohatá, pokud se na každém políčku v $O$ pase více prasat než na každém políčku v pohraničí $O$, které s ním sdílí sloupec či řádek (nemusí však nutně sousedit). Kolik nejvíce bohatých obdélníkových oblastí se může v PraSestánu nacházet, pokud smíme libovolně upravit počty prasat na jednotlivých políčkách?*

---

[3] Pro reálné číslo $x$ značí $\lceil x\rceil$ *horní celou část* z $x$, tedy nejmenší celé číslo, které je větší nebo rovno $x$.

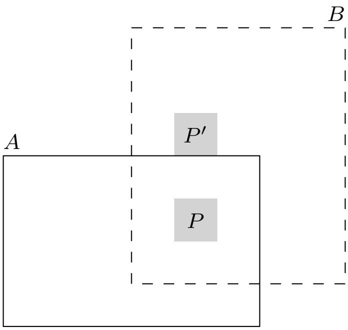
*Například v následující tabulce s počty prasat jsou bohatými právě všechny zvýrazněné obdélníkové oblasti (včetně celého PraSestánu):*




*(Pavel Hudec)*

Řešení:

Ukážeme, že každé políčko může být nejmenší v nejvýše jedné bohaté oblasti. Předpokládejme pro spor, že políčko $P$ je nejmenší ve dvou různých obdélníkových oblastech, označme je $A$ a $B$. Nyní se podívejme na políčko $P'$, které je v pohraničí jedné oblasti a zároveň leží uvnitř druhé. Takové políčko vždy existuje, protože oblasti $A$ a $B$ se musí překrývat a zároveň nejsou stejné. Dostáváme spor, protože počet prasat na $P$ má být v obou oblastech minimální, ale zároveň musí být větší než počet prasat na $P'$, aby oblasti byly bohaté. Každé políčko je proto nejmenší v maximálně jedné bohaté oblasti, a bohatých oblastí tak může být nejvýše $mn$.




Ještě zbývá najít tabulku s právě $mn$ bohatými oblastmi. To je ovšem jednoduché, stačí umístit $x + y$ prasat na políčko o souřadnicích $x, y$ (číslováno od levého horního rohu). Všechny oblasti obsahující pravý dolní roh potom budou bohaté.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

Poznámky:
Přibližně polovina řešitelů přišla na to, že maximální počet bohatých oblastní je $mn$. Nejčastější špatnou odpovědí bylo $\lceil \frac{mn}{2} \rceil$. Důkaz, že více nejde, potom zvládlo ještě méně řešitelů. Většina z nich používala indukci, která sice funguje, ale není příliš elegantní. Úlohu nikdo nevyřešil vzorovým způsobem.
*(Josef Minařík)*

## Úloha 7.

*Jsou dána kladná reálná čísla $a$, $b$, $c$, $d$ splňující nerovnosti $a, c > 1$ a $b, d < 1$. Dokažte, že platí*

$$\frac{a}{ab+c+1} + \frac{b}{bc+d+1} + \frac{c}{cd+a+1} + \frac{d}{da+b+1} > 1.$$

*(Pavel Hudec)*

Trikové (hezké) řešení:
Všimneme si, že pokud máme dvojici reálných čísel $(x, y)$, jež splňují $x > 1 > y$, tak platí $(1-y)(x-1) > 0$, což se po roznásobení upraví na $x + y > xy + 1$. Použijeme-li toto pozorování pro různé dvojice $(a, b)$, $(a, d)$, $(c, b)$ a $(c, d)$, tak dostaneme nerovnosti

$$\begin{aligned} a + b &> ab + 1, \\ b + c &> bc + 1, \\ c + d &> cd + 1, \\ d + a &> da + 1. \end{aligned}$$

K dokázání zadané nerovnosti nyní zbývá pouze použít nejprve tyto čtyři nerovnosti a poté kladnost čísel $a$, $b$, $c$, $d$, abychom odhadli jmenovatele zlomků:

$$\begin{aligned} &\frac{a}{ab+c+1} + \frac{b}{bc+d+1} + \frac{c}{cd+a+1} + \frac{d}{da+b+1} > \\ &> \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} > \\ &> \frac{a}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{b}{a+b+c+d} + \frac{d}{a+b+c+d} = 1. \end{aligned}$$

Standardní (mírně ošklivé) řešení:
Obdobně jako v prvním řešení můžeme odvodit i nerovnosti $a(a-1)(1-b) > 0$, $b(b-1)(1-c) > 0$, $c(c-1)(1-d) > 0$ a $d(d-1)(1-a) > 0$. Zároveň zjevně platí $ab > 0$, $bc > 0$, $cd > 0$ a $da > 0$. Sečtením těchto osmi nerovností a ekvivalentními úpravami získáváme:

$$\begin{aligned} a(a-1)(1-b) + b(b-1)(1-c) + c(c-1)(1-d) + d(d-1)(1-a) + ab + bc + cd + da &> 0, \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2bc + 2cd + 2da > a^2b + b^2c + c^2a + d^2a + a + b + c + d&, \\ (a+b+c+d)^2 > a^2b + b^2c + c^2d + d^2a + a + b + c + d + 2ac + 2bd&. \end{aligned}$$

Nyní můžeme na levou stranu nerovnosti ze zadání použít CS zlomkobijce[4] po rozšíření všech zlomků jejich čitateli, abychom ji zredukovali na výše dokázanou:

$$\begin{aligned} &\frac{a}{ab+c+1} + \frac{b}{bc+d+1} + \frac{c}{cd+a+1} + \frac{d}{ad+b+1} = \\ &> \frac{a^2}{a^2b+ac+a} + \frac{b^2}{b^2c+bd+b} + \frac{c^2}{c^2d+ca+c} + \frac{d^2}{d^2a+db+d} \geq \\ &> \frac{(a+b+c+d)^2}{a^2b+b^2c+c^2d+d^2a+a+b+c+d+2ac+2bd} > 1. \end{aligned}$$

[4]Pokud ses s touto nerovností dosud nesetkal(a), můžeš si o ní něco přečíst například v prvním dílu seriálu o nerovnostech na *https://prase.cz/archive/29/9.pdf*.

Poznámky:
Většina správných řešení se vydala poněkud pracnější cestou skrz CS zlomkobijce. Proto jsem se rozhodl všechny postupy, které se zcela vyhnuly roznásobování, odměnit kladným imaginárním bodem. Nejčastějším kamenem úrazu v chybných řešeních byla neopodstatněná tvrzení o tom, jaká volba $a$, $b$, $c$, $d$ je optimální (například že můžeme BÚNO brát $b = 0$ nebo $d = 0$). I vyřešením speciálních případů ovšem bylo možné získat částečné body, pokud se použitá metoda dala s trochou práce využít i při důkazu celé nerovnosti (například za pozorování, že platí $(1 - a)(1 - b) < 0$).

*(Danil Koževnikov)*

## Úloha 8.

*U kulatého stolu je na židlích rozesazeno $n$ reálných čísel. Židli ž nazveme dobrou, pokud má nějaká skupinka[5] po sobě jdoucích židlí začínající od ž a pokračující po směru hodinových ručiček nezáporný součet svých čísel. Dokažte, že součet čísel na dobrých židlích je nezáporný.*

*(Pavel Hudec)*

Řešení:
Pro každou dobrou židli označíme *vhodnou skupinku* tu nejkratší skupinku židliček, která je od ní po směru hodinových ručiček a jejíž součet je nezáporný. Podívejme na jakoukoliv dobrou židli. Pro ni vhodná skupinka nechť má $m$ židlí, jejichž čísla označíme $z_1$ (což je číslo na naší vybrané dobré židli) až $z_m$. Označme $z_j$ číslo na libovolné jiné židli v této skupince.

Jistě platí

$$\sum_{i=1}^{j-1} z_i < 0,$$

jinak by skupinka židlí s čísly od $z_1$ do $z_{j-1}$ byla kratší. Kdyby platilo $\sum_{i=j}^{m} z_i < 0$, sečtením obou nerovností bychom dostali $\sum_{i=1}^{m} z_i < 0$, což není možné. Jistě tedy platí

$$\sum_{i=j}^{m} z_i \geq 0.$$

To znamená nejen to, že židle s číslem $z_j$ je dobrá, ale zejména to, že vhodná skupinka pro židli s číslem $z_j$ nesahá za židli s číslem $z_m$. Z toho plyne, že žádné dvě nejkratší skupinky se neprotínají částečně – buď nemají žádnou společnou židli, nebo je jedna z nich podmnožinou druhé.

Prozkoumejme teď ty skupinky dobrých židlí, které nejsou podmnožinou větších skupinek, říkejme jim *maximální vhodné*. Každá dobrá židle je v právě jedné maximální vhodné skupince a všechny židle těchto skupinkách jsou dobré. Sečtením čísel na židlích ve všech maximálních vhodných skupinkách tak získáme celkový součet čísel sedících na dobrých židlích. Přitom každá z maximálních vhodných skupinek má nezáporný součet čísel na jejích židlích (protože sama je vhodná pro nějakou židli), tedy nám musí vyjít nezáporné číslo.

Jiné řešení (trikové):
Nejdříve si všimneme, že všechny židle s nezáporným číslem jsou jistě dobré (stačí vzít skupinku délky 1, ta má jistě nezáporný součet).

Nyní všechny židle, které nejsou dobré, prostě oddělejme od stolu. Protože jsme oddělali jen židle se zápornými čísly, jistě všechny zbylé židle jsou stále dobré. Z pro nich vhodných skupinek jsme totiž možná oddělali nějaká záporná čísla, ale součet skupinky tím jistě nepřestal být nezáporný.

Zbývá ukázat, že nyní je součet čísel na všech zbývajících židlích u stolu nezáporný.

Sedněme si na libovolnou židli. Protože je dobrá, musí pro ni existovat vhodná skupinka. Přesedněme si na první židli za touto skupinkou a celý postup opakujeme. Takto tedy skáčeme kolem stolu, nejpozději po $n + 1$ krocích si však sedneme na židli, kde jsme již seděli.

---

[5] Skupinkou po sobě jdoucích židlí může být i jedna židle sama o sobě.

Zopakujme celý postup s tím, že první zvolená židle bude právě tato opakující se židle. Budeme si pamatovat číslo $s$, začneme s $s = 0$. Vždy, když přesedáme, si k číslu $s$ přičteme součet čísel ve skupince, kterou jsme právě přeskočili. Až se vrátíme na židli, kde jsme začali, máme jistě $k$ koleček kolem stolu, kde $k$ je přirozené číslo. Náš celkový součet čísel $s$ je tedy $k$-násobek součtu všech čísel. Protože celkový součet $s$ je nezáporný (vždyť vznikl sečtením nezáporných skupinek), je jistě nezáporný i součet všech čísel u stolu.

Poznámky:
Na úloze bylo zákeřné to, že dokazované tvrzení působilo velmi triviálně. Někteří řešitelé tak skončili dříve, než bylo potřeba. Za to bohužel nedostali mnoho bodů. *(Václav Janáček)*

# Mnohoúhelníky

3. podzimní série    Vzorové řešení

## Úloha 1.

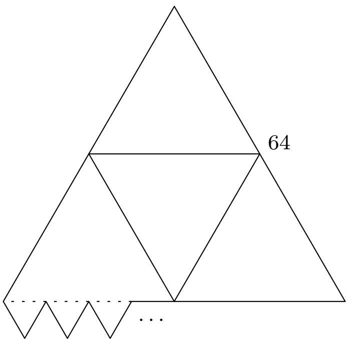
*Matěj má hromadu rovnostranných trojúhelníků o straně délky 1. Skládá je k sobě tak, že sousedící trojúhelníky se dotýkají vždy celou stranou. Mohl takhle sestavit nějaký 67-úhelník bez děr?*

*(Klára „Klátra“ Pernicová)*

Řešení:

Ze čtyř trojúhelníčků se stranou délky 1 lze snadno složit jeden se stranou délky 2. Ze čtyř takových zase složíme rovnostranný trojúhelník se stranou délky 4. Pokud to zopakujeme ještě čtyřikrát, získáme rovnostranný trojúhelník se stranou délky 64.

Když potom budeme k jedné straně postupně od vrcholu lepit trojúhelníčky o straně délky 1, s každým z nich vzroste počet stran o 2. Po nalepení 32 trojúhelníčků tak získáme 67-úhelník, jak jsme chtěli.




Poznámky:

Téměř všichni si s úlohou poradili. Sešla se spousta různých pěkných řešení. *(Václav Janáček)*

## Úloha 2.

*Hedvika vzala svůj oblíbený pravidelný $n$-úhelník a nakreslila všechny pravoúhlé trojúhelníky, jejichž vrcholy jsou vrcholy Hedvičina $n$-úhelníku. Celkem nakreslila 1200 trojúhelníků. Najděte všechna možná přirozená čísla $n$, pro která se toto mohlo stát.* *(Matěj Doležálek)*

Řešení:

Jelikož je Hedvičin $n$-úhelník pravidelný, lze mu opsat kružnici $k$. Aby trojúhelník s vrcholy ve vrcholech $n$-úhelníku byl pravoúhlý, musí jeho přepona díky Thaletově větě být průměrem $k$. Třetí vrchol potom smí být libovolný ze zbývajících. Aby některá úhlopříčka $n$-úhelníku byla průměrem $k$, musí být $n$ sudé. Takových úhlopříček je potom $\frac{n}{2}$. Ke každé úhlopříčce můžeme zvolit $n-2$ vrcholů, u nichž bude pravý úhel. Tímto způsobem jsme každý pravoúhlý trojúhelník našli právě jednou, protože každý pravoúhlý trojúhelník má právě jednu přeponu.

Hedvika nakreslila všechny pravoúhlé trojúhelníky s vrcholy ve vrcholech jejího $n$-úhelníku a nakreslila jich 1200. Musí tedy platit

$$\frac{n}{2} \cdot (n-2) = 1200,$$

což je kvadratická rovnice. Její dva kořeny buď můžeme vypočítat pomocí vzorce, nebo si všimneme, že kořeny jsou $-48$ a 50 a další už existovat nemohou. Protože $n$ musí být přirozené, vyhovuje pouze $n = 50$.

Poznámky:

Došla spousta správných řešení. Nejčastější chybou bylo nepořádné přečtení zadání, při němž řešení počítalo, pro která $n$ Hedvika nakreslí *alespoň* 1200 trojúhelníků místo *právě* 1200 trojúhelníků.

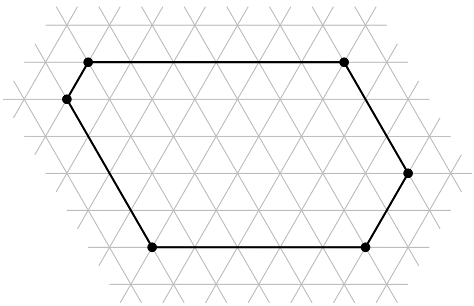
*(Magdaléna Mišinová)*

## Úloha 3.

*Ukažte a zdůvodněte, že existuje šestiúhelník, který má délky stran* 1, 2, 3, 4, 5, 6 *(ne nutně v tomto pořadí) a všechny jeho vnitřní úhly jsou stejně velké.* *(Terka Kučerová)*

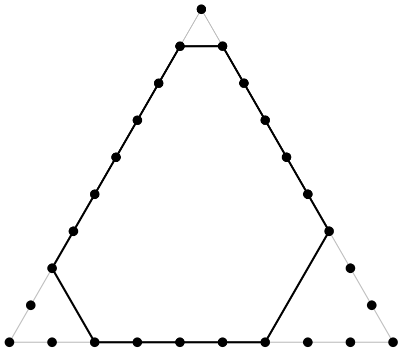
Řešení trojúhelníkovou mřížkou:

Na obrázku vidíme jednotkovou trojúhelníkovou mřížku a v ní šestiúhelník, jehož délky stran jsou postupně 1, 6, 3, 2, 5, 4. Z vlastností trojúhelníkové mřížky plyne, že všechny vnitřní úhly mají velikost 120°.



Řešení pomocí rovnostranných trojúhelníků:

Začneme s rovnostranným trojúhelníkem o straně délky 9 a odřízneme z jeho rohů rovnostranné trojúhelníky o délkách stran 1, 2 a 3. Zbyde nám šestiúhelník, jehož délky stran jsou postupně 1, 6, 2, 4, 3, 5. Vnitřní úhly rovnostranného trojúhelníku mají velikost 60°, takže všechny vnitřní úhly získaného šestiúhelníku mají velikost 120°.



Poznámky:
Hledaný šestiúhelník nalezla většina řešitelů bez potíží, horší ale bylo ukázat, že má skutečně všechny úhly stejně velké. Velká část řešitelů pouze našla nějaké nutné podmínky, které musí hledaný šestiúhelník splňovat, ale už neukázala, že jsou dostatečné. Dokázat, že mají všechny úhly správnou velikost, šlo mnoha způsoby. Kromě výše popsaných metod bylo také možné spočítat úhly pomocí analytické geometrie nebo požadované vlastnosti nahlédnout sčítáním vektorů.

*(Josef Minařík)*

## Úloha 4.

*Pětiúhelník $PRASE$ má všechny strany stejně dlouhé a úhly u vrcholů $P$ a $E$ jsou pravé. Označme $X$ průsečík úhlopříček $PA$ a $RE$, dokažte $|XA| = |XE|$.* *(Josef Minařík)*

Řešení:
V čtyřúhelníku $PRSE$ máme tři stejně dlouhé strany ($RP$, $PE$, $ES$) a dva pravé úhly mezi nimi ($\sphericalangle RPE$ a $\sphericalangle PES$), tedy se už nutně jedná o čtverec. Proto i úsečka $RS$ má stejnou délku jako strany pětiúhelníku $PRASE$. Jinak řečeno trojúhelník $RAS$ je rovnostranný.

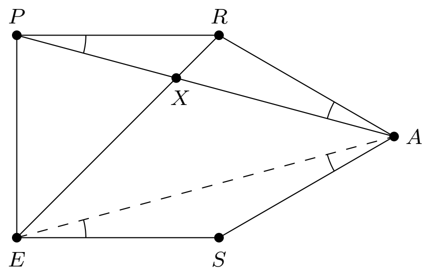
Povšimneme si, že trojúhelníky $PRA$ a $ESA$ jsou rovnoramenné ($|PR| = |RA|$) a mají stejný úhel u vrcholu $R$, respektive $S$, a to $|\sphericalangle PRA| = |\sphericalangle PRS| + |\sphericalangle SRA| = 90° + 60° = 150°$(obdobně pro $|\sphericalangle ESA|$). Odtud

$$|\sphericalangle RAP| = |\sphericalangle RPA| = |\sphericalangle SEA| = |\sphericalangle SAE| = \frac{180° - 150°}{2} = 15°.$$

Dále už jen dopočteme $|\sphericalangle XAE| = |\sphericalangle SAR| - |\sphericalangle PAR| - |\sphericalangle EAS| = 60° - 15° - 15° = 30°$. Protože $ER$ je úhlopříčka ve čtverci, tak $|\sphericalangle RES| = 45°$, tedy

$$|\sphericalangle XEA| = |\sphericalangle RES| - |\sphericalangle AES| = 45° - 15° = 30° = |\sphericalangle XAE|.$$

Trojúhelník $AXE$ je tedy rovnoramenný a platí $|XE| = |XA|$, jak jsme chtěli dokázat.



Alternativní řešení:
Obdobně jako v prvním řešení odvodíme, že $PRSE$ je čtverec a $RAS$ je rovnostranný trojúhelník. Dále víme, že $|PR| = |RS| = |RA|$, tedy body $P, S, A$ leží na kružnici se středem v $R$. Ze vztahu obvodového a středového úhlu tak dostáváme $|\sphericalangle PAS| = \frac{|\sphericalangle PRS|}{2} = 45°$. A jelikož $RE$ je úhlopříčka, tak také $|\sphericalangle RES| = 45°$. Podíváme-li se na čtyřúhelník $ESAX$ vidíme, že $|ES| = |SA|$ a $|\sphericalangle XES| = |\sphericalangle XAS|$. Celý čtyřúhelník je tak souměrný dle osy úhlu u $S$, a tedy $|XE| = |XA|$, jak jsme chtěli.

Poznámky:
Většina došlých řešení byla úplně správně a ubírala se jedním ze dvou vzorových řešení. Někteří řešili i případ, kdy bod $A$ ležel uvnitř čtyřúhelníku $PRSE$, což zadání nutně nepožadovalo, protože v takovém případě se úhlopříčky $PA$ a $RE$ neprotnou jakožto úhlopříčky/úsečky. Ale nebylo to úplně jasné, a tak se omlouváme, že nám ze zadání utekla informace, že je zadaný pětiúhelník konvexní. *(Lenka Kopfová)*

## Úloha 5.

*Na soustředění bylo $n$ účastníků a $n$ orgů, kde $n \geq 2$. Každý z nich se postavil do jednoho vrcholu pravidelného $2n$-úhelníku. V každém vrcholu stojí buď účastník, nebo org. Potom na zem nakreslili úsečky; mezi každou dvojicí účastníků nakreslili modrou úsečku a mezi každou dvojici orgů červenou. Ukažte, že pro libovolné reálné $d$ je na zemi stejně modrých úseček délky $d$ jako červených úseček délky $d$.* *(Radek Olšák)*

Řešení:
Nejprve si všimněme, že náš $2n$-úhelník je symetrický. Tedy pokud z nějakého vrcholu vede $k$ úseček délky $d$, vede z každého vrcholu $k$ úseček délky $d$. Zafixováním konkrétního $d$ získáme jednoznačně určený počet sousedů $k$ jednoho vrcholu v dané vzdálenosti $d$:

(1) $k = 0$, pak se daná úsečka v našem $2n$-úhelníku vůbec nevyskytuje,
(2) $k = 2$, potom povede z každého vrcholu jedna úsečka délky $d$ doprava a jedna doleva,
(3) $k = 1$ nastane, pokud tyto dvě úsečky délky $d$ splynou, tedy právě pro $d$ rovno průměru kružnice opsané daného $2n$-úhelníku a pro $d = 0$

a jiná $k$ zřejmě nevyhovují.

Odebírání incidencí:
Případ $k = 0$ je triviální, jelikož máme nula modrých i červených úseček. Nyní rozeberme případ $k = 2$, případ $k = 1$ bude analogický.

Díky tomu, že z účastníků i z orgů vede $2n$ hran, máme $2n$ incidencí hrana-účastník a $2n$ incidencí hrana-org. Máme zde tři typy hran: modré, červené nebo bezbarvé, což jsou ty, které mají oba konce z různé skupinky (orgové/účastníci). Každá modrá úsečka obsahuje dva účastníky, tedy spotřebuje dvě incidence hrana-účastník, obdobně každá červená dvě incidence hrana-org. Bezbarvá hrana pak spotřebuje jednu incidenci hrana-org a jednu incidenci hrana-účastník.

Nazvěme počet modrých hran $m$, počet červených hran $č$ a počet bezbarvých hran $b$. Bezbarvá hrana odebere vždy jednu incidenci oběma skupinkám. Zbylé incidence se tudíž u účastníků musí vyskytovat v modrých hranách a u orgů v červených, v každé hraně jsou ale dvě incidence, tedy pro spočítání počtu hran musíme dělit dvěma. Získáváme tak $m = \frac{2n-b}{2} = č$, máme tedy stejně modrých a červených hran.

V případě $k = 1$ máme $n$ incidencí hrana-org a $n$ incidencí hrana-účastník, takže podobně jako v prvním případě můžeme spočítat, že platí $m = \frac{n-b}{2} = č$.

Prohazování:
Idea za prohazovacím důkazem bude následující: nejprve najdeme jedno rozestavení účastníků a orgů, pro které zadání platí triviálně. V druhém kroku ukážeme, že dostaneme-li libovolné rozestavení, nezmění se prohozením dvou sousedních osob rozdíl mezi počty modrých a červených úseček

délky $d$. Z našeho „dobrého“ rozestavení pak pomocí prohazování dostaneme libovolné rozestavení, takže počet modrých a červených úseček musí být i obecně stejný.

První krok je tedy najít triviální případ, pro který zadané tvrzení platí. Můžeme si vybrat ze spousty možností – například dát za sebe všechny účastníky a potom všechny orgy. Tím nám vzniknou dva shodné útvary, jeden z účastníků, jeden z orgů, a tím pádem zde bude všech úseček libovolných délek stejně.

Druhý krok je ukázat, že pokud prohodíme dvě sousední osoby, nezmění se rozdíl počtů červených a modrých úseček. Pokud by osoby, které se snažíme prohodit, byly ze stejné skupinky, nic se nezmění, protože výměna orga za orga či účastníka za účastníka nezmění stav $2n$-úhelníku. Proto nás zajímá pouze případ, kdy prohazujeme orga $O$ s účastníkem $U$. Jediné, co se tím změní, jsou úsečky délky $d$ sousedící s $O$ a $U$.

Nechť má účastník $U$ u sebe $m$ modrých úseček délky $d$ a zbytek bezbarvých, zatímco org $O$ má u sebe $č$ červených úseček délky $d$ a zbytek bezbarvých. Počet červených a modrých úseček délky $d$ u vrcholů $U$ a $O$ se tedy liší o $č - m$. Po prohození se u $U$ změní modré úsečky na bezbarvé a bezbarvé na červené, analogicky u $O$ červené na bezbarvé a bezbarvé na modré. Nový počet modrých úseček délky $d$ vůči $U$ a $O$ je tedy $k - č$ a počet červených je $k - m$. Tyto počty se ale opět liší o $(k - m) - (k - č) = č - m$, což jsme chtěli dokázat.

Pro $d$ rovno délce strany zůstane hrana mezi $U$ a $O$ bezbarvá. Počet modrých úseček délky $d$ vůči $U$ a $O$ bude tedy $k - č - 1$ a počet červených bude $k - m - 1$, jejich rozdíl zůstane stále $č - m$.

Nyní už pouze stačí říct, že prohazováním dvou sousedních osob umíme dostat libovolné rozestavení orgů a účastníků. Očíslujme si pozice našeho $2n$-úhelníku 1 až $2n$, kde na začátku jsou na prvních $n$ pozicích účastnici a potom orgové.

Nyní se podívejme, na jakých pozicích mají být účastnici v kýžené konfiguraci. Vezměme si největší pozici, kde má být účastník. Poté prohazujme $n$-tého účastníka na tuto pozici směrem k větším indexům. Jako další krok vezměme předposledního účastníka ($(n-1)$-tého) a prohazujme ho na druhou největší pozici stejným směrem. Vždy tedy vezmeme účastníka s $k$-tým největším indexem v původním rozestavení a pošleme ho na $k$-tou největší pozici účastníků v kýžené konfiguraci směrem k vetším indexům. Takto prohazujme účastníky, dokud každý nedorazí na svoje předepsané místo. Víme, že žádný $k$-tý účastník už neovlivní svým prohozením vyšší kamarády, protože ti už jsou určitě na vyšší pozici, než kam se on sám snaží dostat. Pokud jsou správně všichni účastníci, jsou určeni i všichni orgové, takže skutečně umíme dostat libovolnou konfiguraci a jsme hotovi.

Poznámky:
Většina řešení se dostala k téměř plnému počtu bodů a odpovídala více méně prvnímu či druhému vzorovému řešení. Častou chybou bylo opomíjení případu, kdy můžeme mít $k = 1$. Ač je řešení analogické, ke kompletnímu řešení bylo potřeba si uvědomit, že takový případ existuje.

*(Filip Čermák)*

## Úloha 6.

*Mějme čtverec $ABCD$ o délce strany 1. Na stranách $BC$ a $CD$ leží postupně body $E$ a $F$ splňující $|\sphericalangle EAF| = 45°$. Dokažte, že obvod trojúhelníku $ECF$ je 2.* *(Josef Minařík)*

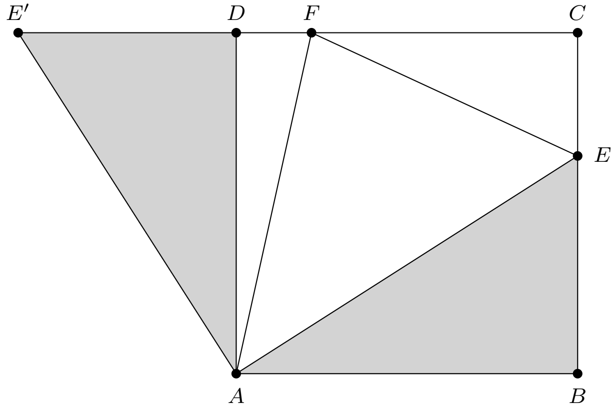
Řešení:
Protože $|AB| = |AD| = 1$, můžeme trojúhelník $ABE$ otočit tak, aby $AB$ splynula s $AD$. Obraz bodu $E$ v tomto otočení označme $E'$. Následně máme

$$|\sphericalangle FAE'| = |\sphericalangle FAD| + |\sphericalangle DAE'| = |\sphericalangle FAD| + |\sphericalangle BAE| = 90° - |\sphericalangle EAF| = 45°.$$

Proto z věty *sus* plyne, že $EAF \cong E'AF$, poněvadž $|AE| = |AE'|$, $|\sphericalangle FAE'| = |\sphericalangle EAF| = 45°$ a trojúhelníky sdílí stranu $AF$. Pak pro obvod trojúhelníku $EFC$ platí

$$\begin{aligned} O_{EFC} &= |CF| + |CE| + |FE| = |CF| + |CE| + |FE'| = |CF| + |CE| + |FD| + |DE'| = \\ &= |CF| + |FD| + |BE| + |EC| = |CD| + |BC| = 2, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.




Poznámky:
Úloha má mnoho hezkých řešení, další hezké řešení plyne z následujícího pozorování: Obraz bodu $C$, resp. $D$, podle $AE$, resp. $AF$, je pata kolmice v trojúhelníku $AEF$ z vrcholu $A$.

Další časté řešení (za mě méně pěkné) bylo vyjádření $BE$, resp. $DF$, pomocí tangentu příslušného úhlu u vrcholu $A$ a dosazení do Pythagorovy věty pro $ECF$. *(„madam Verča“ Hladíková)*

## Úloha 7.

*Mnohoúhelník nazveme pěkným, pokud jsou délky jeho stran po dvou různé, velikosti jeho vnitřních úhlů ve stupních jsou celá čísla a lze mu opsat kružnici. Rozhodněte, zda existuje pěkný 19-úhelník a zda existuje pěkný 20-úhelník.* *(Radek Olšák)*

Řešení:
Ukážeme, že pěkný 20-úhelník existuje, ale pěkný 19-úhelník nikoliv.

Posloupnost různých kladných reálných čísel $x_1, \ldots, x_n$ nazveme *krásnou*, pokud se její součet rovná 360 a zároveň jsou $\frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$ pro $1 \leq i \leq n$ celá čísla (kde $x_{n+1} = x_1$). Dokážeme nejprve, že pěkný $n$-úhelník existuje právě tehdy, existuje-li krásná $n$-tice.

Předpokládejme, že máme tětivový $n$-úhelník $A_1A_2 \ldots A_n$ s kružnicí opsanou $k$ se středem $S$. Označme velikost orientovaného úhlu[6] $\sphericalangle(SA_i, SA_{i+1})$ jako $\alpha_i$. Potom zřejmě musí platit

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 360^\circ.$$

Zároveň je z věty o obvodovém a středovém úhlu obvodový úhel odpovídající (orientovanému) oblouku $A_iA_{i+1}$ roven $\frac{1}{2}\alpha_i$. Oblouku $A_iA_{i+2}$ tedy odpovídá obvodový úhel $\frac{1}{2}\left(\alpha_i + \alpha_{i+1}\right)$. To znamená, že můžeme vyjádřit

$$|\sphericalangle A_iA_{i+1}A_{i+2}| = 180^\circ - \frac{1}{2}\left(\alpha_i + \alpha_{i+1}\right).$$

Je navíc zřejmé, že délky $|A_iA_{i+1}|$ jsou po dvou různé právě tehdy, jsou-li odpovídající středové úhly $\alpha_i$ po dvou různé. Jelikož je i $180 - x$ celé pro libovolné celé $x$, tak jsme tímto dokázali, že středové úhly pěkného mnohoúhelníku $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tvoří krásnou $n$-tici. Naopak máme-li krásnou $n$-tici $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, můžeme díky podmínce $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 360^\circ$ zkonstruovat tětivový $n$-úhelník,

[6] Více o orientovaných úhlech najdeš například ve sborníkovém příspěvku od Mirka Olšáka na *https://prase.cz/lib/398*.

ve kterém odpovídají tato čísla středovým úhlům; z výše uvedeného rozboru pak plyne, že je tento $n$-úhelník pěkný.

Nyní nám už stačí ukázat, že krásná 20-tice existuje, ovšem krásná 19-tice nikoliv.

Pro spor předpokládejme, že existuje krásná $n$-tice pro $n = 19$. Potom jsou i čísla

$$\frac{1}{2}(\alpha_{i+2} + \alpha_{i+1}) - \frac{1}{2}(\alpha_{i+1} + \alpha_i) = \frac{1}{2}(\alpha_{i+2} - \alpha_i)$$

celá pro všechna $1 \leq i \leq 19$. Z toho snadnou indukcí přes $k$ můžeme odvodit, že bereme-li indexy modulo 19, tak $\frac{1}{2}(\alpha_{i+2k} - \alpha_i) \in \mathbb{Z}$ pro všechna $i, k$. Speciálně tedy platí

$$\frac{1}{2}(\alpha_{i+20} - \alpha_i) = \frac{1}{2}(\alpha_{i+1} - \alpha_i) \in \mathbb{Z},$$

tudíž dostáváme

$$\alpha_i = \frac{1}{2}\left(\alpha_{i+1} + \alpha_i\right) - \frac{1}{2}\left(\alpha_{i+1} - \alpha_i\right) \in \mathbb{Z}.$$

Celočíselnost $\frac{1}{2}\left(\alpha_{i+1} + \alpha_i\right)$ zároveň vynucuje to, že všechna $\alpha_i$ musí mít stejnou paritu, takže díky různosti $\alpha_i$ platí[7]

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{19} \geq 1 + 3 + \cdots + 37 = 361.$$

To je ovšem spor s $\alpha_1 + \cdots + \alpha_{19} = 360$, takže krásná 19-tice neexistuje.

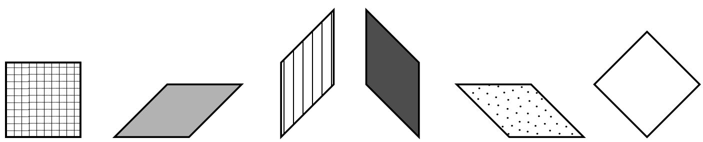
Pro $n = 20$ stačí zvolit $\alpha_i = i - \frac{1}{2}$ pro $1 \leq i \leq 19$ a $\alpha_{20} = 360 - (\alpha_1 + \cdots + \alpha_{19}) = 179{,}5$. Pak snadno ověříme, že průměry po sobě jdoucích čísel jsou celé: $\frac{1}{2}\left(\alpha_i + \alpha_{i+1}\right) = i$ pro $1 \leq i \leq 18$, $\frac{1}{2}\left(\alpha_{19} + \alpha_{20}\right) = 99$ a $\frac{1}{2}\left(\alpha_{20} + \alpha_1\right) = 90$, takže naše 20-tice je skutečně krásná.

Poznámky:

Všechna správná řešení postupovala víceméně stejně jako vzorák. Někteří řešitelé akorát kvapně usoudili, že z $\frac{1}{2}(\alpha_i + \alpha_{i+1}) \in \mathbb{Z}$ už nutně plyne $\frac{1}{2}\alpha_i \in \mathbb{Z}$ pro všechna $i$, což ovšem není pravda ani pro lichá $n$. *(Danil Koževnikov)*

## Úloha 8.

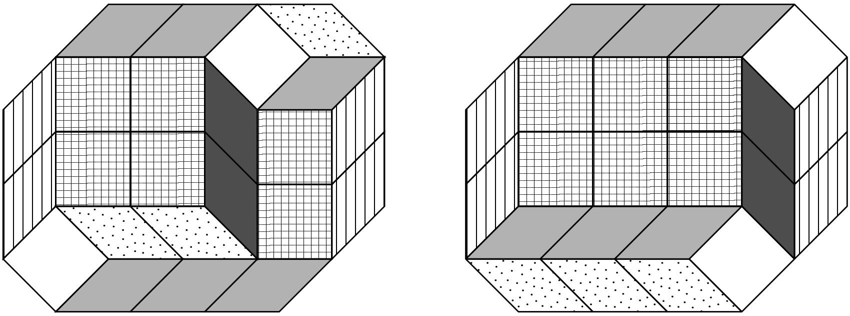
*Majda a Pepa chtějí vydláždit podlahy svých koupelen, které mají stejný tvar. Podlaha má tvar osmiúhelníku, jehož všechny vnitřní úhly jsou stejné. Pro vydláždění mají k dispozici těchto šest typů dlaždiček, které musí být orientované jako na obrázku (nesmí se otáčet):*



*Všechny dlaždičky mají délku stran 1 a jsou to buď čtverce, nebo kosočtverce s jedním úhlem o velikosti 45°.*

*Majda a Pepa každý vydláždili podlahu jiným vzorem. Ukažte, že oba museli použít stejné počty dlaždiček stejného typu. Vydláždění můžou vypadat například takto:*

[7] Používáme známý vzorec $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, který lze dokázat například indukcí.



*(Josef Minařík)*

Řešení:
Na začátek si rozmysleme, že pokud se dlaždičky dotýkají v alespoň dvou různých bodech, tak už na sebe přiléhají celou jednou stranou (délky 1). Protože jsou dlaždičky konvexní útvary, tak tyto dva body dotyku musí ležet na jedné straně (jinak by se dlaždičky překrývaly) – dotýkají se tedy kusem jedné strany, bez újmy na obecnosti třeba vodorovné. Pokud by délka dotyku byla menší než 1 (tj. strany na sebe nepřiléhají celé), tak na každé z těchto stran zbyde nějaký nepokrytý vodorovný kus. Na tento nepokrytý vodorovný kus ale musí opět přiléhat nějaká část vodorovné strany jiné dlaždičky, jinak by výsledný útvar nebyl konvexní, protože by u tohoto překryvu byl nekonvexní úhel. Takto jsme ale zase dostali dvě strany, které se nepřekrývají úplně, a celkově bychom takto indukcí mohli sestrojit nekonečnou posloupnost dlaždiček podél této vodorovné přímky, což je spor s tím, že naše podlaha má pevnou konečnou velikost. Pokud se tedy některé dvě dlaždičky netriviálně dotýkají, tak na sebe přiléhají celou jednou stranou. Podobně také na strany koupelny musí dlaždičky přiléhat vždy celou stranou a ne pouze částí. Z toho nám plyne, že každá strana koupelny má celočíselnou délku, která je dána počtem dlaždiček, které na ní přiléhají. Zmiňme, že z toho, že všechny úhly v osmiúhelníku tvořícím podlahu jsou stejné, plyne, že její protější strany musí být rovnoběžné. Dále vzhledem k tvarům dlaždiček a tomu, že musí ke stranám přiléhat, mají tyto strany 4 dané různé směry – svislý, vodorovný a dva šikmé.

Nyní uvažme nějakou dlaždičku, která přiléhá na dolní vodorovnou stranu koupelny. Tato dlaždička má protější horní stranu taktéž vodorovnou a podle prvního odstavce přiléhá touto stranou na dolní vodorovnou stranu nějaké další dlaždičky. Tato další dlaždička má zase protější horní vodorovnou stranu a přiléhá na další dlaždičku, atd. Celkově takto dostaneme posloupnost dlaždiček se dvěma vodorovnými stranami. Ta se musí někdy zastavit, neboť naše koupelna má konečnou velikost a každou dlaždičkou zvětšíme vzdálenost od dolní strany koupelny. Nutně se navíc musí zastavit na horní vodorovné straně koupelny, neboť horní vodorovná strana poslední dlaždičky musí k něčemu přiléhat – a pokud to není další dlaždička, tak to musí být nutně strana koupelny. Tato posloupnost dlaždiček nám tedy určuje vydlážděnou cestu z dolní vodorovné strany koupelny na protější horní vodorovnou stranu koupelny. Pokud si označíme $n$ délku dolní vodorovné strany koupelny, tak na ní přiléhá $n$ různých dlaždiček. Dostaneme tak $n$ různých cest mezi dolní a horní vodorovnou stranou koupelny (žádné dvě takovéto cesty navíc jistě nemají společnou dlaždičku). Dále z toho rovněž plyne, že horní vodorovná strana koupelny musí mít délku $n$ stejně jako ta dolní (jinak bychom z nějaké strany mohli zkonstruoval více cest, což by byl vzhledem k předchozí pozorováním spor). Podobně můžeme cesty mezi protějšími stranami koupelny konstruovat i pro zbylé tři směry – a jejich počet závisí pouze na délkách stran osmiúhelníku. Nyní si můžeme vzít dvě cesty různých směrů (tj. mezi stranami různých směrů). Ty se určitě musí někde protnout (neboť části okraje koupelny, na kterých začínají/končí, jsou střídavě položeny) a určitě se protnou právě v jedné dlaždičce. Nyní učiníme dvě pozorování. Zaprvé dlaždička daná tímto protnutím má jasně daný tvar – musí mít dvě strany rovnoběžné s jedním zvoleným směrem a druhé dvě s tím druhým zvoleným (a když se podíváme na zadané dlaždičky, tak každá dvojice různých směrů určuje právě jednu dlaždičku). Druhé pozorování bude, že tato konstrukce nám dává bijekci mezi dvojicemi cest různých směrů a všemi dlaždičkami na podlaze. Průnik dvou cest totiž jednoznačně určuje dlaždičku a naopak pro každou dlaždičku umíme zrekonstruovat použité cesty postupem z předchozího odstavce.

Spojením získaných úvah můžeme nyní spočítat počet použitých dlaždiček konkrétního typu (daného dvěma směry stran – označme je $a$ a $b$). Podle dokázané bijekce je totiž stejný jako počet průsečíků cest směru $a$ s cestami směru $b$. Počet cest směru $a$ je dán délkou strany osmiúhelníku ve směru $a$ (označme tento počet/délku $x$), podobně počet cest ve směru $b$ je dán délkou strany osmiúhelníku ve směru $b$ (označme $y$). (Implicitně zde používáme, že protější rovnoběžné strany osmiúhelníku mají stejnou délku a tato definice tak dává smysl.) Dohromady je tak počet dlaždiček našeho typu roven $x \cdot y$. Tento počet je tak závislý pouze na tvaru osmiúhelníku, tedy musí pro libovolné vydláždění vyjít stejně. Tím je úloha dokončena.

Poznámky:
Většina došlých řešení postupovala stejně jako vzorové řešení, nebo alespoň typicky použila klíčovou myšlenku cest mezi protějšími stranami osmiúhelníku. Je důležité si uvědomit, že ačkoli jsou závěry o přiléhání dlaždiček z rozboru na začátku důkazu intuitivně platné, nic ze zadání je negarantuje a je třeba je pořádně dokázat. *(Martin Raška)*

# Matematická indukce 1

1. SERIÁLOVÁ SÉRIE VZOROVÉ ŘEŠENÍ

## Úloha 1.

*Nechť $S$ je množina s 2021 prvky. Ukažte, že pro každé nezáporné celé číslo $N \in \{0, 1, \ldots, 2^{2021}\}$ lze obarvit všechny podmnožiny $S$ buď červenou, nebo zelenou barvou tak, aby právě $N$ podmnožin bylo červených a aby sjednocení dvou množin stejné barvy mělo tu danou barvu.*

*(Rado van Švarc)*

ŘEŠENÍ:

Pro libovolnou množinu $S$ řekneme, že obarvení všech jejích podmnožin buď červenou, nebo zelenou barvou je *úhledné*, pokud sjednocení libovolných dvou podmnožin stejné barvy má taktéž stejnou barvu. Pomocí matematické indukce dokážeme pro všechna nezáporná celá čísla $k$: je-li $S$ množina s $k$ prvky, pak pro každé $N \in \{0, 1, \ldots, 2^k\}$ existuje úhledné obarvení podmnožin $S$ s právě $N$ červenými podmnožinami.

Začněme základním krokem. Pro $k = 0$ je $S = \emptyset$ prázdná množina, takže má jen jedinou podmnožinu $\emptyset$. Tvrzení máme dokázat pro $N \in \{0, 1\}$. Pro $N = 0$ jednoduše obarvíme $\emptyset$ zeleně, zatímco pro $N = 1$ obarvíme $\emptyset$ červeně. Podmínka úhlednosti bude v obou případech triviálně splněna.

Nyní proveďme indukční krok. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $k = \ell$, a dokažme jej pro $k = \ell+1$. Uvažujme tedy $(\ell+1)$-prvkovou množinu $S$, BÚNO její prvky označme $S = \{0, 1, 2, \ldots, \ell\}$. Dále uvažujme $S' = \{1, 2, \ldots, \ell\}$, potom jsou podmnožinami $S'$ přesně ty $P \subseteq S$, které neobsahují 0 jako prvek. Máme dokázat, že existuje úhledné obarvení s přesně $N \in \{0, 1, \ldots, 2^{\ell+1}\}$ červenými množinami – rozlišme k tomu dva případy:

(i) $N \leq 2^\ell$. Potom z indukčního předpokladu můžeme úhledně obarvit podmnožiny $\ell$-prvkové množiny $S'$ tak, aby bylo použito právě $N$ červených podmnožin. Nahlédněme, že když potom zbylé podmnožiny $S$ (ty, jež obsahují 0) obarvíme zeleně, dostaneme úhledné obarvení podmnožin $S$.

Máme-li dvě červené podmnožiny $P_1, P_2 \subseteq S$, pak jsou to z provedené konstrukce i podmnožiny $S'$. Použité obarvení podmnožin $S'$ však bylo úhledné, takže $P_1 \cup P_2$ musí být červená množina.

Obdobně uvažme dvě zelené podmnožiny $P_1, P_2 \subseteq S$. Pokud jsou obě také podmnožinami $S'$, opět musí být $P_1 \cup P_2$ zelená díky úhlednosti obarvení podmnožin $S'$. Pokud jedna z $P_1$, $P_2$ není podmnožinou $S'$ (tedy obsahuje 0), pak ani sjednocení $P_1 \cup P_2$ není podmnožinou $S'$, takže z popsané konstrukce je to zelená množina, jak jsme chtěli. Tímto je dokončen případ $N \leq 2^\ell$.

(ii) $N > 2^\ell$. Označme $N' = 2^{\ell+1} - N$, pak musí být $N' < 2^\ell$. Můžeme tedy stejně jako v prvním případě nalézt úhledné obarvení $S$, v němž je přesně $N'$ podmnožin červených a $2^{\ell+1} - N' = N$ podmnožin zelených. Když nyní obě barvy prohodíme (z červených podmnožin učiníme zelené a naopak), podmínka úhlednosti se zachová – sjednocení dvou stejnobarevných podmnožin bude mít opět stejnou barvu. Dostaneme přitom obarvení s přesně $N$ červenými podmnožinami, což jsme přesně chtěli. Tím je dokončen případ $N > 2^\ell$.

V obou případech jsme úspěšně dokončili indukční krok. Tvrzení tak už musí induktivně platit pro všechna $k$, speciálně tedy i v případě $k = 2021$.

Alternativní řešení (volně podle Jakuba Šošovičky):
BÚNO budiž naší množinou $S = \{0, 1, \ldots, 2020\}$. Pro $N = 2^{2021}$ nám stačí obarvit úplně všechny podmnožiny červeně, takže nadále uvažujme jen případy $N < 2^{2021}$. Neprázdné podmnožiny $A \subseteq S$ rozlišíme podle toho, jaký mají největší prvek – množinu těch podmnožin, které mají za největší prvek číslo $k \in S$, označíme jako

$$M_k = \{A \subseteq S \mid \max A = k\}.$$

Nahlédněme, že v $M_k$ leží právě $2^k$ podmnožin množiny $S$. Aby $A$ měla jako maximální prvek číslo $k$, musí obsahovat $k$ a zároveň $A \setminus \{k\}$ musí být podmnožina $k$-prvkové množiny $\{0, 1, \ldots, k-1\}$. Naopak pro libovolné $B \subseteq \{0, 1, \ldots, k-1\}$ je $A = B \cup \{k\}$ prvkem $M_k$. Množiny $A \in M_k$ jsou tak jednoznačně spárované s $B \subseteq \{0, 1, \ldots, k-1\}$, kterých je $2^k$.

Nyní již zkonstruujeme úhledné obarvení právě $N$ podmnožin $S$ pro $N < 2^{2021}$. Takové $N$ pak bude mít ve dvojkové soustavě nanejvýš 2021 číslic, zapíšeme ho tedy jako

$$N = (b_{2020}b_{2019}\ldots b_1 b_0)_2 = \sum_{k=0}^{2020} b_k \cdot 2^k,$$

kde každé $b_k$ je buďto 0, nebo 1 (povolíme, aby zápis čísla začínal nulami). Nyní obarvíme červeně ty podmnožiny $S$, které leží v $M_k$ pro ta $k$, pro něž je $b_k = 1$. Všechny ostatní podmnožiny (včetně prázdné, která neleží v žádném $M_k$) obarvíme zeleně. Díky tomu, že každé $M_k$ obsahuje přesně $2^k$ podmnožin, skutečně obarvíme

$$\sum_{k=0}^{2020} b_k \cdot 2^k = N$$

podmnožin.

Zbývá ověřit, že toto obarvení bude úhledné. Uvažujme tedy sjednocení dvou stejně barevných podmnožin $A$, $B$. Pokud je jedna z nich prázdná, BÚNO $B = \emptyset$, dostaneme $A \cup B = A$, což má opět stejnou barvu. Dále platí

$$\max(A \cup B) = \max\{\max A, \max B\},$$

takže pokud $A \in M_a$, $B \in M_b$ pro $a \leq b$, pak nutně $\max(A \cup B) = b$, tedy $A \cup B \in M_b$, což značí, že $A \cup B$ má stejnou barvu jako $B$.

Poznámky:
Asi dvě třetiny došlých řešení se vydaly podobným směrem jako první vzorové řešení a v nějaké podobě indukovaly podle počtu prvků množiny $S$. Až na drobná škobrtnutí pak typicky došly zdárného konce. *Jakub Šošovička* si vysloužil imaginární bod za explicitní konstrukci obarvení podle binárního zápisu $N$.

Zbylá řešení se pak snažila indukovat podle $N$, tedy přidat jednu množinu k fungujícímu úhlednému obarvení. To se příliš nedařilo, získaná obarvení mnohdy sice zařídila, aby sjednocení dvou červených množin bylo červené, ale už ne, aby i sjednocení dvou zelených bylo zelené. Že jsou tyto pokusy předem odsouzeny k neúspěchu, ilustruje následující protipříklad: máme-li pro $N = 4$ úhledné obarvení, kde právě množiny $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$ a $\{1, 2\}$ jsou obarveny červeně, pak nelze vyrobit úhledné obarvení pro $N = 5$ přidáním jedné červené množiny $P$. Taková $P$ by musela obsahovat prvek různý od 1, 2. Jelikož by $P \cup \{1, 2\}$ musela být také červená, znamenalo by to $\{1, 2\} \subset P$. Jenže potom je červená $P$ sjednocením dvou zelených $P \setminus \{1\}$ a $P \setminus \{2\}$, což je spor.

*(Matěj Doležálek)*

## Úloha 2.

*Nechť $n$ je přirozené číslo zapsané v desítkové soustavě a $S(n)$ je jeho ciferný součet. Přirozené číslo nazveme odřezkem čísla $n$, pokud vzniklo odebráním několika cifer (nejméně jedné) z pravého konce zápisu čísla $n$ v desítkové soustavě. Nechť $T(n)$ je součet všech odřezků čísla $n$. Ukažte, že $n = S(n) + 9T(n)$.* *(Rado van Švarc)*

Řešení:
Ukážeme dva různé způsoby, jak úlohu vyřešit. Oba využívají matematickou indukci. V prvním řešení budeme postupovat indukcí podle počtu cifer. V druhém indukcí dle samotného čísla $n$. Výrazu $n = S(n) + 9T(n)$ budeme pro přehlednost říkat *Vztah*.

První řešení:
Nejprve ukážeme, že pokud je číslo $n$ jednociferné, tak Vztah platí. V tomto případě totiž $S(n) = n$ a $T(n) = 0$, tedy rovnost $n = S(n) + 9T(n)$ platí.

Dále předpokládáme, že Vztah platí pro $k$-ciferná čísla (toto je náš indukční předpoklad). Následně ukážeme, že potom Vztah platí pro $(k+1)$-ciferná čísla. Zvolme libovolné $k$-ciferné číslo $n_0$ a libovolné číslo $a \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Potom dle indukčního předpokladu platí $n_0 = S(n_0) + 9T(n_0)$. Ukážeme, že pak Vztah platí pro číslo $x = 10 \cdot n_0 + a$.

Všimneme si, že pro ciferný součet $x$ platí $S(x) = S(10 \cdot n_0 + a) = S(n_0) + a$. Pro odřezky čísla $x$ platí rovnost $T(x) = T(10 \cdot n_0 + a) = T(n_0) + n_0$, protože odebereme-li z $x$ pouze poslední cifru, získáme číslo $n_0$. Ostatní odřezky vzniknou odebráním alespoň dvou cifer, takže jsou to odřezky jak čísla $x$, tak i čísla $n_0$, a tedy jsou započítané v $T(n_0)$. Tím je příprava k dokázání Vztahu hotová.

Následující rovnosti plynou z toho co víme o $S(x)$, $T(x)$ a z indukčního předpokladu:

$$\begin{aligned}S(x) + 9T(x) &= S(10 \cdot n_0 + a) + 9T(10 \cdot n_0 + a)\\ &= S(n_0) + a + 9(T(n_0) + n_0)\\ &= S(n_0) + a + 9T(n_0) + 9 \cdot n_0\\ &= S(n_0) + 9T(n_0) + a + 9 \cdot n_0\\ &= n_0 + a + 9 \cdot n_0\\ &= 10 \cdot n_0 + a.\end{aligned}$$

Jelikož $x$ je $(k+1)$-ciferné a $n_0$, $a$ byla zvolena libovolně, Vztah platí pro všechna $(k+1)$-ciferná čísla. Vztah tedy platí pro libovolné přirozené číslo $n$.

Druhé řešení:
Nejprve ukážeme, že Vztah platí pro $n = 1$. Pro $n = 1$ je $T(1) = 0$ a $S(1) = 1$. Tedy skutečně $1 = S(1) + 9T(1)$.

Dále předpokládejme, že Vztah platí pro číslo $k$ (to je náš indukční předpoklad), a ukážeme, že pak platí pro číslo $k + 1$.

(1) Nejprve ukážeme, jak postupujeme v případě, kdy poslední cifra $k$ je jiná než 9. Potom platí $S(k+1) = S(k) + 1$, protože poslední cifra se zvětšila o jedna a ostatní cifry se nezměnily, a $T(k+1) = T(k)$, neboť jediná cifra, co se změnila, je ta poslední. Tedy z toho, co víme o $S(k+1)$, $T(k+1)$ a z indukčního předpokladu plynou následující rovnosti:

$$\begin{aligned}S(k+1) + 9T(k+1) &= S(k) + 1 + 9T(k)\\ &= S(k) + 9T(k) + 1\\ &= k + 1.\end{aligned}$$

Vztah tedy platí pro $k + 1$.

(2) Nyní ukážeme, jak postupujeme, pokud poslední cifra $k$ je 9. Počet devítek na konci čísla $k$ označme $j$.

Pro $k+1$ platí $S(k+1) = S(k) + 1 - 9 \cdot j$, neboť z posledních $j$ cifer se staly nuly a $(j+1)$-ní cifra zprava se zvětšila o jedna). Pro odřezky platí $T(k+1) = T(k) + j$, protože odřezky, které vzniknou odebráním $j$ nebo méně cifer z $k+1$, jsou o jedna větší než odřezky vzniklé odříznutím stejného počtu cifer z $k$. Odřízneme-li z $k+1$ a $k$ alespoň $j+1$ cifer, budou oba odřezky stejné.

Následující rovnosti plynou z toho co víme o $S(k+1), T(k+1)$ a z indukčního předpokladu:

$$\begin{aligned} S(k+1) + 9T(k+1) &= S(k) + 1 - 9 \cdot j + 9T(k) + 9 \cdot j \\ &= S(k) + 9T(k) + 1 \\ &= k + 1. \end{aligned}$$

Tedy i v tomto případě Vztah pro $k+1$ platí.

Jelikož jsme ukázali, že Vztah platí pro $k+1$, ať už $k$ vypadá libovolně, tak jsme hotovi a díky matematické indukci Vztah platí pro libovolné přirozené číslo.

Poznámky:

Řešení, která přišla, byla většinou jednoho ze dvou typů. Buď řešitelé dokazovali Vztah indukcí podle počtu cifer čísla (což byl ten jednodušší způsob), nebo podle samotného čísla (tam bylo třeba ohlídat, co se děje při přechodu na vyšší řády). *(Terka Kučerová)*

## Úloha 3.

*Ittihad připravil $n$ palačinek, ale povedlo se mu je všechny z právě jedné strany připálit. Když už nejsou k jídlu, zahraje si s nimi následující hru. Palačinky rozestaví do řady tak, že některé jsou obrácené bílou a jiné spálenou stranou nahoru. Tah sestává z odebrání palačinky spálené seshora a obrácením jejích přímých sousedů, pokud nějací jsou, na opačnou stranu.[8] Ittihad vyhraje, pokud se mu podaří odebrat všechny palačinky. Pro která uspořádání palačinek lze hru vyhrát?*

*(Ittihad)*

Řešení:

Silnou indukcí ukážeme, že Ittihad umí hru vyhrát právě tehdy, když je počet palačinek otočených spálenou stranou nahoru (dále jen spálených) lichý.

Nejprve dokážeme, že pokud je tento počet sudý, nemá Ittihad šanci vyhrát. Pro základní krok, kdy $n = 1$, máme jednu palačinku, která musí být bílá. Z toho vidíme, že není možné vyhrát.

Nyní předpokládejme, že pro všechna $k \leq n$ je hra nevyhratelná, obsahuje-li řada sudý počet spálených palačinek. Mějme řadu $n+1$ palačinek, z nichž spálených je sudý počet. Vybereme-li jakoukoli spálenou palačinku, počet spálených palačinek nalevo od ní má opačnou paritu než počet spálených palačinek napravo. Po odebrání vybrané palačinky a obrácení jejích dvou přímých sousedů (což změní počet spálených palačinek v každé ze dvou částí o 1) tudíž vzniknou dvě kratší nezávislé řady, z nichž právě jedna obsahuje sudý počet spálených palačinek. Potom dle indukčního předpokladu Ittihad nedokáže odebrat všechny palačinky v „sudé“ řadě a tedy celkově nemůže vyhrát.

Pokud byla odebraná palačinka na kraji, ve zbytku řady je lichý počet spálených palačinek. Po otočení palačinky sousedící s odebranou se tento počet změní o 1, bude tedy opět sudý. Proto ani v tomto případě nelze zbytek odebrat.

Dále ukážeme, že pro lichý počet spálených palačinek už Ittihad může odebrat všechny. V základním kroku máme jednu spálenou palačinku, kterou lze odstranit a tím vyhrát hru.

[8] Přitom dvě palačinky nejsou považovány za přímo sousedící, pokud mezi nimi předtím ležela již odebraná palačinka (tedy po odebrání palačinek vznikají mezery).

Předpokládejme, že pro všechna $k \leq n$ existuje vyhrávající strategie, pokud je počet spálených palačinek v řadě lichý. Uvažme řadu s $n+1$ palačinkami, z nichž spálených je lichý počet. Pak jistě můžeme odebrat takovou palačinku, aby na obou stranách od ní byl sudý počet spálených palačinek. Obrácením dvou sousedních palačinek vzniknou dvě kratší oddělené řady s lichým počtem spálených palačinek, a ty dle předpokladu umíme odebrat.

Tím jsme hotovi.

Poznámky:

Řešitelé často zapomínali ukázat, že nalezená uspořádání, která lze vyhrát, jsou opravdu všechna, což znamená ukázat, že žádná jiná uspořádání vyhrát nelze. Zapomínali také na základní krok v důkazu indukce. Mnoho řešitelů nepoužilo indukci, čímž se jim řešení dost protáhla. Celkově jsem ovšem měla radost z počtu došlých řešení! Většina řešení byla správně a i ta neúplná byla většinou velmi pěkná a našly se mezi nimi zajímavé nápady. *(Kateřina Panešová)*

# Matematická indukce II – Recept na přirozená čísla

Milý příteli,

vítáme Tě u druhého dílu seriálu o matematické indukci! Možná sis všiml(a), že většina cvičení z minulého dílu počítá s přirozenými čísly. Často jsme chtěli dokázat, že nějaké tvrzení platí pro všechna přirozená čísla. Už samotný princip indukce je definovaný na přirozených číslech. Proto si v tomto díle položíme otázku, co jsou to vlastně ta přirozená čísla, a podíváme se na ně úplně od základů! Začneme axiomy, které definují přirozená čísla, a pouze na jejich základě odvodíme operace na přirozených číslech, jako je sčítání či násobení.

Tento díl se od prvního dílu liší tím, že při čtení je třeba mnohem víc abstraktního myšlení a pochopení některých zcela nových konceptů. V textu najdeš jednu velmi důležitou větu, nazvanou věta o rekurzi, kterou posléze využijeme k definování operací na přirozených číslech. Její důkaz je poměrně technický a nevadí, pokud se budeš místy ztrácet, pro pochopení dalšího textu nutný není.

Podnětné čtení Ti přejí

Káťa a Ittihad

## Úvod

*Bůh stvořil přirozená čísla, všechno ostatní je lidské dílo.*
*– Leopold Kronecker (1823–1891)*

Odbočme nyní zdánlivě od tématu indukce a položme si otázku: Co jsou to přirozená čísla?

Můžeme je vyjmenovat: 1, 2, 3 a tak dále, každé další číslo je o 1 větší než to předchozí. Jenže tento seznam nám nic neřekne o jejich vlastnostech – jak funguje sčítání či násobení přirozených čísel? Máme-li dvě přirozená čísla, umíme je porovnat? Co víc, nelze vypsat všechna přirozená čísla – víme tedy, jak vypadají a jak se chovají velmi vysoká čísla? Je tento seznam opravdu nekonečný?

K samotnému vyjmenování přirozených čísel jsme potřebovali frázi „a tak dále“. V minulém díle jsme zjistili, že na argumentu „a tak dále“ vlastně stojí celý důkaz matematickou indukcí. Celou dobu jsme ovšem mlčky předpokládali, že všechna přirozená čísla lze takto induktivně pokrýt, žádnou záruku, že to jde, jsme však nedostali!

Aby naše důkazy nestály na zavádějícím a nejasném „a tak dále“, zahrneme matematickou indukci *přímo do definice* přirozených čísel.

Nejprve však zavedeme několik užitečných pojmů.

# Funkce

*If you are wandering down in Cornmarket and you bump into a second-hand function dealer and they try to sell you a function with only the rule part and not the domain or the codomain, please walk away! They're a dodgy, unscrupulous function dealer and you should not trade with them.*
*– Vicky Neale (University of Oxford)*

**Definice.** *Zobrazení* $f$ množiny $A$ do množiny $B$ je cokoli, co každému prvku $a$ množiny $A$ přiřadí právě jeden prvek množiny $B$. Ten pak značíme $f(a)$.

Zobrazení může být zadáno nějakým pravidlem, například zobrazení, které každému reálnému číslu $x$ přiřadí jeho obraz $x^2$. Můžeme ale narazit i na zobrazení z množiny $\{1,3,7\}$ do množiny $\{2,3,4,10\}$, které jedničce přiřadí 10, trojce přiřadí 4 a sedmičce přiřadí 10. Navíc množiny $A$ a $B$ ani nemusí být množiny čísel, ale např. množiny trojúhelníků v rovině, zvířat v zoo, žáků 3.B atd.

Termín *cokoli* v předchozí definici se může zdát poněkud vágní. Zobrazení neboli funkci můžeme přesněji definovat pomocí množin – představme si, že naše funkce spáruje prvky množiny $A$ s prvky z $B$. Výčtem uspořádaných dvojic $(a, f(a))$ pak funkci $f$ jasně popíšeme. Množinu všech uspořádaných dvojic $(a, b)$, kde $a \in A$ a $b \in B$ nazýváme kartézským součinem a značíme ji $A \times B$. To inspiruje následující definici:

**Definice.** Nechť jsou $A$ a $B$ množiny. *Funkce* $f\colon A \to B$ je taková *podmnožina* $f$ množiny $A \times B$, pro kterou platí

(i) pro všechna $a \in A$ existuje $b \in B$ takové, že $(a, b) \in f$,
(ii) tento prvek $b$ je právě jeden, tedy pokud $(a, b) \in f$ a současně $(a, c) \in f$, potom $b = c$.

**Poznámka.** Důležité je, že funkce $f$ vždy „chodí společně“ s množinami $A$ a $B$! Je důležité uvést, odkud a kam funkce posílá prvky.[9]

Ukážeme si to na příkladu funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané předpisem $f(x) = x^2$. Zde bychom funkci popsali pomocí uspořádaných dvojic $(x, x^2)$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Tyto dvojice můžeme znázornit grafem funkce, který znáte ze školy – každý bod paraboly odpovídá jedné z dvojic. Mezi dvojicemi, které popisují naši funkci, by byly například $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,4)$, ale i $(-1,1)$ nebo $(-5,25)$.

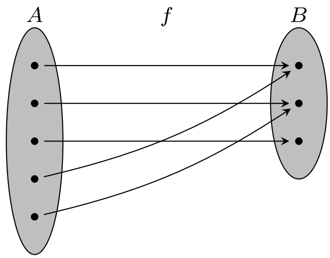
**Cvičení 1.** Kolik existuje funkcí z množiny $A = \{1,2,3\}$ do množiny $B = \{0,1\}$?

Podotkněme, že není nutné, aby všechny prvky množiny $B$ byly použity. Stejně tak není nutné, aby byly prvkům množiny $A$ přiřazeny různé prvky množiny $B$. To vede k následujícím definicím:

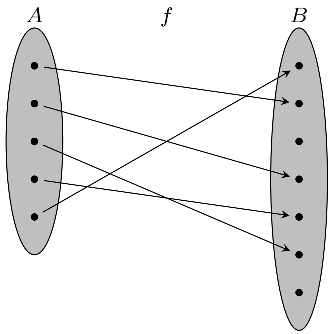
[9] Viz citát výše.

**Definice.** Nechť $f\colon A \to B$ je funkce. Potom:

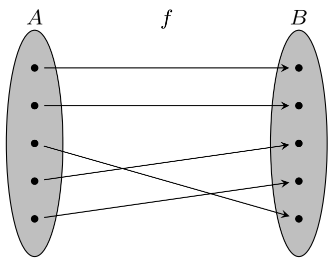
(i) $f$ je *na*, pokud pro každé $b \in B$ existuje $a \in A$ takové, že $f(a) = b$.




(ii) $f$ je *prostá*, jestliže pro všechna $x, y \in A$ platí, že pokud $f(x) = f(y)$, tak nutně $x = y$.




(iii) $f$ je *bijekce*, pokud je zároveň prostá a na.




## Peanovy axiomy

*Mathematical induction is a definition, not a principle.*
*– Bertrand Russell (1872–1970)*

Naším cílem v této kapitole bude definovat přirozená čísla. Velmi zajímavé a možná na první pohled zarážející je to, že přirozená čísla definuje právě možnost dělat na nich indukci. Všechny další vlastnosti, jako je způsob počítání s přirozenými čísly nebo jejich pořadí, potom z této vlastnosti vyplývají.

Bude se nám hodit pracovat i s nulou jako přirozeným číslem, proto rozšiřme množinu $\mathbb{N}$ na množinu přirozených čísel s nulou, kterou označíme $\mathbb{N}_0$. Ve zbytku textu budeme nulu považovat za přirozené číslo.

Přirozená čísla po sobě následují. Začneme nulou, pokaždé přičteme 1 a opakujeme. Tuto vlastnost chceme zahrnout do definice.

Zavedeme proto funkci $s\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, kterou nazveme *následník*[10], jež bude vystihovat to, že jedno číslo následuje po jiném, tedy $s(1) = 2$, $s(2) = 3$ a podobně.

Zamysleme se nad tím, co bychom od této funkce chtěli, aby nám definovala přirozená čísla. Zaprvé, číslo 0 není následníkem žádného čísla. Zadruhé, známe-li následníka nějakého čísla, je toto číslo už jednoznačně určeno (neboli dvě různá čísla nemohou mít stejného následníka). Zatřetí, tato funkce musí mít určitou vlastnost, kterou využijeme při indukci. Při důkazu matematickou indukcí jsme nejprve ukázali, že tvrzení platí pro 0 a poté jsme dokázali, že platí-li pro $n$, tak platí i pro $n+1$. Tím byl důkaz završen – tvrzení platí pro všechna přirozená čísla. Něco podobného vyslovme v jazyce množin, vždyť přirozená čísla jsou také množina:

„Předpokládejme, že $S$ je podmnožina $\mathbb{N}_0$, která obsahuje nulu a pro kterou platí, že pokud $n \in S$, tak i $s(n) \in S$. Potom $S = \mathbb{N}_0$."

Ukáže se, že pouhé tyto tři vlastnosti naprosto stačí k jednoznačné definici přirozených čísel!

Představíme *Peanovy axiomy*, které pro definování množiny přirozených čísel zavedl italský matematik konce 19. století Giuseppe Peano.

**Peanovy axiomy.** *Předpokládejme, že existuje množina $\mathbb{N}_0$ a funkce $s\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ taková, že:*

(1) *Funkce $s$ není na: existuje prvek $0 \in \mathbb{N}_0$ takový, že pro žádné $n \in \mathbb{N}_0$ neplatí $s(n) = 0$.*
(2) *Funkce $s$ je prostá: je-li $s(m) = s(n)$, potom $m = n$.*
(3) *Je-li $S$ podmnožina $\mathbb{N}_0$ taková, že $0 \in S$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ platí $n \in S \implies s(n) \in S$, potom $S = \mathbb{N}_0$.*

**Poznámka.** Všimněme si, že $s\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ znamená, že pro přirozené číslo $n$ platí, že jeho následník $s(n)$ je také přirozené číslo, tedy množina $\mathbb{N}_0$ je *uzavřená na operaci $s$*.

Nic nám nezaručuje, že daná množina skutečně existuje, proto vezmeme její existenci jako axiom neboli tvrzení, které považujeme za pravdivé a nedokazujeme jej. Je to jako můstek, od kterého se musíme odrazit, chceme-li vůbec nějak dál v matematice pracovat.

**Axiom.** (existence přirozených čísel) *Existuje množina $\mathbb{N}_0$ a funkce $s\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, které splňují Peanovy axiomy výše.*

Z 2. axiomu plyne, že různá čísla mají různé následníky. Proto pokud číslo má předchůdce, pak je jen jeden. Která čísla ovšem mají předchůdce mají?

**Tvrzení.** *Pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ různé od 0 existuje právě jedno $m \in \mathbb{N}_0$ takové, že $n = s(m)$.*

*Důkaz.* Chceme ukázat, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}_0$ je buď $n = 0$, nebo $n = s(m)$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}_0$. Využijeme k tomu třetí Peanův axiom a indukci, a to tak, že sestrojíme množinu $S$ obsahující ta čísla $n$, pro která to platí, a pak ukážeme, že $S = \mathbb{N}_0$.

Nechť $S = \{n \in \mathbb{N}_0;\ n = 0 \text{ nebo } n = s(m) \text{ pro nějaké } m \in \mathbb{N}_0\}$. Jistě platí, že $0 \in S$. Nyní předpokládejme, že číslo $n$ je v $S$, a pokusme se ukázat, že potom je i $s(n)$ v $S$. Co lze říct o číslu $s(n)$? Jistě $s(n) = s(m)$ pro nějaké $m \in \mathbb{N}_0$, konkrétně pro $m = n$. Tedy $s(n) \in S$. Podle třetího Peanova axiomu pak platí, že $S = \mathbb{N}_0$, což jsme chtěli ukázat. □

[10] Anglicky je to *successor*, a proto ji značíme $s$.

# Aritmetika

Označení *přirozená čísla* zřejmě pochází z lidské zkušenosti – již starověké civilizace používaly právě čísla 1, 2, ... k počítání každodenních věcí, měření délek a porovnávání množství. Tato čísla se prostě používala k zacházení s přirozeně se vyskytujícími jevy. Např. záporná čísla do tohoto konceptu nepatřila, neboť nelze mít méně než nic (záporné množství lidé ještě neuvažovali), o racionálních, iracionálních či komplexních číslech ani nemluvě.

Přirozená čísla se tedy vyvinula jako čísla používaná k počítání. K tomu budeme potřebovat dvě základní operace, sčítání a násobení.

Uvažme nejprve sčítání. Mějme dva košíky jablek, v jednom 10 a ve druhém 7 kusů ovoce. Představme si, že zatím neumíme sčítat z paměti. Jak zjistíme, kolik jablek máme dohromady? Nejprve spočítáme jablka v prvním košíku, $1, 2, \ldots, 10$, poté bereme do ruky jedno jablku z druhého košíku po druhém a pokračujeme přitom s vyjmenováváním čísel $11, 12, \ldots, 17$. Navíc víme-li, jak přičíst číslo 7, potom umíme přičíst i číslo 8 – prostě přidáme jedno jablko. Na základě této zkušenosti bychom rádi definovali sčítání takto:

$$m + (n + 1) = (m + n) + 1.$$

Jedná se o rekurzivní definici – víme-li, jak přičíst $n$, tak víme i to, jak přičíst $n + 1$.

Potřebujeme ovšem ještě nějaký základní kámen, od kterého se odrazíme. Tím pro nás bude přičítání nuly, tedy vlastnost, že nepřidáme-li žádné jablko, počet jablek se nezmění.

$$m + 0 = m.$$

Je tu ovšem jistý zádrhel: Zaprvé, abychom k číslu $m$ přičetli $n+1$, potřebujeme již znát hodnotu $m + n$. Tu můžeme získat postupným přičítáním jednotek k číslu $m$, dokud se nedostaneme na hodnotu $n$. To je intuitivní přístup, v naší definici podle Peanových axiomů ovšem není řečeno, zda se takto vůbec někdy dobereme čísla $n$.

Abychom dali rekurzivní definici pevný rámec a zároveň se vyhnuli slovnímu spojení „a tak dále, dokud nenarazíme na $n$“, dokážeme si následující větu pro obecný případ, kterou poté aplikujeme ve vhodných podmínkách.

**Věta.** (o rekurzi) *Mějme množinu $X$ a funkci $f\colon X \to X$. Nechť $c \in X$. Potom existuje právě jedna funkce $\varphi\colon \mathbb{N}_0 \to X$ taková, že*

(1) $\varphi(0) = c$,
(2) $\varphi(s(n)) = f(\varphi(n))$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}_0$.

**Poznámka.** Funkce $\varphi$ nám tedy říká, kolikrát jsme aplikovali funkci $f$ na prvek $c$, jedná se o opakovanou kompozici funkce $f$. Máme

$$\varphi(n) = f^n(c) = \underbrace{f(f(\cdots f(}_{n\text{-krát}}c)\cdots)).$$

Chceme ukázat to, že taková funkce existuje a že je jen jedna (pro dané $f$ a $c$). Když později nahradíme $f$ funkcí $s$, potvrdíme tak, že rekurzivní definice sčítání dává smysl neboli že je *dobře definovaná*.

*Důkaz.* Nejprve se ohlédněme a vzpomeňme si, co je to funkce. Funkci jsme si zadefinovali jako množinu uspořádaných dvojic, která splňuje dva požadavky: každý prvek vstupní množiny je v nějaké dvojici a tato dvojice je jedinečná.

My navíc potřebujeme, aby funkce $\varphi$ splňovala body (1) a (2), tedy aby byla takovou podmnožinou $\mathbb{N}_0 \times X$, že

(1) $(0, c) \in \varphi$,
(2) pokud $(n, x) \in \varphi$, tak také $(s(n), f(x)) \in \varphi$.

Podmnožin splňujících body (1) a (2) (které však nemusí být funkce) je mnoho, např. i celá množina $\mathbb{N}_0 \times X$. My ukážeme, že ta, kterou hledáme (tj. která bude zároveň funkcí), je průnikem všech podmnožin splňujících body (1) a (2). Jinými slovy to znamená, že naše hledaná podmnožina je nejmenší možná.

Nechť $\varphi$ je průnikem všech podmnožin $U \subset \mathbb{N}_0 \times X$, pro které platí

(1) $(0, c) \in U$
(2) pokud $(n, x) \in U$, tak také $(s(n), f(x)) \in U$.

Nejprve ukážeme, že se jedná o funkci. To znamená ukázat, že pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ existuje právě jedno $x \in X$ takové, že $(n, x) \in \varphi$. Ukážeme to pomocí indukce, tedy s využitím třetího Peanova axiomu.

Nechť $S = \{n \in \mathbb{N}_0;\ (n, x) \in \varphi \text{ pro nějaké } x \in X\}$ je množina všech přirozených čísel, pro která existuje nějaká funkční hodnota $x$. Podle první podmínky je $0 \in S$. Nyní pokud $n \in S$, tak existuje $x \in X$, pro které $(n, x) \in \varphi$, a proto podle druhé podmínky také $(s(n), f(x)) \in \varphi$. Jelikož $f(x) \in X$, získáváme $s(n) \in S$ a induktivně podle třetího axiomu pak $S = \mathbb{N}_0$.

Tedy pro každé $n \in \mathbb{N}_0$ existuje alespoň jedna dvojice $(n, x)$. Chceme ukázat, že tato dvojice je jen jedna, což bude znamenat, že $\varphi$ definuje funkci. K tomu využijeme podmínku, že $\varphi$ je průnikem všech podmnožin $\mathbb{N}_0 \times X$, které splňují (1) a (2).

Nechť $T = \{n \in \mathbb{N}_0;\ (n, x) \in \varphi \text{ pro právě jedno } x \in X\}$ je množina všech přirozených čísel, pro něž existuje jedinečná funkční hodnota $x$. Ověříme, že $T = \mathbb{N}_0$.

Nejprve ukážeme, že $0 \in T$. Pro spor předpokládejme, že existuje $d \neq c$, pro které $(0, d) \in \varphi$. Uvažme množinu $\varphi^* = \varphi \setminus \{(0, d)\}$. Potom $(0, c) \in \varphi^*$, a pokud $(n, x) \in \varphi^*$, tak $(s(n), f(x)) \in \varphi^*$. To platí, protože $(s(n), f(x))$ rozhodně není odebranou dvojicí $(0, d)$, jelikož $0 \neq s(n)$ pro žádné $n \in \mathbb{N}_0$. Jenže $\varphi^* \subset \varphi$ splňuje podmínky (1) a (2), což je ve sporu s předpokladem, že $\varphi$ je průnikem všech takových podmnožin. Tedy $0 \in T$.

Obdobně ukážeme, že pokud $n \in T$, tak také $s(n) \in T$. Předpokládejme tedy, že $(n, x) \in \varphi$ pro jedno jediné $x \in X$. Potom podle (2) platí $(s(n), f(x)) \in \varphi$. Pro spor nechť existuje $y \neq f(x)$ takové, že $(s(n), y) \in \varphi$. Sestrojme tentokrát $\varphi^* = \varphi \setminus \{(s(n), y)\}$. Potom $(0, c) \in \varphi^*$. Mějme $(m, z) \in \varphi^*$. Chceme ukázat, že potom $(s(m), f(z)) \in \varphi^*$. Buď $m = n$, potom $z = x$ a víme, že $(s(m), f(z))$ ve $\varphi^*$ leží. Nebo platí $m \neq n$. V tom případě $(s(m), f(z)) \in \varphi^*$, protože $(s(m), f(z)) \in \varphi$ podle (2) a zároveň $s(m) \neq s(n)$ podle 2. axiomu, takže jsme tuto dvojici nemohli vyhodit jako $(s(n), y)$. V každém případě pro $\varphi^*$ platí (2), což je spor s tím, že $\varphi$ je nejmenší podmnožinou splňující body (1) a (2).

Z toho plyne, že pokud $n \in T$, tak také $s(n) \in T$. Potom podle třetího axiomu $T = \mathbb{N}_0$.

Dokázali jsme, že takto sestrojené $\varphi$ je funkce, která splňuje podmínky věty o rekurzi. Navíc tato funkce je jen jedna. Předpokládejme totiž, že máme jinou funkci $\psi$, která také řeší naše zadání. Potom je z definice naše sestrojená funkce $\varphi$ podmnožinou $\psi$. Ale z funkce nelze už nic škrtnout, jinak by nebyla definovaná na celém oboru, a proto $\varphi = \psi$. Tím jsme hotovi. $\square$

K čemu nám věta o rekurzi bude? Už dříve jsme naťukli, že součet dvou čísel můžeme definovat pomocí opakovaného přičítání čísla 1. Dosaďme za $f$ funkci následník $s$ a za $c$ nějaké počáteční číslo. Potom funkci $\varphi$ můžeme chápat jako operaci „přičti to k danému číslu $c$“. Druhá část věty o rekurzi se pak přemění na tvrzení „nejprve vzít následníka čísla $n$ a poté ho přičíst je stejné, jako nejprve přičíst číslo $n$ a poté vzít následníka součtu“. Pokud tedy za $f$ vezmeme funkci následník $s$, pak nám věta o rekurzi říká, že součet, kterého se takto dobereme, je právě jeden. To je důležité, protože když definujeme operaci, musíme se ujistit, že nám ta operace vyhodí právě jeden výsledek.

**Poznámka.** Pro lepší pochopení toho, co se myslí pojmem „dobře definovaná operace“, zabrousíme do počítání modulo 3. Nejde o nic jiného, než že číslo $n$ nahradíme jeho zbytkem po dělení 3.

Toto číslo pak značíme $n_3$.[11] Např. $32_3 = 2_3$ a $4_3 = 1_3$. Představme si, že bychom rádi definovali mocnění modulo 3. Intuitivně zkusíme definovat

$$(m_3)^{n_3} = (m^n)_3,$$

tedy že vezmeme-li dvě čísla $m$ a $n$, pak dostaneme stejný výsledek, když nejprve vezmeme zbytky těch čísel a umocníme, jako když nejprve umocníme a potom vezmeme zbytek. Ovšem potom

$$1_3 = 4_3 = (2^2)_3 = (2_3)^{2_3} = (2_3)^{5_3} = (2^5)_3 = 32_3 = 2_3,$$

což je zjevný nesmysl – umocněním čísla $2_3$ postupně na čísla $2_3$ a $5_3$ jsme dostali různé výsledky, přitom však $2_3 = 5_3$, a tedy bychom měli získat stejný výsledek. Toto se stalo právě proto, že naše operace nebyla dobře definovaná.

Nyní můžeme definovat mnohé rekurzivní operace na přirozených číslech pro dané $m \in \mathbb{N}_0$.

(1) *Sčítání* $\alpha_m\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$.

Operace sčítání je definována rekurzivně takto:

$$\alpha_m(0) = m,$$
$$\alpha_m(s(n)) = s(\alpha_m(n)).$$

Budeme používat běžné značení $\alpha_m(n) = m+n$, a proto předchozí dvě rovnosti lze přeložit jako $m + 0 = m$ a $m + (n + 1) = (m + n) + 1$.

K tomu, aby bylo sčítání dobře definované, jsme využili větu o rekurzi s $c = m$ a $f = s$.

(2) *Násobení* $\mu_m\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$.

Násobení rekurzivně definujeme pomocí

$$\mu_m(0) = 0,$$
$$\mu_m(s(n)) = \mu_m(n) + m.$$

Tentokrát jsme ve větě o rekurzi položili $c = 0$ a $f(x) = x + m$.

Násobení zapisujeme jako obvykle $\mu_m(n) = mn$. Použitím tohoto zápisu na předchozí dvě rovnice dostaneme $m \cdot 0 = 0$ a $m(n + 1) = mn + m$.

Všimněme si, že k samotné definici násobení jsme potřebovali mít už zadefinované sčítání.

(3) *Mocnění* $\pi_m\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$.

Mocniny definujeme rekurzivně pomocí

$$\pi_m(0) = 1,$$
$$\pi_m(s(n)) = m\pi_m(n).$$

Zde jsme položili $c = 1$ a $f(r) = rm$.

Běžně zapisujeme $\pi_m(n) = m^n$, a mocnění je tedy definováno podle $m^0 = 1$ a $m^{(n+1)} = m \cdot m^n$.

Opět si uvědomme, že v definici předpokládáme, že násobení je už definováno.

[11] Toto značení není obecně moc rozšířené.

Máme definované základní operace na přirozených číslech a je čas dokázat některá základní „pravidla“ pro jejich používání. Tyto zásady běžně používáme. A nyní nás vlastně čeká ukázat, že tato pravidla nejsou ve své podstatě pravidla, nýbrž důsledky Peanových axiomů!

Nejprve nahradíme zápis pomocí funkce následník $s(n)$ běžnějším značením $n+1$. Dostaneme tak rekurzivní definice sčítání a násobení

$$
\begin{aligned}
&(\alpha 1) \quad m+0=m, \qquad &&(\alpha 2) \quad m+(n+1)=(m+n)+1,\\
&(\mu 1) \quad m0=0, \qquad &&(\mu 2) \quad m(n+1)=mn+m.
\end{aligned}
$$

Důkazy základních pravidel využívají indukci neboli třetí Peanův axiom. Ukážeme si to nejprve na příkladu.

**Tvrzení.** *Platí*

$$
\begin{aligned}
&(a) \quad 0+m=m,\\
&(b) \quad 1+m=m+1,\\
&(c) \quad 0m=0,\\
&(d) \quad 1m=m.
\end{aligned}
$$

*Důkaz.* (*a*) Použijeme indukci podle $m$. Nechť $S=\{m\in\mathbb{N}_0;\ 0+m=m\}$.

Potom $0\in S$, neboť $0+0=0$ podle $(\alpha 1)$. Dále pokud $m\in S$, tak

$$0+(m+1)=(0+m)+1=m+1$$

podle $(\alpha 2)$, tedy $m+1\in S$. Z 3. axiomu potom plyne $S=\mathbb{N}_0$, a tedy $0+m=m$ pro všechna $m\in\mathbb{N}_0$.

(*b*) Buď $S=\{m\in\mathbb{N}_0;\ 1+m=m+1\}$. Potom

$$
\begin{aligned}
1+0&=1 &&\text{podle } (\alpha 1)\\
&=0+1 &&\text{podle } (a),
\end{aligned}
$$

takže $0\in S$.

Předpokládejme, že $m\in S$. Potom

$$
\begin{aligned}
1+(m+1)&=(1+m)+1 &&\text{podle } (\alpha 2)\\
&=(m+1)+1 &&\text{podle indukčního předpokladu,}
\end{aligned}
$$

a tedy i $m+1\in S$. Podle třetího axiomu pak dostáváme $S=\mathbb{N}_0$, neboli $1+m=m+1$ pro všechna $m\in\mathbb{N}_0$.

**Cvičení 2.** Dokaž si sám (sama) body (*c*) a (*d*). □

## Asociativita

**Tvrzení.** *Pro všechna $m,n,p\in\mathbb{N}_0$ platí*

$$(m+n)+p=m+(n+p).$$

Ukážeme, že operace $+$ je asociativní, což ve volném překladu znamená „zapomeňte na závorky“. Díky této vlastnosti později budeme moct psát prostě $m+n+p$ a budeme vědět, že nezáleží na tom, zda nejprve sečteme $m$ a $n$ a potom přičteme $p$, nebo zda k $m$ přičteme součet $n+p$.

*Důkaz.* Důkaz provedeme indukcí podle $p$. Mějme libovolná, avšak pevně stanovená čísla $m$ a $n$. Nechť

$$S=\{p\in\mathbb{N}_0;\ (m+n)+p=m+(n+p)\}.$$

Potom $0 \in S$, protože

$$\begin{aligned}(m+n)+0 &= m+n && \text{podle } (\alpha 1)\\ &= m+(n+0) && \text{podle } (\alpha 1).\end{aligned}$$

Nyní jestliže $p \in S$, potom

$$\begin{aligned}(m+n)+(p+1) &= ((m+n)+p)+1 && \text{podle } (\alpha 2)\\ &= (m+(n+p))+1 && \text{podle indukčního předpokladu}\\ &= m+((n+p)+1) && \text{podle } (\alpha 2)\\ &= m+(n+(p+1)) && \text{podle } (\alpha 2),\end{aligned}$$

takže $p+1 \in S$.

Potom třetí axiom říká, že $S = \mathbb{N}_0$, a tedy $(m+n)+p = m+(n+p)$ pro všechna $m, n, p \in \mathbb{N}_0$, jak jsme chtěli ukázat. □

**Poznámka.** Všimněte si, že pro první část důkazu jsme potřebovali pouze ($\alpha 1$), kdežto pro indukční krok jsme již využili ($\alpha 2$).

## Komutativita

**Tvrzení.** *Pro všechna $m, n \in \mathbb{N}_0$ máme*

$$m+n = n+m.$$

To, že je operace + komutativní, znamená, že můžeme prohodit pořadí sčítanců. Zdá se to jako jasná věc – jako výstraha, proč je potřeba to dokázat, nám poslouží příklad operace, která není komutativní, například odčítání nebo dělení, zde na pořadí záleží!

*Důkaz.* Použijeme indukci na $n$. Mějme $m \in \mathbb{N}_0$ a sestrojme množinu

$$S = \{n \in \mathbb{N}_0;\ m+n = n+m\}.$$

Nyní podle ($\alpha 1$) a ($a$) víme, že $0 \in S$. Dále pokud platí $m+n = n+m$, tak

$$\begin{aligned}m+(n+1) &= (m+n)+1 && \text{podle } (\alpha 2)\\ &= (n+m)+1 && \text{podle indukčního předpokladu}\\ &= 1+(n+m) && \text{podle } (b)\\ &= (1+n)+m && \text{díky asociativitě sčítání}\\ &= (n+1)+m && \text{podle } (b),\end{aligned}$$

a proto $n+1 \in S$. Z třetího Peanova axiomu pak vyplývá, že $S = \mathbb{N}_0$, a tedy pro všechna $m, n \in \mathbb{N}_0$ platí $m+n = n+m$, čímž jsme hotovi. □

**Poznámka.** Znovu si všimněme, které předchozí vlastnosti jsme použili. Tentokrát jsme potřebovali také ($a$) a ($b$), na rozdíl od důkazu asociativity, a také byla zapotřebí asociativita samotná. Proto bývá výhodné najít vhodné pořadí pro dokazování tvrzení, na což ještě narazíme.

## Distributivita

**Tvrzení.** *Pro všechna $m, n, p \in \mathbb{N}_0$ platí*

$$m(n+p) = mn+mp.$$

Distributivitě násobení přes sčítání často říkáme „roznásobení závorky“. I tato vlastnost je dokazatelná na základě tří Peanových axiomů.

*Důkaz.* Budeme postupovat indukcí podle $p$. Pro daná $m, n \in \mathbb{N}_0$ označme

$$S = \{p \in \mathbb{N}_0;\ m(n+p) = mn + mp\}.$$

Nejprve ukážeme, že $0 \in S$. Máme

$$\begin{aligned} m(n+0) &= mn && \text{podle } (\alpha 1)\\ &= mn + 0 && \text{podle } (\alpha 1)\\ &= mn + m0 && \text{podle } (\mu 1). \end{aligned}$$

Nyní předpokládejme, že $p \in S$. Potom

$$\begin{aligned} m(n+(p+1)) &= m((n+p)+1) && \text{podle } (\alpha 2)\\ &= m(n+p) + m && \text{podle } (\mu 2)\\ &= (mn+mp)+m && \text{podle indukčního předpokladu}\\ &= mn + (mp+m) && \text{díky asociativitě}\\ &= mn + m(p+1) && \text{podle } (\mu 2), \end{aligned}$$

a tedy $p+1 \in S$. Podle třetího axiomu pak máme, že $S = \mathbb{N}_0$, a tedy pro všechna $m, n, p \in \mathbb{N}_0$ platí distributivní zákon. □

**Poznámka.** Poznamenejme, že k důkazu jsme kromě rekurzivních definic sčítání a násobení potřebovali také asociativitu, kterou již máme dokázanou.

## Násobení

Zbývá nám ukázat asociativitu a komutativitu násobení.

**Úloha 1.** Ukaž, že pro všechna $m, n, p \in \mathbb{N}_0$ platí $m(np) = (mn)p$.

Důkaz následujícího tvrzení je o něco důvtipnější a zajímavější.

**Tvrzení.** *Pro všechna $m, n \in \mathbb{N}_0$ platí komutativní zákon $mn = nm$.*

*Důkaz.* Mějme pro dané $m \in \mathbb{N}_0$

$$S = \{n \in \mathbb{N}_0;\ mn = nm\}.$$

Podle $(c)$ je 0 v $S$. Nyní jestliže $n \in S$, tak

$$\begin{aligned} m(n+1) &= mn + m && \text{podle } (\mu 2)\\ &= nm + m && \text{díky komutativitě.} \end{aligned}$$

Nyní přijde ta hustokrutopřísná část. Hodilo by se nám, kdybychom mohli vytknout $m$ „dozadu“, to bohužel ještě nevíme. Ovšem vzhledem k tomu, že jsme už ukázali vytýkání „dopředu“ neboli distributivitu, můžeme se právem domnívat, že půjde něco obdobného i opačně. Klíčem k tomu je další indukce. Ať

$$T = \{m \in \mathbb{N}_0;\ nm + m = (n+1)m\}.$$

Zjevně $0 \in T$. Dále pokud $m \in T$, tak

$$\begin{aligned} n(m+1)+(m+1) &= (nm+n)+(m+1) && \text{podle } (\mu 2) \\ &= nm+n+m+1 && \text{díky asociativitě můžeme rozpustit závorky} \\ &= nm+m+n+1 && \text{díky komutativitě sčítání lze přeuspořádat členy} \\ &= (nm+m)+(n+1) && \text{díky asociativitě můžeme závorkovat, jak chceme} \\ &= (n+1)m+(n+1) && \text{podle indukčního předpokladu} \\ &= (n+1)(m+1) && \text{podle } (\mu 2). \end{aligned}$$

Tedy $m+1 \in T$ a podle třetího axiomu $T = \mathbb{N}_0$. Konečně tedy dostáváme, že $m(n+1) = (n+1)m$, a tedy $n+1 \in S$. Podle třetího Peanova axiomu potom $S = \mathbb{N}_0$ a $mn = nm$ pro všechna $m, n \in \mathbb{N}_0$, jak jsme chtěli ukázat. □

## Porovnávání

Kromě sčítání a násobení můžeme přirozená čísla také porovnávat. Jak definujeme, že $a$ je menší nebo rovno $b$? Můžeme se na to podívat tak, že seřadíme přirozená čísla do řady podle toho, jak po sobě *následují*, a řekneme, že $a$ je menší nebo rovno $b$, pokud je $a$ v řadě dříve (nebo nastejno) než $b$. Jenže pokud jsou čísla $a$ nebo $b$ velmi vysoká, tak bychom se k nim také nemuseli za lidský život dopracovat. Zkusme jiný pohled, řekněme, že $a \leq b$, pokud je rozdíl $b - a$ také přirozeným číslem. Avšak rozdíl jsme ještě nedefinovali, navíc se dostáváme k definici kruhem, kdy rozdíl $b - a$ dvou přirozených čísel můžeme vůbec definovat jen tehdy, když $a \leq b$, protože záporná čísla vlastně ještě neznáme. Tento zádrhel však můžeme snadno obejít tak, že definujeme $a \leq b$ právě tehdy, když existuje přirozené číslo $r$ takové, že $b = a + r$. Číslo $r$ je tu tím nezáporným rozdílem.

**Definice.** Definujme relaci $\leq$ na množině přirozených čísel $\mathbb{N}_0$ takto:

$$a \leq b \iff \text{existuje } r \in \mathbb{N}_0 \text{ splňující } b = a + r.$$

Tato definice nám umožňuje dokázat několik základních pravidel pro porovnávání přirozených čísel. Uvádíme je jako cvičení.

**Cvičení 3.** Ukaž, že pokud pro přirozená čísla $a$, $b$ a $c$ platí $a \leq b$ a $b \leq c$, potom $a \leq c$.

**Cvičení 4.** Ukaž, že pro všechna přirozená čísla $n$ platí $n \leq n$.

**Úloha 2.** Ukaž, že pokud $a \leq b$ a současně $b \leq a$, pak nutně $a = b$.

V předchozích třech cvičeních a úloze jsme postupně ukázali tři vlastnosti porovnávání přirozených čísel, které definují *uspořádání*:

**Definice.** *Uspořádání* je relace $R$ na nějaké množině, která je:

(1) *Tranzitivní*: pro všechna $x, y, z$ z dané množiny platí: jestliže $xRy$ a $yRz$, potom i $xRz$.
(2) *Reflexivní*: pro všechna $x$ z dané množiny platí $xRx$ neboli $x$ je v relaci samo se sebou.
(3) *Antisymetrická*: pro všechna $x, y$ z dané množiny platí „jestliže $xRy$ a současně $yRx$, potom $x = y$“.

Tedy relace $\leq$ na přirozených číslech je relací uspořádání.

Navíc si všimněme dvou dalších zajímavých vlastností. Všechny prvky množiny přirozených čísel jsou vzájemně porovnatelné, to znamená, že pro každá dvě čísla $a$ a $b$ platí buď $a \leq b$, nebo $b \leq a$ (nebo obojí, viz vlastnost antisymetrie). Tuto vlastnost rozhodně nemají všechny množiny a relace: vezměme například relaci $\subset$ „být podmnožinou“.

**Cvičení 5.** Uvaž relaci „být podmnožinou“ $\subset$ na potenční množině $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ množiny $A = \{a, b\}$. Najdi dva prvky množiny $P(A)$, které mezi sebou nejsou porovnatelné, a dva prvky, které porovnatelné jsou.

Množina přirozených čísel je ještě k tomu takzvaně dobře uspořádaná, což znamená, že každá neprázdná podmnožina $\mathbb{N}_0$ má nejnižší prvek.

**Definice.** *Nejnižší prvek* je takový prvek $x$, že pro všechna $y$ z dané množiny platí $x \leq y$.

**Tvrzení.** *Každá neprázdná podmnožina přirozených čísel má nejnižší prvek.*

*Důkaz.* Tvrzení dokážeme sporem. Pro spor předpokládejme, že $S \subset \mathbb{N}_0$ je neprázdná podmnožina, která nemá nejnižší prvek. Definujme $S^* = \{n \in \mathbb{N}_0;$ žádné z čísel $0, 1, \ldots, n$ není v $S\}$. Naším cílem bude ukázat, že $S^* = \mathbb{N}_0$, tedy že $S$ je prázdná množina, což je spor.

Nejprve si všimněme, že $0 \in S^*$, neboť jinak by 0 byla v $S$ a pak by $S$ měla nejnižší prvek.

Nyní pokud $n \in S^*$, tak žádné z čísel $0, 1, \ldots, n$ není v $S$, a proto ani $n + 1$ nemůže být v $S$, jinak by $n + 1$ bylo nejnižším prvkem $S$. Tedy žádné z čísel od nuly po $n + 1$ není v $S$, a proto $(n + 1) \in S^*$.

Dle třetího Peanova axiomu máme $S^* = \mathbb{N}_0$, což je kýžený spor. □

**Cvičení 6.** Rozhodni a zdůvodni, zdali jsou následující množiny dobře uspořádané:

(1) množina celých čísel $\mathbb{Z}$,
(2) množina kladných racionálních čísel $\mathbb{Q}^+$,
(3) potenční množina[12] $P(A)$ množiny $A = \{a, b, c\}$.

**Úloha 3.** Ukaž, že každá ostře klesající posloupnost $x_1, x_2, x_3, \ldots$ přirozených čísel musí být konečná.

## Je množina přirozených čísel jen jedna?

Zatím jsme v našem povídání hovořili o jedné množině přirozených čísel, která je definovaná Peanovými axiomy. Všechny vlastnosti aritmetiky a uspořádání přirozených čísel jsme dokázali pouze na základě těchto axiomů. Ale co když existuje ještě jiná množina, která splňuje tři Peanovy axiomy, která se od té naší liší?

Předpokládejme, že taková množina existuje, a nazvěme ji $\mathbb{N}_0^*$ spolu s funkcí následník $s^*$, která splňuje tři Peanovy axiomy. Potom můžeme stejným způsobem jako dříve odvodit pravidla aritmetiky a uspořádání. Předpokládali bychom, že tato množina bude „v podstatě stejná“ jako $\mathbb{N}_0$, až na to, že její prvky se mohou jinak jmenovat, ale chovat se budou stejně. To, jak se daný objekt chová, je ale právě to, o co nám v matematice jde! Vůbec nám nezáleží na tom, co daný objekt *je*, často to ani zjistit nemůžeme.

Proto zavedeme důležitý pojem, a to *izomorfismus*. Říkáme, že dvě množiny jsou izomorfní, pokud můžeme prvky jedné množiny přejmenovat, abychom dostali druhou množinu s tím, že všechny aritmetické vlastnosti zůstanou zachovány. V našem případě navíc potřebujeme izomorfismus, který zachovává i uspořádání.

Nebudeme zde zabíhat do detailů, pouze zmíníme, že bijekce mezi $\mathbb{N}_0$ a $\mathbb{N}_0^*$ zachovává sčítání, násobení i uspořádání. (Tedy například u sčítání nezáleží na tom, zda nejdřív dvě čísla sečteme a potom daný součet zobrazíme tou bijekcí (přejmenujeme), nebo zda nejdřív dvě čísla zobrazíme (přejmenujeme) a poté tyto obrazy sečteme.) To vše lze dokázat indukcí.

To znamená, že pouhé tři Peanovy axiomy definují přirozená čísla jednoznačně!

[12] Potenční množina je množina všech podmnožin dané množiny.

## Závěr

Gratulujeme Ti k přečtení druhého dílu seriálu! Tento díl byl daleko více technický a rigorózní než díl předchozí. My doufáme, že si každý přišel aspoň v jednom díle na své. Axiomatický přístup, který jste měli možnost zažít v tomto povídání, je typický pro studium čisté matematiky na vysoké škole. Pokud Tě to zaujalo a chceš si o systémech čísel přečíst víc, vřele doporučujeme publikaci *The Foundations of Mathematics* (I. Stewart a D. Tall), ze které jsme jako autoři také čerpali.

Přejeme Ti hodně zdaru při řešení soutěžních úloh a těšíme se na Tebe u příštího dílu, tentokrát o algoritmech.

### Návody ke cvičením

**1.** Podívej se na to, kolika způsoby lze spárovat prvky $A$ s prvky $B$. Pozor na to, že musíš použít všechny prvky $A$ právě jednou, ale prvky $B$ se klidně můžou opakovat.

**3.** Rozepiš definice.

**4.** Použij $r = 0 \in \mathbb{N}_0$.

**5.** O $\{a\}$ a $\{b\}$ se nedá říct ani $\{a\} \subset \{b\}$, ani $\{b\} \subset \{a\}$. Naopak prvky $\emptyset$ a $\{a, b\}$ porovnatelné jsou, neboť $\emptyset \subset \{a, b\}$.

**6.** (1) Ne. (2) Ne. (3) Ne.

### Návody k úlohám

**2.** Ukaž nejprve implikaci „jestliže $a + t = b + t$, pak $a = b$“.

**3.** Uvaž nejnižší prvek množiny $\{x_1, x_2, x_3, \dots\} \subset \mathbb{N}_0$. Pokračuj sporem.

# Výsledky po 3. podzimní sérii

| | jméno | příjmení | r. | škola | 1p | 2p | 3p | 1s | celkem | hist. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1.** | *Michal* | *Janík* | 3 | GKepleraPH | 25 | 25 | 25 | 15 | **90,00** | 405 |
| **2.** | *Matouš* | *Šafránek* | 4 | GKepleraPH | 25 | 22 | 25 | 15 | **87,49** | 459 |
| **3.** | *Samuel* | *Rosiar* | 3 | GKepleraPH | 25 | 22 | 25 | 14 | **86,04** | 537 |
| **4.** | *Jan* | *Slíva* | 1 | GMensaPH | 25 | 22 | 24 | 15 | **85,93** | 246 |
| **5.** | *Matěj* | *Gajdoš* | 4 | GJatečníÚL | 22 | 23 | 25 | 15 | **85,00** | 85 |
| **6.** | *Jakub* | *Šošovička* | 3 | SG CEN BA | 22 | 24 | 24 | 15 | **84,63** | 85 |
| **7.** | *Michal* | *Kuba* | 3 | GJPekařeMB | 21 | 22 | 25 | 11 | **79,81** | 80 |
| **8.** | *Jakub* | *Štepo* | 3 | GEBenešeKL | 18 | 20 | 25 | 15 | **77,54** | 493 |
| **9.** | *Veronika* | *Menšíková* | 0 | ArcibisGPH | 21 | 20 | 23 | 12 | **75,94** | 76 |
| **10.** | *Viktor* | *Gola* | 1 | MG Vsetín | 19 | 20 | 23 | 11 | **74,15** | 74 |
| **11.** | *Martin* | *Fof* | 4 | MendelG OP | 15 | 17 | 25 | 15 | **71,51** | 354 |
| **12.** | *Jan Theodor* | *Hrdý* | 1 | G UherBrod | 19 | 19 | 22 | 11 | **71,12** | 71 |
| **13.** | *Helena* | *Muchová* | 0 | GKepleraPH | 20 | 15 | 19 | 13 | **67,37** | 67 |
| **14.** | *David* | *Hromádka* | 1 | GNadAlejPH | 20 | 19 | 19 | 9 | **66,31** | 66 |
| **15.** | *Michal* | *Pecho* | 4 | SPŠDubnica | 21 | 16 | 18 | 10 | **64,68** | 72 |
| **16.** | *Ivan* | *Žemlička* | 1 | GÚstavníPH | 19 | 19 | 20 | 6 | **64,01** | 64 |
| **17.** | *Benedikt* | *Bareš* | 4 | G Dobruška | 14 | 14 | 21 | 15 | **63,76** | 320 |
| **18.** | *Štěpán* | *Varhaník* | 2 | G Chrudim | 15 | 18 | 23 | 7 | **63,19** | 63 |
| **19.** | *Jaromír* | *Potůček* | 3 | GKepleraPH | 18 | 20 | 21 | 4 | **62,19** | 169 |
| **20.** | *Anastasia* | *Bredikhina* | 1 | GKepleraPH | 16 | 20 | 19 | 5 | **60,84** | 264 |
| **21.** | *Jakub* | *Vlček* | 3 | G Příbor | 18 | 10 | 20 | 10 | **58,10** | 265 |
| **22.** | *Ondrej* | *Králik* | 1 | GAlejKošic | 15 | 21 | 22 | – | **57,16** | 57 |
| **23.** | *Alica* | *Dományová* | 2 | G Gröss BA | 16 | 19 | 14 | 7 | **56,34** | 56 |
| **24.** | *Ekaterina* | *Danilina* | 3 | GKepleraPH | 16 | 10 | 23 | 4 | **53,44** | 222 |
| **25.** | *Jakub* | *Černý* | 4 | GJNerudyPH | 11 | 10 | 19 | 9 | **49,27** | 49 |
| **26.** | *Denisa* | *Hanušková* | 4 | G VelMeziř | 18 | 10 | 17 | 5 | **49,22** | 537 |
| **27.** | *Zdeněk* | *Pezlar* | 4 | GJarošeBO | 8 | 15 | 11 | 15 | **48,86** | 635 |
| **28.** | *Markéta* | *Hanušková* | 4 | G VelMeziř | 18 | 15 | 12 | 3 | **48,14** | 545 |
| **29.** | *Lenka* | *Poljaková* | 2 | GJŠkodyPŘ | 16 | 11 | 20 | – | **47,75** | 304 |
| **30.** | *Šimon* | *Rada* | 4 | GKepleraPH | 17 | 8 | 14 | 9 | **47,21** | 67 |
| **31.** | *Alexandr* | *Tabara* | 4 | GymnJanŠabr | 14 | 14 | 15 | 4 | **47,05** | 350 |
| **32.** | *Petr* | *Hladík* | 4 | GMikul23PL | 14 | 14 | 12 | 7 | **46,91** | 506 |
| **33.** | *Magdaléna* | *Cincibuchová* | 0 | GKepleraPH | 13 | 15 | 18 | – | **46,65** | 47 |
| **34.** | *Tomáš* | *Flídr* | 4 | G Kojetín | – | 14 | 12 | 15 | **41,84** | 678 |
| **35.** | *Daniela* | *Strnadová* | 1 | GJatečníÚL | 2 | 8 | 22 | 8 | **39,60** | 148 |
| **36.** | *Hynek* | *Jakeš* | 4 | SlovanG OL | 19 | 19 | – | – | **38,23** | 104 |
| **37.** | *Lukáš* | *Wendzel* | 3 | G Fren | – | 19 | 18 | – | **37,15** | 37 |
| **38.** | *Jan* | *Karásek* | 4 | GJNerudyPH | 8 | 6 | 16 | 5 | **35,00** | 35 |
| **39.** | *Eliška* | *Valentová* | 3 | GJWolkraPV | – | 12 | 21 | – | **33,08** | 33 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **40.** | *Vít* | *Hanika* | 3 | GKepleraPH | 3 | 17 | 13 | – | **33,00** | 265 |
| **41.** | *Michaela* | *Valtrová* | 3 | MendelG OP | 14 | 7 | 9 | 2 | **32,67** | 137 |
| **42.** | *Daniel* | *Procházka* | 4 | GUHradiště | 14 | 17 | – | – | **31,27** | 31 |
| **43.** | *František* | *Janošík* | 2 | MendelG OP | – | 13 | 13 | 5 | **30,90** | 31 |
| **44.** | *Jan* | *Tregler* | 2 | GKepleraPH | 7 | 13 | 4 | 6 | **29,89** | 30 |
| **45.** | *Helena* | *Boušová* | 2 | G Teplice | 15 | 13 | – | – | **28,05** | 28 |
| **46.** | *Julie* | *Matulová* | 2 | G Dobruška | 8 | 6 | 14 | – | **27,91** | 85 |
| **47.** | *Eliška* | *Andrýsková* | 2 | GJŠkodyPŘ | 5 | 5 | 16 | – | **26,54** | 27 |
| **48.** | *František* | *Hep* | 3 | CírkGPlzeň | 7 | 7 | 12 | – | **26,03** | 26 |
| **49.** | *Thuc Anh* | *Leová* | 0 | GKepleraPH | 8 | 8 | 8 | – | **25,02** | 25 |
| **50.** | *Markéta* | *Kalendová* | 2 | ArcibisGPH | 13 | 12 | – | – | **24,89** | 25 |
| **51.** | *Vít* | *Křivonoska* | 3 | GVoděraPH | 14 | 10 | – | – | **24,77** | 25 |
| **52.** | *Bobur* | *Toshtemirov* | 3 | GMikul23PL | 13 | 10 | – | – | **23,77** | 24 |
| **53.** | *Vendula* | *Onderková* | 4 | GJŠkodyPŘ | 12 | 10 | – | – | **22,70** | 418 |
| **54.** | *Martin* | *Šindelář* | 2 | G Gröss BA | – | – | 20 | – | **20,28** | 151 |
| **55.** | *Jiří* | *Jirásek* | 3 | GMikul23PL | 9 | 11 | – | – | **20,03** | 54 |
| **56.** | *Marek* | *Štorek* | 2 | GNadAlejPH | 9 | 9 | – | – | **18,96** | 19 |
| **57.** | *Rostislav* | *Litovkin* | 2 | GHeyrovPH | 8 | 11 | – | – | **18,89** | 19 |
| **58.** | *Jan* | *Lepič* | 3 | G Strakon | 13 | 5 | – | – | **18,39** | 62 |
| **59.** | *Jakub* | *Havlíček* | 3 | GKepleraPH | 8 | – | 10 | – | **18,30** | 18 |
| **60.** | *Veronika* | *Chovancová* | 3 | PiarGTn | 5 | 13 | – | – | **17,96** | 331 |
| **61.** | *Lukáš* | *Backa* | 2 | GŠmejkalÚL | 9 | 9 | – | – | **17,67** | 18 |
| **62.** | *Josef* | *Soural* | 3 | GBoskovice | – | 17 | – | – | **16,61** | 17 |
| **63.** | *Jan Martin* | *Valek* | 3 | SPŠ PansPH | – | 16 | – | – | **16,12** | 16 |
| **64.** | *Tadeáš* | *Roblík* | 2 | GŽidlochov | 4 | 0 | 8 | 3 | **15,29** | 15 |
| **65.** | *Matouš* | *Schnabel* | 1 | MKG Říčany | – | 15 | – | – | **14,89** | 15 |
| **66.** | *Jana* | *Křivohlavá* | 2 | GJungmanLT | 8 | 7 | – | – | **14,80** | 26 |
| **67.** | *Aleš* | *Papáček* | 4 | G Třeboň | 10 | 5 | – | – | **14,79** | 114 |
| **68.** | *Vojtěch* | *Štěpán* | 3 | G Benešov | 7 | 8 | – | – | **14,62** | 28 |
| **69.** | *Ondřej* | *Popovský* | 2 | GDoppleraPH | 14 | – | – | – | **14,05** | 14 |
| **70.** | *Adam* | *Kozubek* | 4 | GŠlapanice | 14 | – | – | – | **14,00** | 14 |
| **71.** | *Štěpán* | *Fröde* | 2 | G Dobruška | 14 | – | – | – | **13,98** | 24 |
| **72.** | *Daniel* | *Závorka* | 3 | GNadKavaPH | 8 | 6 | – | – | **13,53** | 14 |
| **73.** | *Martin* | *Dohnal* | 2 | GValašKlob | – | 5 | 8 | – | **13,44** | 13 |
| **74.–75.** | *Jakub* | *Savula* | 2 | G Jírov ČB | 13 | – | – | – | **13,00** | 13 |
| **74.–75.** | *Michal* | *Uliáš* | 4 | SPŠSmíchov | 2 | 6 | 5 | – | **13,00** | 13 |
| **76.** | *Veronika* | *Neubergová* | 2 | GKepleraPH | 2 | 5 | 5 | – | **12,45** | 12 |
| **77.** | *Jiří* | *Polách* | 3 | G FrýdlNOs | – | 11 | – | – | **11,10** | 11 |
| **78.** | *Tobiáš* | *Kohout* | 4 | NPorg | 11 | – | – | – | **11,00** | 11 |
| **79.** | *Václav* | *Tichý* | 2 | GKepleraPH | – | 5 | 5 | – | **10,54** | 11 |
| **80.** | *Václav* | *Verner* | 1 | PORG PH | 2 | – | 9 | – | **10,53** | 185 |
| **81.** | *Kryštof* | *Kastowksý* | 4 | G Hlučín | 10 | – | – | – | **10,00** | 10 |
| **82.** | *Sylvie* | *Fürstová* | 2 | GNVPlániPH | 9 | – | – | – | **9,48** | 9 |
| **83.** | *Martin* | *Hraba* | 3 | G Benešov | – | 9 | – | – | **9,17** | 9 |
| **84.** | *Anna* | *Bártová* | 0 | GKepleraPH | 8 | – | – | – | **8,34** | 8 |
| **85.** | *Vojtěch* | *Fila* | 2 | G Litomyšl | 2 | 5 | – | – | **7,18** | 7 |
| **86.** | *Andrej* | *Mikuš* | 4 | GCyMeNitra | 1 | 6 | – | – | **7,00** | 7 |
| **87.–90.** | *Martin* | *Haikl* | 3 | G TýnNVlt | 7 | – | – | – | **6,79** | 7 |
| **87.–90.** | *Milan* | *Holotňák* | 1 | G Třinec | 7 | – | – | – | **6,79** | 7 |
| **87.–90.** | *Kryštof* | *Maxera* | 1 | G Jírov ČB | 7 | – | – | – | **6,79** | 7 |
| **87.–90.** | *Vilém* | *Účík* | 1 | GJungmanLT | – | 7 | – | – | **6,79** | 7 |
| **91.** | *Aneta* | *Piklová* | 4 | G Strakon | 4 | 3 | – | – | **6,14** | 72 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **92.** | *Ondřej* | *Svoboda* | 2 | G Mělník | 5 | – | – | – | **5,27** | 5 |
| **93.** | *Filip* | *Hošek* | 2 | MKG Říčany | – | 5 | – | – | **5,20** | 18 |
| **94.** | *Tomáš* | *Feldbabel* | 2 | SPŠ Třebíč | – | 5 | – | – | **5,05** | 50 |
| **95.** | *Karel* | *Procházka* | 4 | GPBystrica | – | 5 | – | – | **5,01** | 115 |
| **96.** | *Natalia* | *Curzydo* | 4 | G HavlČTěš | 5 | – | – | – | **5,00** | 5 |
| **97.** | *Matyáš* | *Maroušek* | 4 | GEBenešeKL | 4 | – | – | – | **4,00** | 4 |
| **98.** | *Kamila Laura* | *Malíková* | 2 | GEBenešeKL | 4 | – | – | – | **3,65** | 4 |
| **99.** | *Peter* | *Kochelka* | 4 | GTajBanBys | 3 | – | – | – | **3,22** | 271 |
| **100.** | *Karolína* | *Podivínská* | 4 | BiskG Brno | 3 | – | – | – | **3,00** | 3 |
| **101.** | *Paulína* | *Dujavová* | 4 | GRaymanaPV | 3 | – | – | – | **2,77** | 39 |
| **102.** | *Barbora* | *Edlová* | 1 | G Tachov | 3 | – | – | – | **2,67** | 3 |
| **103.** | *Šimon* | *Lipus* | 2 | G Třinec | 2 | – | – | – | **1,91** | 2 |
| **104.** | *Ladislav* | *Vávra* | 3 | G RožnRadh | 1 | – | – | – | **1,45** | 12 |
| **105.** | *Jolana* | *Štraitová* | 3 | GBudějovPH | 1 | – | – | – | **1,32** | 78 |
| **106.–109.** | *Jan* | *Hrdina* | 1 | GNVPláníPH | 0 | – | – | – | **0,00** | 0 |
| **106.–109.** | *Martin* | *Chrostek* | 3 | GBezručeFM | – | 0 | – | – | **0,00** | 0 |
| **106.–109.** | *Petr* | *Kasper* | 2 | G Teplice | 0 | – | – | – | **0,00** | 0 |
| **106.–109.** | *Kateřina* | *Krninská* | 1 | G PostupPH | 0 | – | – | – | **0,00** | 0 |

**adresa:** *Korespondenční seminář*
*KAM MFF UK*
*Malostranské náměstí 25*
*118 00 Praha 1*
**web:** *http://prase.cz/*
**e-mail:** *info@prase.cz*