Mřížky a tabulky

3. PODZIMNÍ SÉRIE — TERMÍN ODESLÁNÍ: 2. PROSINCE 2019

Tabulka $n \times n$ je tvořena n^2 čtverečky.

Mřížka $n \times n$ je tvořena vrcholy a hranami čtverečků tabulky $n \times n$.

ÚLOHA 1. (3 BODY)

Pepa vyplnil tabulku 3×3 čísly 1 až 9 tak, že součet čísel v každém řádku, sloupci i na hlavních diagonálách[1] byl dělitelný devíti. Muselo pak být číslo v prostředním poli násobek tří?

ÚLOHA 2. (3 BODY)

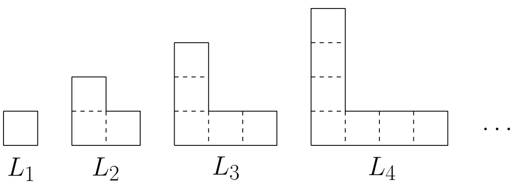
Radeček umístil do tabulky 9×9 v nějakém pořadí čísla 1 až 81. Potom Matějovi řekl, aby našel takové i, že součin čísel v i-tém řádku není roven součinu čísel v i-tém sloupci. Dokažte, že to Matěj zvládl nehledě na rozmístění čísel.

ÚLOHA 3. (3 BODY)

Pavel si vyrobil krabici o rozměrech $9 \times 8 \times 8$ a chce do ní uskladnit svých 32 oblíbených kvádrů o rozměrech $2 \times 3 \times 3$ tak, aby jejich stěny byly rovnoběžné se stěnami krabice a žádný nevyčníval ven. Ukažte, že se mu to nepovede.

ÚLOHA 4. (5 BODŮ)

Lenka chce vydlaždičkovat čtvercovou podlahu koupelny o rozměru $n \times n$. V místním obchodě ale prodávají pouze dlaždičky typu L_k, které mají dvě ramena tvořená k čtverečky (viz obrázek) a stojí k korun. Dlaždičky se nesmí překrývat ani lámat. Jak má Lenka nakoupit, aby zaplatila co nejméně?



[1] *Hlavní diagonála* tabulky 3×3 je tvořena dvěma protilehlými rohovými a prostředním políčkem.

Úloha 5. (5 bodů)

Ondra s Luckou našli bílou tabulku $n \times n$ a číslo k. Potom hráli následující hru: Ondra vybere k políček a obarví je červeně. Lucka pak několik červených políček (alespoň jedno) přebarví na zelenou. Pro jaké nejmenší k může vždy políčka přebarvit tak, že v každém řádku i sloupci bude sudý počet zelených políček?

Úloha 6. (5 bodů)

Martin dostal dvě posloupnosti $a_1, \ldots, a_{2020}$ a $b_1, \ldots, b_{2020}$. Každá z nich je tvořena po dvou různými reálnými čísly. Aby se naučil sčítat, vypsal si tabulku součtů, a to takovým způsobem, že do políčka v i-tém řádku a j-tém sloupci napsal $a_i + b_j$. Dále zjistil, že součin čísel v každém řádku je roven 1. Ukažte, že součin čísel v každém sloupci musí být roven -1.

Úloha 7. (5 bodů)

Dominik vyplnil celou tabulku $2n \times 2n$ nepřekrývajícími se dominovými kostkami 2×1 a 1×2. Potom ji podal Terce, ať obarví vrcholy mřížky třemi barvami tak, aby dva sousední vrcholy měly stejnou barvu právě tehdy, když jejich spojnice půlí některé domino. Rozhodněte, zda ke každému rozložení domin Terka dokáže najít vyhovující obarvení.

Úloha 8. (5 bodů)

Verča dostala mřížku $n \times n$. Do ní si nakreslila cestu procházející po hranách nebo diagonálách jednotlivých čtverečků. Cesta prochází každým vrcholem právě jednou a diagonály se v ní můžou křížit. Určete maximální možný počet diagonál ve Verčině cestě.

Projektivní geometrie I

1. seriálová série — Termín odeslání: 2. prosince 2019

Úloha 1. (5 bodů)

Mějme trojúhelník ABC s těžištěm G. Označme středy stran AB a AC postupně M a N. Dále mějme na straně BC body D a E, přičemž platí $|BD| = |DE| = |EC| = \frac{|BC|}{3}$. Dále nechť K je průsečík přímek AD a BN a obdobně nechť L je průsečíkem přímek AE a CM. Dokažte, že A, G a průsečík přímek DL a EK leží na jedné přímce.

Úloha 2. (5 bodů)

Mějme tečnový čtyřúhelník $ABCD$. Nechť K, L, M a N jsou po řadě body dotyku kružnice vepsané se stranami AB, BC, CD a DA. Označme X průsečík přímek AB a CD a Y průsečík přímek AD a BC. Dále nechť P je průsečík přímek XL a YM. Obdobně definujme bod Q jako průsečík přímek XN a YK. Dokažte, že body A, P a Q leží na jedné přímce.

Úloha 3. (5 bodů)

Nechť O je v konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ průsečík uhlopříček. Osy úhlů AOB, BOC, COD, DOA protínají strany čtyřúhelníku AB, BC, CD, DA postupně v bodech M, N, P, Q. Dokažte, že přímky MQ, NP a BD se protínají v jednom bodě.

Circles

4. podzimní série — Termín odeslání: 6. ledna 2020

Pozor, u této série přijímáme pouze řešení napsaná anglicky!

Úloha 1. (3 body)

Kua would like to draw 7 circles on a piece of paper so that every two circles intersect at two distinct points. And he would love it if there were exactly 7 points, in which 2 or more circles intersect. Show him how this is possible.

Úloha 2. (3 body)

Let ω_1, ω_2 be two circles with centres O_1, O_2 intersecting at points X, Y such that $\angle O_1XO_2 = 90°$. Let D be the intersection of O_1O_2 and ω_1 such that O_1 lies between D and O_2. Let P be the intersection of DX and ω_2 distinct from X. Prove that PO_2 is perpendicular to O_1O_2.

Úloha 3. (3 body)

Jáchym drew three circles on a whiteboard. The circles had radii 2, 3, and 3 and each two were externally tangent. Then he drew the circle ω that is internally tangent to all three of them. Help him calculate the radius of ω.

Úloha 4. (5 bodů)

Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral with circumcentre O such that AC and BD are perpendicular. Let ω_1, ω_2, ω_3, and ω_4 be circles, where the diameters of these circles are AO, BO, CO, and DO respectively. Finally, let P, Q, R, and S be the intersections of ω_1 with ω_2, ω_2 with ω_3, ω_3 with ω_4, and ω_4 with ω_1 respectively, distinct from O. Prove that $PQRS$ is a rectangle.

Úloha 5. (5 bodů)

Let ω_1 and ω_2 be two circles externally tangent at T. Let C be a point on ω_2 such that the tangent at C intersects ω_1 at two distinct points X and Y. Now define P as the intersection of CT and ω_1 distinct from T. Show that PXY is an isosceles triangle.

Úloha 6. (5 bodů)

There are $2n$ points on a circle labeled $1, 2, \ldots, 2n$ in some order. We define a *pairing* as a set of n segments between these points such that every point is an endpoint of exactly one of the segments. For a segment connecting points labelled a and b, we say its *value* is the number $|a-b|$. Finally, we say a pairing is *good*, if the sum of values of all n segments is equal to n^2. Show that for any initial order of labels there exists a good pairing such that no two segments intersect.

Úloha 7. (5 bodů)

Let $ABCD$ be a parallelogram such that $\angle DAB$ is obtuse. Then, let M be the midpoint of AB and E be the intersection of the circumcircle of DAB and the line DM distinct from D. Finally, let H be the point on DA such that $\angle AHB = 90°$. Prove that C, D, H, and E are concyclic.

Úloha 8. (5 bodů)

Let ABC be a non-equilateral triangle and G its centroid. Denote the midpoints of line segments AB, CA, BC, AG, CG, and BG by M_C, M_B, M_A, N_A, N_C, and N_B respectively. Show that the circumcircles of $M_CN_AM_B$, $M_BN_CM_A$, and $M_AN_BM_C$ all intersect in a single point.