Mnohoúhelníky

3. podzimní série Termín odeslání: 6. prosince 2021

Úloha 1. (3 body)

Matěj má hromadu rovnostranných trojúhelníků o straně délky 1. Skládá je k sobě tak, že sousedící trojúhelníky se dotýkají vždy celou stranou. Mohl takhle sestavit nějaký 67-úhelník bez děr?

Úloha 2. (3 body)

Hedvika vzala svůj oblíbený pravidelný n-úhelník a nakreslila všechny pravoúhlé trojúhelníky, jejichž vrcholy jsou vrcholy Hedvičina n-úhelníku. Celkem nakreslila 1200 trojúhelníků. Najděte všechna možná přirozená čísla n, pro která se toto mohlo stát.

Úloha 3. (3 body)

Ukažte a zdůvodněte, že existuje šestiúhelník, který má délky stran 1, 2, 3, 4, 5, 6 (ne nutně v tomto pořadí) a všechny jeho vnitřní úhly jsou stejně velké.

Úloha 4. (5 bodů)

Pětiúhelník $PRASE$ má všechny strany stejně dlouhé a úhly u vrcholů P a E jsou pravé. Označme X průsečík úhlopříček PA a RE, dokažte $|XA| = |XE|$.

Úloha 5. (5 bodů)

Na soustředění bylo n účastníků a n orgů, kde $n \geq 2$. Každý z nich se postavil do jednoho vrcholu pravidelného $2n$-úhelníku. V každém vrcholu stojí buď účastník, nebo org. Potom na zem nakreslili úsečky; mezi každou dvojicí účastníků nakreslili modrou úsečku a mezi každou dvojici orgů červenou. Ukažte, že pro libovolné reálné d je na zemi stejně modrých úseček délky d jako červených úseček délky d.

Úloha 6. (5 bodů)

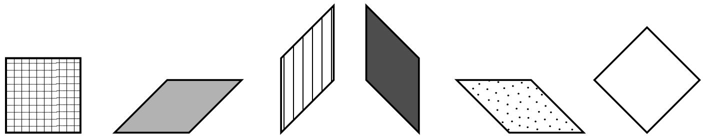
Mějme čtverec $ABCD$ o délce strany 1. Na stranách BC a CD leží postupně body E a F splňující $|\sphericalangle EAF| = 45°$. Dokažte, že obvod trojúhelníku ECF je 2.

Úloha 7. (5 bodů)

Mnohoúhelník nazveme *pěkným*, pokud jsou délky jeho stran po dvou různé, velikosti jeho vnitřních úhlů ve stupních jsou celá čísla a lze mu opsat kružnici. Rozhodněte, zda existuje pěkný 19-úhelník a zda existuje pěkný 20-úhelník.

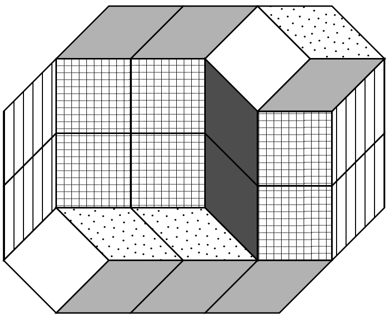
Úloha 8. (5 bodů)

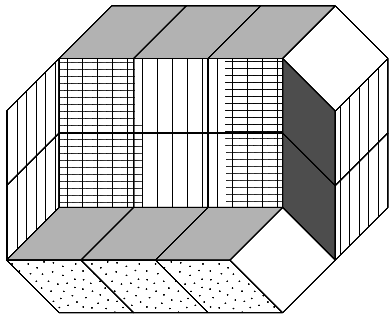
Majda a Pepa chtějí vydláždit podlahy svých koupelen, které mají stejný tvar. Podlaha má tvar osmiúhelníku, jehož všechny vnitřní úhly jsou stejné. Pro vydláždění mají k dispozici těchto šest typů dlaždiček, které musí být orientované jako na obrázku (nesmí se otáčet):



Všechny dlaždičky mají délku stran 1 a jsou to buď čtverce, nebo kosočtverce s jedním úhlem o velikosti 45°.

Majda a Pepa každý vydláždili podlahu jiným vzorem. Ukažte, že oba museli použít stejné počty dlaždiček stejného typu. Vydláždění můžou vypadat například takto:





Matematická indukce 1

1. seriálová série Termín odeslání: 6. prosince 2021

Úloha 1. (5 bodů)
Nechť S je množina s 2021 prvky. Ukažte, že pro každé nezáporné celé číslo $N \in \{0, 1, \ldots, 2^{2021}\}$ lze obarvit všechny podmnožiny S buď červenou, nebo zelenou barvou tak, aby právě N podmnožin bylo červených a aby sjednocení dvou množin stejné barvy mělo tu danou barvu.

Úloha 2. (5 bodů)
Nechť n je přirozené číslo zapsané v desítkové soustavě a $S(n)$ je jeho ciferný součet. Přirozené číslo nazveme *odřezkem* čísla n, pokud vzniklo odebráním několika cifer (nejméně jedné) z pravého konce zápisu čísla n v desítkové soustavě. Nechť $T(n)$ je součet všech odřezků čísla n. Ukažte, že $n = S(n) + 9T(n)$.

Úloha 3. (5 bodů)
Ittihad připravil n palačinek, ale povedlo se mu je všechny z právě jedné strany připálit. Když už nejsou k jídlu, zahraje si s nimi následující hru. Palačinky rozestaví do řady tak, že některé jsou obrácené bílou a jiné spálenou stranou nahoru. Tah sestává z odebrání palačinky spálené seshora a obrácením jejích přímých sousedů, pokud nějací jsou, na opačnou stranu.[1] Ittihad vyhraje, pokud se mu podaří odebrat všechny palačinky. Pro která uspořádání palačinek lze hru vyhrát?

Polynomials

4th autumn series Date due: 10th January 2022

Pozor, u této série přijímáme pouze řešení napsaná anglicky!

Problem 1. (3 points)
Daniel would like to have two polynomials $P(x)$, $Q(x)$ such that the degree of the

[1] Přitom dvě palačinky nejsou považovány za přímo sousedící, pokud mezi nimi předtím ležela již odebraná palačinka (tedy po odebrání palačinek vznikají mezery).

product $P(x) \cdot Q(x)$ is six and the degree of the sum $P(x) + Q(x)$ is two. Help him find an example of such polynomials.

PROBLEM 2. (3 POINTS)
Klátra owns the polynomial $P(x) = x^2 + 8x + 12$. Prove that for any positive integer n the value $P(n)$ is not a prime number.

PROBLEM 3. (3 POINTS)
Fíla gave Áďa three integers a, b, c for her birthday. Martin gave her a polynomial $P(x)$ with integer coefficients satisfying $P(a) = 1$, $P(b) = 2$ and $P(c) = 3$. Prove that b lies between a and c.

PROBLEM 4. (5 POINTS)
Let $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ be a polynomial with roots $x_1, \ldots, x_n$. Express $(x_1^2 - 1) \cdots (x_n^2 - 1)$ in terms of $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$.

PROBLEM 5. (5 POINTS)
Vašek hid his favourite n-tuple $a_1, \ldots, a_n$ of real numbers in a vault and the code is

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2.$$

Majda would like to steal his n-tuple, but she only knows that it satisfies

$$1 + x^n + x^{2n} = (1 + a_1x + x^2) \cdot (1 + a_2x + x^2) \cdots (1 + a_nx + x^2)$$

for all real x. Help Majda find the code in terms of n.

PROBLEM 6. (5 POINTS)
Find all non-constant polynomials P, Q with real coefficients which satisfy

$$P\left(Q(x)^3\right) = x \cdot P(x) \cdot Q(x)^3$$

for all real x.

PROBLEM 7. (5 POINTS)
Tajl lost all his polynomials. He only knows that his polynomials were exactly those polynomials $P(n)$ with integer coefficients which satisfy

$$P(n) \mid n! + 2$$

for all positive integers n. Find all Tajl's polynomials.

PROBLEM 8. (5 POINTS)
Ducky is swimming in a pond full of all polynomials. Polynomial $P(x)$ is called *fishy* if all of its coefficients are integers and there are infinitely many pairs (a, b) of coprime[2] positive integers, which satisfy

$$a + b \mid P(a) + P(b).$$

Find all fishy polynomials.

[2] Two numbers are called coprime if their greatest common divisor is one.