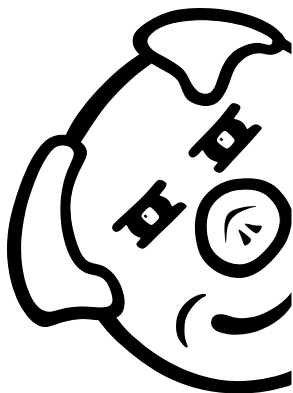


Matematický korespondenční seminář

Milý příteli !



Jistě už jsi nedočkavě vyhlížel(a) první letošní komentáře, naštěstí už nemusíš déle čekat. V první serii jsme potkali **UFO**, o tom jak setkání dopadlo se více dozvíš dále v komentářích. Ať už jsi zběhlý řešitel nebo jsi tu mezi námi nový, neváhej se pustit do čtení komentářů. Máme pro Tebe **vzorová řešení** úloh první podzimní série a k tomu i její **výsledkovou listinu**. Kromě toho proběhlo koncem září podzimní sousedění. Pokud chceš s námi na další soustředění vyrazit i Ty, nejvyšší čas pustit se do řešení další série!

Čekají na Tebe také nové úlohy, ke komentářům připojujeme zadání 3. a 4. podzimní série, tentokrát s tématy **Opakování** a **Arrangements**. Jak je naším zvykem, 4. podzimní série je cizojazyčná. Zadání je v angličtině a body budeme dávat také pouze za řešení napsaná anglicky. Ale neboj se, budujeme jen matematiku a za jazykové chyby nikdy body nestrháváme. Navíc pro Tebe máme připravený úvodní text, který Tě seznámí se všemi důležitými pojmy, které při psaní řešení budeš potřebovat.

Na konci komentářů také najdeš první díl našeho nového seriálu. Ten pro Tebe letos píše *Majda Mišinová*, *Matěj Doležálek* a *Tom Fládr*. Zavedou Tě do světa **Polynomů**, ukážou Ti jak s pomocí kořenů faktorizovat polynom na součin, jak se od kořenů vrátit zpět ke koeficientům polynomu a jak si poradit při hledání neznámého polynomu. V seriálu také najdeš spoustu příkladů a cvičení, díky kterým si procvičíš nově osvojené znalosti. Kromě textu jsou pro Tebe připravené také tři **soutěžní úlohy**, neváhej se pustit do jejich řešení.

Doufáme, že Tě úlohy budou bavit a přejeme hodně štěstí při jejich řešení!

Za organizátory,

Klárka Grinerová

Co je dále v komentářích?

- Jak řešit úlohy korespondenčního semináře?
- Vzorové řešení 1. podzimní série
- Anglické povídání ke čtvrté podzimní serii
- Seriál – Polynomy 1 – Ke kořenům a zase zpátky
- Výsledková listina 1. podzimní série
- Příloha: Zadání 3. a 4. podzimní série a 1. seriálové série

Řešení úloh

Čekal(a) jsi plný počet bodů za všechny úlohy a pohled na výsledkovou listinu Tě zklamal? Nenechej se tím odradit a raději si přečti text s názvem **Jak řešit úlohy korespondenčního semináře**. Potom neváhej a pusť se do řešení s novou vervou!

Matematický
korespondenční seminář
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1



matfyz

A pokud už řešíš dlouho, zkus si ho přečíst také – jistě v něm najdeš tipy, jak psát ještě lépe. Stejně tak si nezapomeň pečlivě projít vzorová řešení úloh první série. I když jsi třeba získal(a) plný počet bodů, možná se dozvíš, jak se dal postup sepsat elegantněji nebo úplně jinak.

Den otevřených dveří

Už za nedlouho, ve čtvrtek **28. listopadu**, se v Praze koná Den otevřených dveří Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy. Na této každoroční akci se dozvíš spoustu zajímavostí a užitečných informací o možnostech studia na naší domovské fakultě. Také můžeš nejen u PraSečího stánku potkat mnoho organizátorů a ostatních řešitelů. Více podrobností včetně programu najdeš ve správný čas na adrese <https://mff.cuni.cz/verejnost/dod>.

Noví organizátoři MKS

I letos PraSátko posílili noví organizátoři. Přidali se k nám *Alica Dományová*, *Sylvie Fürstová*, *Barbora Klusáková*, *Johana Kubatová*, *Lenka Poljaková*, *Ondřej Popovský*, *Martin Šindelář*, *Martin Štěpánek*, *Ondra Trinkewitz*, *Lukáš Trojan*, *Štěpán Varhaník* a *Anna Weberová*. Do práce v semináři už se mnozí z nich zapojili, některé z nich jsi dokonce mohl potkat na podzimním soustředění. Tímto je oficiálně vítáme i zde, ať víš, kdo nový Ti letos bude opravovat a vymýšlet úlohy.

PraSečí konference

Chceš mít jistotu, že nezmeškáš žádnou seminářovou akci? Chceš, abychom Ti důležité informace posílali e-mailem? Pak přesně pro Tebe tu je e-mailová konference ucastnici@mks.mff.cuni.cz (je to způsob, jak poslat nějakou zprávu mnoha lidem – když na uvedenou adresu přijde e-mail, automaticky se rozešle všem odběratelům). A jak se přihlášíš? Na adresu info@prase.cz pošli své jméno a e-mailovou adresu, kterou chceš k odeírání konference používat. A kdybys náhodou časem zjistil(a), že Tě naše zprávy nezajímají, můžeš se stejným způsobem zase odhlásit.

Zahraješ si rád ve volném čase frisbee a chceš mít možnost si zahrát s ostatními PraSátký? Máme e-mailová konferenci i pro takové účely. Pokud se do ní chceš přidat a nezmeškat už žádnou frisbee akci s PraSátký, neváhej napsat Péťovi na e-mail hladik.petr@outlook.com.

Další semináře a tábory

Baví Tě kromě matematiky i fyzika nebo informatika? Pod záštitou Matematicko-fyzikální fakulty najdeš i další semináře. Pokud mezi Tvé zájmy patří fyzika, mohl by Tě bavit fyzikální korespondenční seminář Fykos (<https://fykos.cz>). Pro zkušené i začínající programátory je tu KSP – korespondenční seminář z programování (<https://ksp.mff.cuni.cz>). Jestli Tě baví zkoumat různá témata z matematiky, fyziky nebo informatiky, mrkni na mezioborový korespondenční seminář M&M (<https://mam.mff.cuni.cz>). Pokud Tě baví soustředění, můžeš ještě vyrazit na Zimní nebo Letní školu matematiky a fyziky (<https://smf.mff.cuni.cz/>).

Mathrace

MathRace je matematická týmová online soutěž pro studenty středních škol. Letošní ročník proběhne ve středu **27. listopadu** od 16:00 do 19:00. Stačí najít jednoho až tři kamarády a zaregistrovat se. V nesoutěžní kategorii pak obvykle najdeš týmy bývalých a současných organizátorů PraSeťe, můžeš tak kromě dalších středoškoláků změřit síly i s nimi. Více informací najdeš na <https://brkos.math.muni.cz/mathrace/>.

PraSečí půlmaraton

V neděli **17. listopadu** pořádáme pro všechny, kteří rádi sportují, PraSečí a kolejní půlmaraton. Poběží se od 9:30 hodin od kolejí 17. listopadu v Praze a každý může běžet celou vzdálenost sám, a nebo jen část vzdálenosti ve štafetě. Více informací brzy pošleme do účastnické e-mailové konference. Budeme se na Tebe těšit!

Podzimní soustředění

21. až 29. září proběhlo v Zásadě podzimní PraSečí soustředění. Čtyřiadacet vesmírných kovbojů a kovbojek dalo do služeb věhlasného kapitána Callahana na jeho cestě za bohatstvím, dobrodružstvím a dalším bohatstvím. Na cestách z přístavu na NeoMercuru, přes dinosaury se hemžící džungle Saurory, učené sály Elysia, hazardní stoly i taneční sály Infortuny 3, pustinu planety XF-43 až na vyprahlou poušť Demeter a mrakodrapy Gideonu se naši hrdinové kromě nejedné přestřelky chtě nechtě zapletli do rozhodování o osudu celé galaxie. Doufáme, že se rozhodli správně anebo jsou aspoň s rozuzlením svého příběhu spokojeni. Ale teď už odzvonil (kravský) zvonec, soustředění je konec a stará kráva už spí ...

Pro čtyřiadacet nejlepších z podzimní části nadcházejícího ročníku (která již tradičně končí anglickou sérií) chystáme v termínu 22. až 30. března také jarní soustředění. Je tedy na co se těšit!



Jak řešit úlohy korespondenčního semináře?

Tento text je primárně určen méně zkušeným řešitelům. Jeho cílem je v krátkosti popsat způsob uvažování a vyjadřování, bez kterého se při řešení matematických úloh nelze obejít.

Pokud se rozhodneš řešit úlohy korespondenčního semináře, nestačí je pouze vypočítat. Body získáš jen v případě, že svůj postup nějak rozumně dostaneš na papír. Je tedy dobré si uvědomit, co se vlastně s řešením děje poté, co jej odeleš. Dostane ho do ruky nedůvěřivý opravovatel, jehož snahou je jej pochopit a nechat se přesvědčit o jeho správnosti. Není to tedy jako opravování kvízových otázek, u nichž se dá rychle ověřit, zda byly zodpovězeny správně. Zkus si proto svá řešení přečíst očima někoho, kdo zadanou úlohu vidí poprvé v životě.

Co po Tobě úloha chce?

Úloha často vybízí „*Dokažte!*“, „*Ukažte!*“, „*Zdůvodněte!*“. To znamená, že chceme, abyste ze zadání vyvodili dokazované tvrzení pomocí logických kroků podložených pádnými argumenty. Nestačí tedy nakreslit obrázek, v němž úhel ze zadání vyjde pravý, či ověřit platnost nerovnosti na kalkulačce nebo na počítači pro 150 různých hodnot. Je totiž potřeba ukázat, že tvrzení platí pro všechny možné konstelace, kterých je obvykle nekonečně mnoho.

Jiné úlohy na řešitele apelují „*Rozhodněte!*“, například „*rozhodněte, zda platí*“, „*rozhodněte, kdo má vyhrávající strategii*“ nebo „*rozhodněte, které z čísel je větší*“. Samotné rozhodnutí nestačí, je třeba jej zdůvodnit. To znamená tvrzení dokázat, případně najít protipříklad.

Často se setkáš s úlohami typu „*Najděte!*“, „*Najděte všechny ...!*“. V prvním případě stačí, když najdeš nějaké vyhovující řešení. Je potřeba ukázat, že odpovídá požadavkům v zadání, ale už není potřeba se zabývat dalšími řešeními. Druhý případ je složitější, neboť tehdy je potřeba najít všechna vyhovující řešení, a navíc dokázat, že žádné jiné už neexistuje. Obměnou může být například „*Najděte nejmenší ...!*“, kde je potřeba najít řešení a ukázat, že menší neexistuje.

Co nemáme rádi?

Do řešení piš jasná tvrzení a zdůvodňuj je. Zadání opisovat nemusíš. Pokud tvrdíš něco, co není pravda, pak je to ideální příležitost pro opravovatele strhnout Ti body. Navíc to, co z nepravdivého tvrzení vyvodíš, nejspíš také neplatí. Máš-li hypotézu, kterou neumíš dokázat, přiznej, že je to hypotéza. Sice pravděpodobně nedostaneš plný počet bodů, ale opravovatel bude rád, že nemusí ve Tvém řešení zbytečně hledat vysvětlení.

Dej si pozor na následující formulace:

- „*je zřejmé*“, „*je vidět*“ – Tyto obraty lze v řešení použít. Řešitelé je ale často používají v případech, kdy daná věc není vůbec zřejmá, ba dokonce, když neplatí.

- „*provedeme analogicky*“ – Tuto formulaci můžeš použít pouze v případě, že stačí v předchozích argumentech lehká změna značení. Analogie rozhodně neznamená zobecnění, například z důkazu pro 3 nelze takto vyrobit důkaz pro 50, či dokonce pro obecné n .

- „*z obrázku je patrné*“ – Obrázky jsou velmi dobré k tomu, aby se opravovatel lépe orientoval v řešení a mohl jej snáze pochopit. Postup by však měl být srozumitelný i bez něj, nikdy se na něho neodkazuj jako na nedílnou součást řešení. Pokud v obrázku zavedeš nějaké značení, měl bys ho vysvětlit v textu, ne ho jen začít používat.

- „*stačí prozkoumat nejhorší variantu*“ – Sice by to mohlo stačit, ale dokud neprozkoumáme všechny varianty, nelze říct, že tato konkrétní je nejhorší. Můžeme si to myslet, ale musíme to dokázat. Stejný problém nastává i u dalších formulací („*nejlepší bude, když*“ a podobně).

Pokud tedy některou z těchto frází používáš, rozmysli si, zda se nejedná o jeden z výše uvedených nešvarů.

Co a jak dokazovat?

V této sekci se nejprve podíváme, jak správně interpretovat zadání, a poté uvedeme některé základní důkazové techniky, které můžeš ve svých řešeních použít.

Důkaz by měl vycházet z předpokladů a postupovat k závěrům úlohy. Dej si pozor, abys během řešení nepoužil něco, co nevyplývá z předpokladů nebo předchozích úvah, zejména ne dokazované tvrzení!

• „*jestliže, pak*“, „*pokud, pak*“, „*Dokažte, že pokud platí A , pak platí B .*“ – Kdykoliv se v zadání vyskytne věta tohoto typu, znamená to, že A je předpoklad (to, z čeho vycházíme a co můžeme při řešení používat), zatímco B je závěr (to, co chceme dokázat).

Předpoklad a závěr nesmíš za žádných okolností zaměnit! Srovnej následující tvrzení:

Jestliže je číslo dělitelné čtyřmi, pak je sudé. (platí)

Jestliže je číslo sudé, pak je dělitelné čtyřmi. (neplatí, např. pro 2)

• „*právě když*“, „*právě tehdy, když*“, „*tehdy a jen tehdy, když*“, „*Dokažte, že A platí právě tehdy, když platí B .*“ – V tomto případě se vlastně jedná o dvě úlohy. Je totiž potřeba dokázat následující dvě tvrzení:

(i) Pokud platí A , pak platí B .

(ii) Pokud platí B , pak platí A .

Platnost tvrzení se nezmění, když A a B prohodíme, viz následující příklad.

Dané číslo je dělitelné deseti, právě když jeho poslední cifrou je nula.

Poslední cifrou daného čísla je nula, právě když je dělitelné deseti.

Důkazových technik je mnoho a my si zde ukážeme dvě základní – přímý důkaz a důkaz sporem.

V přímém důkazu postupujeme od předpokladů, z nichž logickými úvahami vyvozujeme dílčí závěry, až dospějeme ke kýženému výsledku. Naproti tomu v důkazu sporem si na začátku představíme, co by se stalo, kdyby tvrzení neplatilo, a z tohoto předpokladu pak odvodíme evidentně neplatné tvrzení (spor). Použití této techniky si ukážeme na příkladu:

Příklad. Dokažte, že každé prvočíslo větší než 2 je liché.

Řešení. Pro spor předpokládejme, že jsme našli sudé prvočíslo p větší než 2. Dvojka je jeho dělitel, který není roven ani jedné, ani p . To je spor s předpokladem, že p je prvočíslo. Dokazované tvrzení tedy platí.

Význam výrazů

Když matematik napíše vzoreček, nepředstavuje si pod ním nic jiného než běžné tvrzení. Pro úpravy výrazů, rovnic apod. tedy platí stejná pravidla jako pro obyčejné dokazování.

Definuj všechny proměnné, které ve vzorečcích používáš a nejsou v zadání. Opravovatel jinak těžko pozná, co jsi jimi chtěl říct. Se značením to však není třeba přehánět, a proto si označ vždy jen to, co v řešení budeš potřebovat. Příliš mnoho písmenek přehlednosti neprospívá.

Dále připomínáme, že je v důkazu třeba vycházet z předpokladů, ne z dokazovaného tvrzení. To ukážeme na příkladu:

Příklad. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b platí $\sqrt{ab} \leq (a + b)/2$.

Správné řešení může vypadat takto:

Řešení. Kdykoli umocníme reálné číslo na druhou, získáme nezáporné číslo. Tedy

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b, \\ 2\sqrt{ab} &\leq a + b, \\ \sqrt{ab} &\leq \frac{a + b}{2}, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

Jiná možnost je tato:

Řešení. Pro spor předpokládejme, že máme dvojici čísel a, b , pro která tvrzení neplatí, tedy $\sqrt{ab} > (a + b)/2$. Pak ovšem

$$\begin{aligned} ab &> \frac{(a + b)^2}{4}, \\ 4ab &> (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \\ 0 &> a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2. \end{aligned}$$

To je spor, neboť umocněním reálného čísla nemůžeme dostat záporné číslo. Dokazované tvrzení tedy platí.

Oba tyto postupy byly v pořádku. První (přímý) důkaz vycházel pouze ze známých faktů a dobral se kýženého výsledku, druhý důkaz (sporem) předpokládal neplatnost tvrzení a došel k něčemu, co neplatí.

K řešení ale není možné přistupovat zcela přímočaře, tedy jen upravovat dokazovaný vzoreček. To proto, že jakmile do řešení napíšeš $\sqrt{ab} \leq (a + b)/2$, znamená to, že již předpokládáš, že daná nerovnost platí. Jenže to nemůžeš předpokládat, neboť Tvým cílem je to teprve dokázat.

Uveďme ještě jeden příklad, na kterém si ukážeme dvě různá použití proměnných.

Příklad. V závislosti na parametrech a, b, c vyřešte kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$.

Zadání říká, že pro libovolná, ale pevně zvolená čísla a, b, c hledáme všechna x , která vyhovují zadané rovnici. Proměnné a, b, c označují v celém příkladu stále tatáž tři (ne nutně různá) reálná čísla. Každá konkrétní volba parametrů vlastně určuje jinou úlohu, ale přitom chceme vyřešit všechny tyto úlohy naráz, obecně. Proměnná x hraje zcela odlišnou roli – její hodnota je neznámá a naším cílem je ji určit.

Používání známých tvrzení

Může se stát, že v literatuře nebo na internetu narazíš na tvrzení, které Ti usnadní řešení úlohy. Pokud je to nějaká věta, která má jméno (například Cevaova věta), nezapomeň její název do řešení uvést. Pravděpodobně ji budeme znát, a když ne, dovedeme ji alespoň najít. Důkaz přitom popisovat nemusíš. V případě, že se jedná o nepojmenované tvrzení, napiš nám zdroj, kde jsi ho našel.

Vzorová řešení

V neposlední řadě bychom Tě chtěli povzbudit k řešení našich úloh. Pokud náš seminář vidíš poprvé, nedej se odradit případnými počátečními neúspěchy. Prostuduj si svá opravená řešení a nezapomeň se podívat také na vzoráky. Vzorové řešení Ti má často co nabídnout i tehdy, když jsi úlohu vyřešil správně. Můžeš v něm najít různé zajímavé přístupy či myšlenky, a něco nového se tak naučit. V poznámkách opravovatele si pak můžeš přečíst, jak se s řešením potýkali ostatní.

Věříme, že Ti tento text usnadní řešení úloh v semináři i jinde a pomůže Ti osvojit si základy matematického uvažování. To, co se naučíš, není jen schopnost řešit matematické úlohy, ale také schopnost samostatně hlouběji přemýšlet. To se Ti určitě bude někdy hodit, a to i tehdy, když se matematikou dále zabývat nebudeš.

Přejeme Ti mnoho radosti při objevování tajů matematiky!

UFO

1. PODZIMNÍ SÉRIE

VZOROVÉ ŘEŠENÍ

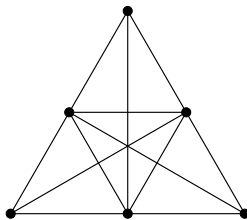
Úloha 1.

Terka si do roviny kreslí plánec kolonizace Marsu. Nejprve si do plánu umístí 6 triangulačních bodů a následně každý s každým propojí úsečkou. Poradte Terce, jak body rozmístit, aby po propojení vzniklo právě 17 nedegenerovaných trojúhelníků s vrcholy v triangulačních bodech.

ŘEŠENÍ:

Uvažujme nejprve, že máme 6 bodů v tzv. obecné poloze, tedy mějme body rozmístěné tak, že každé tři body tvoří nedegenerovaný trojúhelník. Potom z bodů umíme vytvořit právě $\binom{6}{3}$ trojúhelníků, protože libovolná trojice těchto bodů nám vytvoří trojúhelník. Jelikož $\binom{6}{3} = 20$ a my chceme, aby trojúhelníků bylo jen 17, musíme právě tři trojúhelníky degenerovat. Trojúhelník je degenerovaný, když všechny jeho vrcholy leží na jedné přímce. Degeneraci tří trojúhelníků tedy můžeme udělat tak, že si vybereme tři trojice bodů a každou z nich položíme na jednu přímku. Tím se nám tři trojúhelníky zdegenerují, jejich počet se tedy skutečně sníží o 3 a budeme hotovi. Pozor na to, že kdybychom na jednu přímku umístili čtveřici bodů nebo víc, zdegenerujeme tím alespoň $\binom{4}{3} = 4$ trojúhelníky, což je pro nás příliš.

Příklad správného rozmístění bodů je například:



POZNÁMKY:

Došlá řešení byla vesměs správná, téměř všem se podařilo najít vyhovující konstrukci. Výjimkou bylo pouze pár řešení, ve kterých řešitelé dokazovali trošku jinou úlohu, protože zadání pochopili jinak. (Lenka Poljaková)

Úloha 2.

Z hlubin vesmíru doputovala na Zemi následující zpráva:

$$1 \square 2 \square 3 \square \dots \square 4320 \square 4321.$$

Dopíšte do ní znaménka + nebo – tak, aby výsledná hodnota byla co nejmenší kladná.

ŘEŠENÍ:

Nejmenší kladné číslo je 1, proto chceme v ideálním případě najít takové doplnění znamének, aby byl součet právě 1. Jednička na začátku se vždy přičítá, její znaménko nemůžeme ovlivnit. Naším cílem je tedy dostat ve zbytku řady součet 0. Všimneme si, že čtyřem po sobě jdoucím číslům můžeme doplnit znaménka tak, aby se sečetla na nulu, například +, −, −, +, protože platí

$$n - (n + 1) - (n + 2) + (n + 3) = n - n - 1 - n - 2 + n + 3 = 0.$$

Číslo 4320, což je počet znamének, která musíme doplnit, je dělitelné čtyřmi. To znamená, že můžeme čísla od 2 do 4321 rozdělit na čtveřice po sobě jdoucích čísel, v rámci kterých umíme dostat součet 0. Součet celé zprávy tedy bude 1 a výsledné doplnění může vypadat například takto:

$$1 + (2 - 3 - 4 + 5) + (6 - 7 - 8 + 9) + \dots + (4318 - 4319 - 4320 + 4321) = 1.$$

POZNÁMKY:

Většina řešení byla správná a postupovala podobně jako vzorové. Část řešitelů zvolila složitější postup, který většinou také vedl ke správnému výsledku. Nejčastější chybou bylo neuvědomění si, že změnou znaménka před nějakým číslem se součet změní až o dvojnásobek tohoto čísla.

(Anna Weberová)

Úloha 3.

Miško se ocitl na vesmírném parkovišti tvaru tabulky 4×4 . V každém z jeho šestnácti sektorů parkoval nezáporný počet létajících talířů. Miško spočítal, kolik talířů se nacházelo v každém řádku a každém sloupci a vyšly mu samé mocniny dvojky. Dokažte, že se nemohlo jednat o osm různých mocnin dvojky.

ŘEŠENÍ:

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že počet létajících talířů v každém sloupci a v každém řádku je jiná mocnina dvojky. Označme počty talířů v řádcích a sloupcích $2^a, 2^b, \dots, 2^h$, kde $a, \dots, h \in \mathbb{N}_0$ jsou nezáporná celá čísla. Dále si všimneme, že součet talířů ve všech sloupcích musí být stejný jako součet talířů ve všech řádcích. Tedy: $2^a + 2^b + 2^c + 2^d = 2^e + 2^f + 2^g + 2^h$. Vzhledem k tomu, že se jedná o různé mocniny dvojky, jedna z osmi mocnin musí být nejmenší. Nechť to je BÚNO 2^a . Když celou rovnici vydělíme 2^a , dostaneme

$$1 + 2^{b-a} + 2^{c-a} + 2^{d-a} = 2^{e-a} + 2^{f-a} + 2^{g-a} + 2^{h-a}.$$

Vzhledem k tomu, že a byl nejmenší (nezáporný celý) exponent, jsou rozdíly v exponentech celá kladná čísla. Na levé straně tedy zůstal součet jedničky a tří sudých čísel, což je číslo liché. Na pravé straně pak zůstal součet čtyř sudých čísel, což je číslo sudé. A to je spor, neboť liché číslo se nikdy nemůže rovnat číslu sudému.

POZNÁMKY:

Většina došlých řešení byla správná a podobala se vzorovému řešení nebo měla alespoň podobnou myšlenku. Klíčové bylo uvědomit si, že počet létajících talířů ve sloupcích je roven počtu létajících talířů v řádcích.

(Johana Kubatová)

Úloha 4.

Naty si vybrala přirozené číslo n a následně si vypsalá všechna n -písmenná slova¹ složená z písmen U , F a O . Dokažte, že těch, v nichž se každé z podslov UF a UO vyskytuje suděkrát, je mezi vypsanými slovy ostře více než těch, v nichž se každé z těchto podslov vyskytuje lišěkrát.

ŘEŠENÍ:

Slova, v kterých sa podslová UF aj UO vyskytujú nepárnekrát, budem volať *nepárne* a tie, kde sa vyskytujú párnekrát, budem volať *párne*.

Najprv si všimnime, že podslová zo zadania sa nedajú zapísať za seba tak, aby sa prekrývali (napríklad UF a FO by sa tak dali zapísať). To znamená, že môžeme vymeniť niektoré UF za UO a hoci nepoznáme zvyšok slova, viem, že počet výskytov ostatných UF a UO to nezmení (čo by pri UF a FO neplatilo, napríklad pri slove UFO , ak zmeníme FO za OF , zmení to aj počet výskytov podslova UF).

Teraz sa môžeme pozrieť na nejaké nepárne slovo. O nepárnom slove vieme, že má aspoň jedno podslovo UF alebo UO . Ak vymeníme posledný výskyt podslova za to druhé (UF za UO , alebo UO za UF), počet výskytov jedného podslova klesne a počet druhého stúpne o jedna, takže sa oboja počty zmenia na párne. Takto sme ku každému nepárnemu slovu priradili párne. Okrem toho, keď zoberieme nejaké takto vzniknuté párne slovo, tak môžeme zmeniť posledný výskyt UF alebo UO naspäť, čo nám vráti pôvodné nepárne slovo. To znamená, že to nepárne slovo je jediné, čo sa mohlo zmeniť na toto párne a teda rôzne nepárne slova sa nám priradia ku rôznym párnym. To znamená, že párných je aspoň toľko, čo nepárných.

Okrem popárovovaných párných slov existujú aj také, kde počty výskytov UF aj UO sú rovné nule, teda majú počet výskytov párný. Tie určite nie sú spárované so žiadnym nepárnym (nedá sa na ne dostať zmenou podslova UF alebo UO , keďže žiadne nemajú). Vďaka nim je počet párných určite väčší ako počet nepárných.

POZNÁMKY:

Mali sme viacero rôznych riešení, tak by som tu rád spomenul niektoré funkčné. Veľa riešiteľov spočítalo pre každý možný súčet počtov výskytov UF a UO , koľko možností tvoria párne a nepárne slova. Ešte jedna možnosť bola indukciou sa pozrieť na krok zo slova dlhého n na slovo dlhé $n + 1$. Na toto bolo treba vytvoriť si neznáme pre každú kombináciu parít a podľa toho, či sa slovo končí na U . Potom sa dalo správne zrátať z neznámych pre n neznáme pre $n + 1$, no toto riešenie bolo o niečo zdĺhavejšie a zložitejšie.

(Martin Šindelář)

Úloha 5.

Luxusní čtvrt' na Marsu tvoří $(2m + 1) \times (2n + 1)$ čtvercových parcel. Na každé parcele stojí vila, kterou obývá jeden Marťan. Každý Marťan má buď červenou, nebo zelenou barvu. Hlavní barvou řádku (resp. sloupce) rozumíme barvu Marťanů, která je v řádku (resp. sloupci) zastoupena v nadpoloviční většině. Dokažte, že alespoň $m + n + 1$ Marťanů má hlavní barvu svého řádku i svého sloupce.

ŘEŠENÍ:

Nechť je luxusní čtvrt' tvořena BÚNO $2m + 1$ řádky a $2n + 1$ sloupci. V každém řádku, resp. sloupci, přitom vždy existuje nadpoloviční většina těch Marťanů, kteří mají hlavní barvu svého řádku, resp. sloupce, neboť čísla $2m + 1$ i $2n + 1$ jsou lichá (jinak řečeno, počty červených a zelených Marťanů se nemohou rovnat). V každém řádku je tak vždy alespoň $n + 1$ Marťanů majících jeho barvu, v celé čtvrti je proto alespoň $(2m + 1)(n + 1)$ Marťanů, kteří mají barvu svého řádku. Podobně můžeme říci, že v každém sloupci je nanejvýš m Marťanů nemajících jeho barvu, v celé čtvrti je

¹Za *slovo* považujeme jakoukoliv posloupnost písmen. *Podslovem* pak rozumíme úsek několika po sobě jdoucích písmen v daném slově.

proto nanejvýš $(2n+1)m$ Marťanů, kteří nemají barvu svého sloupce. Ze všech Marťanů, kteří mají barvu svého řádku, tudíž alespoň

$$(2m+1)(n+1) - (2n+1)m = 2mn + 2m + n + 1 - 2mn - m = m + n + 1$$

musí mít i barvu svého sloupce, což jsme chtěli ukázat.

Alternativně můžeme přidat počet Marťanů, kteří mají barvu svého sloupce; těch musí být alespoň $(2n+1)(m+1)$. Celkem takto napočítáme alespoň $(2m+1)(n+1) + (2n+1)(m+1)$ Marťanů, z nichž ovšem alespoň

$$(2m+1)(n+1) + (2n+1)(m+1) - (2m+1)(2n+1) = (2m+1)(n+1) - (2n+1)m = m + n + 1$$

muselo být započítáno dvakrát. To jsou ale právě ti Marťané, kteří musí mít barvu svého řádku i sloupce, takže jsme hotovi.

POZNÁMKY:

Mnoho řešitelů se vydalo podobnou cestou jako vzorové řešení a zpravidla s úspěchem; někteří řešitelé přeházeli řádky a sloupce, zavedli pro ně specifické značení a za využití podobných odhadů jako ve vzoráku (a občas i trochy rozebírání) došli také k cíli, jiní zase použili důkaz sporem. Zbylá řešení jsem ohodnotil buď částečnými body za trefná pozorování, nebo 0 body, pokud se objevily pouze konstrukce konkrétních příkladů či byla dokazována neplatná tvrzení. (Štěpán Varhaník)

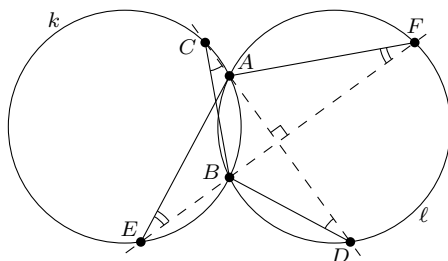
Úloha 6.

Na poli se záhadně objevily kružnice k a ℓ se stejným poloměrem. Protínají se v bodech A a B . Přímka procházející bodem A protíná k a ℓ postupně v bodech C a D . Kolmice z B na přímku CD protíná k a ℓ postupně v bodech E a F . Dokažte, že $CEDF$ je rovnoběžník.

ŘEŠENÍ:

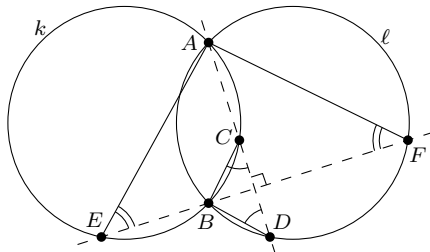
Nejprve si všimneme, že záleží, jestli bod A leží mezi C a D . Tož nastane právě tehdy, když C i D leží na delších obloucích AB . Pokud je jeden z nich na kratším oblouku, potom bod A leží mimo úsečku BC . Stejná situace je i u bodů B , E a F . Celkově tedy existují 3 různé konfigurace (podle toho, na kterých obloucích jsou body), kterékoli jiné lze na tyto snadno „přepísmenkovat“².

První konfigurace vypadá tak, že žádný z bodů C , E , D , F neleží na kratším z oblouků AB . Pak z věty o obvodovém úhlu platí, že $|\angle ACB| = |\angle ADB|$ (kružnice mají stejný poloměr, takže stejné dlouhá tětiva bude příslušet stejně velkému obvodovému úhlu), a proto je $\triangle BCD$ rovnoramenný a $|BC| = |BD|$. Výška z vrcholu B v $\triangle BCD$ leží na kolmici na úsečku CD procházející bodem B , a tedy i na přímce EF . Pata této výšky leží z rovnoramennosti v polovině úsečky CD , tudíž přímka EF půlí úsečku CD . Naprosto analogicky $|\angle AEB| = |\angle AFB|$, $\triangle AEF$ je rovnoramenný, tedy i CD půlí úsečku EF .

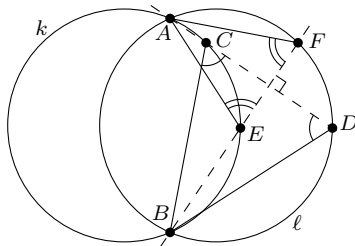


²Přepísmenkováním je míněno to, že můžeme přepsat body $C \leftrightarrow D$ a zároveň $E \leftrightarrow F$ (a potažmo názvy kružnic $k \leftrightarrow l$) a nic se nezmění, protože je vše osově souměrné podle AB . Stejně tak můžeme prohodit $A \leftrightarrow B$ a s nimi i názvy příslušných bodů $C \leftrightarrow E$ a $D \leftrightarrow F$, protože to je osově souměrné podle spojnice středů k a l . Takto můžeme situaci upravit tak, aby byly na kratších obloucích stejné body jako ve zmíněných BÚNO.

Druhá konfigurace vypadá tak, že na kratších obloucích AB leží právě 1 z bodů C, D, E a F . BÚNO nechť je tento bod C . Pak z věty o obvodovém úhlu platí, že $|\angle ADB| = \pi - |\angle ACB|$. Současně platí $\pi - |\angle ACB| = |\angle BCD|$ a odsud $|\angle ADB| = |\angle BCD|$, a tedy $\triangle BCD$ je rovnoramenný a EF půlí úsečku DC . Stejně jako v první konfiguraci $|\angle AEB| = |\angle AFB|$, $\triangle AEF$ je rovnoramenný, a tak i CD půlí úsečku EF .



Třetí konfigurace má na kratších stranách právě dva ze zmiňovaných bodů (snadno nahlédneme, že tři nebo čtyři tam být nemohou) a využívá stejné myšlenky jako předchozí dvě. BÚNO nechť jsou tyto dva body C a E (alternativně by to mohla být jen dvojice D a F) a stejně jako v předchozí konfiguraci platí, že $|\angle ADB| = \pi - |\angle ACB|$ a $\pi - |\angle ACB| = |\angle BCD|$, což naprosto totožně dokazuje, že $\triangle BCD$ je rovnoramenný a EF půlí úsečku CD . Platí, že $|\angle AEF| = \pi - |\angle AEB|$ a $\pi - |\angle AEB| = |\angle AFB|$, což naprosto totožně dokazuje, že $\triangle AEF$ je rovnoramenný a CD půlí úsečku EF .



Nehledě na konfiguraci, čtyřúhelník, jehož úhlopříčky se navzájem půlí, je rovnoběžník, takže tvrzení máme dokázáno pro všechny tři konfigurace.

POZNÁMKY:

Většina řešitelů úlohu řešila podobně jako vzorák, akorát mnoho z nich neřešilo, že existuje více konfigurací. Tomuto problému se šikovně vyhnulo pár řešitelů, kteří použili (nebo alespoň zmínili) orientované úhly. Našlo se také pár pěkných řešení, která používala posunutí bodů, pomocí kterého se dokazovaly rovnoběžnosti, nebo třeba mocnost bodu ke kružnici. Úlohu šlo řešit i analyticky, ale jak jeden řešitel ověřil, bylo to zbytečně složité.

(Barbora Klusáková)

Úloha 7.

Kuba objevuje mimozemskou kulturu. Dozvěděl se, že jsou pro ni posvátná čísla x, p, n , ale nikdo mu nechce říct, jaká čísla to jsou. Ví jenom, že x je celé číslo, p je prvočíslo a n je přirozené číslo a že splňují vztah $x^3 + x^2 + x + 1 = p^n$. Pomozte Kubovi najít všechny možné takové trojice.

ŘEŠENÍ:

Nejprve si levou stranu rovnice rozložíme, čímž dostaneme $(x+1)(x^2+1) = p^n$. Díky tomu víme, že v prvočíselném rozkladu levé strany rovnice je pouze prvočíslo p , a tedy platí tyto rovnice:

$$\begin{aligned}(x+1) &= p^a, \\ (x^2+1) &= p^b,\end{aligned}$$

kde a, b jsou nezáporná celá čísla. Zároveň platí, že $x^2 \geq x$, tedy $x^2 + 1 \geq x + 1$, a proto $b \geq a$. To znamená, že $\frac{x^2+1}{x+1}$ je celé číslo. Pokud tento polynom vydělíme, dostaneme $x - 1 + \frac{2}{x+1}$.

Jelikož tento výraz má být celočíselný a $x - 1$ je vždy celé, musí být $\frac{2}{x+1}$ také celé. To nastane pouze pro čtyři různé hodnoty x , a to $-3, -2, 0$ a 1 . Po jejich dosazení do levé strany původní rovnice získáme čísla $-20, -5, 1$ a 4 , která se mají rovnat p^n .

Protože nejmenší prvočíslo je 2 a nejmenší přirozené číslo je 1 , bude p^n alespoň 2 . Z našich výsledků to tedy může být pouze 4 , a tedy jediné x , které vychází, je $x = 1$. Lze snadno ověřit, že jediné p a n , pro které $p^n = 4$ jsou $p = 2$ a $n = 2$. A tedy jediná trojice splňující zadání je $x = 1, p = 2$ a $n = 2$.

POZNÁMKY:

Někteří řešitelé ve svém řešení tvrdili, že p^{b-1} a p^{a-1} jsou celá čísla (nebo, že p dělí p^b a p^a), což ovšem neplatí, pokud se a nebo b rovnají 0 . (Lukáš Trojan)

Úloha 8.

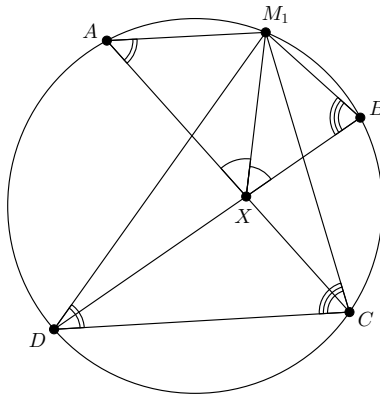
Čtyřúhelník $ABCD$ je vepsán do kružnice ω . Bod M nazveme *neidentifikovaným létajícím*, pokud $\frac{|MA|}{|MB|} = \frac{|MD|}{|MC|}$. Dokaž, že existují čtyři neidentifikované létající body ležící na ω takové, že čtyřúhelník, který tvoří, má kolmé úhlopříčky.

ŘEŠENÍ:

Označme si průsečík úhlopříček štvoruholníka $ABCD$ ako X . Ďalej si vyznačíme osi uhlov AXB a BXC . Ich prieniky s kružnicou ω na oblúkoch AB, BC, CD, DA označíme postupne M_1, M_2, M_3, M_4 . Platí

$$|\angle M_1 X M_2| = |\angle M_1 X B| + |\angle B X M_2| = \frac{|\angle AXB|}{2} + \frac{|\angle BXC|}{2} = \frac{|\angle AXC|}{2} = 90^\circ.$$

Úhlopriečky štvoruholníka $M_1 M_2 M_3 M_4$ sú teda na seba kolmé. Stačí teraz dokázať, že jeho vrcholy sú zároveň naozaj neidentifikované lietajúce.



Dokážeme to najskôr pre bod M_1 . Zo sínusovej vety vieme, že pomer strany ku sínusu protiahleho uhla je pre všetky strany v trojuholníku rovnaký. Preto, keď sa pozrieme na trojuholník AM_1X , vidíme, že

$$\frac{|XM_1|}{\sin(|\angle XAM_1|)} = \frac{|M_1A|}{\sin(|\angle M_1XA|)}. \quad (1)$$

Podobne z trojuholníka BXM_1 a následne rovnosti veľkostí uhlov M_1XA a M_1XB vidíme, že

$$\frac{|XM_1|}{\sin(|\angle XBM_1|)} = \frac{|M_1B|}{\sin(|\angle M_1XB|)} = \frac{|M_1B|}{\sin(|\angle M_1XA|)}. \quad (2)$$

Teraz ľavú stranu rovnosti (1) predelíme ľavou stranou rovnosti (2) a pravú stranu (1) pravou stranou (2). Všimneme si, že na ľavej strane sa čitatele a na pravej strane menovatele vykrátia. Dostávame, že

$$\frac{\sin(|\angle XBM_1|)}{\sin(|\angle XAM_1|)} = \frac{|M_1A|}{|M_1B|}.$$

Teraz sa pozrieme na trojuholník CM_1D . Zo sínusovej vety vieme, že

$$\frac{|M_1C|}{\sin(|\angle M_1DC|)} = \frac{|M_1D|}{\sin(|\angle M_1CD|)}.$$

Z vety o obvodovom uhle vieme, že $|\angle M_1DC| = |\angle M_1AC| = |\angle XAM_1|$. Podobne $|\angle M_1CD| = |\angle M_1BD| = |\angle XBM_1|$. Poďme teda tieto uhly dosadiť do predošlej rovnosti a upravovať ďalej.³

$$\begin{aligned} \frac{|M_1C|}{\sin(|\angle XAM_1|)} &= \frac{|M_1D|}{\sin(|\angle XBM_1|)}, \\ \frac{\sin(|\angle XBM_1|)}{\sin(|\angle XAM_1|)} &= \frac{|M_1D|}{|M_1C|}. \end{aligned}$$

Keď rovnosti spojíme, dostávame, že

$$\frac{|M_1A|}{|M_1B|} = \frac{\sin(|\angle XBM_1|)}{\sin(|\angle XAM_1|)} = \frac{|M_1D|}{|M_1C|},$$

čo sme chceli dokázať. Rovnaký postup vieme aplikovať aj na body M_2 , M_3 a M_4 . Štvoruholník $M_1M_2M_3M_4$ má teda vrcholy v neidentifikovaných lietajúcich bodoch na ω aj kolmé uhlopriečky.

POZNÁMKY:

Aj keď tie rovnosti vyzerajú možno na prvý pohľad hrozivo, netreba sa ich báť. Vzorové riešenie sa oplatí prečítať, nezje ťa. (Alica Dományová)

³Pri prenášaní obvodových uhlov sa nám môže stať, že uhol bude na opačnom oblúku, a teda keď mal pôvodný uhol veľkosť α , nový bude mať veľkosť $180^\circ - \alpha$. To nám ale nevadí, keďže $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$.

Of Permutations

In this series, we shall deal with problems involving various arrangements, orderings and rankings. All of these can be easily formalised using permutations.

A *permutation* π on a set A is a function $\pi : A \rightarrow A$ that is *bijective*, i.e. it is

- (1) *surjective* (or *onto* A), which means that for each $y \in A$, there exists $x \in A$ such that $\pi(x) = y$,
- (2) *injective*, which means that if $\pi(x) = \pi(y)$ for some $x, y \in A$, then $x = y$.

We denote the set of all permutations on the set A as S_A . Specifically, for $n \in \mathbb{N}$ and $A = \{1, 2, \dots, n\}$, we denote this set of permutations on A as S_n . We call the “permutation” $\pi(x) = x$ that leaves every element of A in place the *identity permutation* (or just *identity*), which we denote id_A or just id .

S_n contains exactly

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$$

permutations — number 1 can be mapped to any number $\pi(1)$ from among $1, 2, \dots, n$, number 2 can then be mapped to any such number which is not $\pi(1)$, number 3 can be mapped to any such number which is not $\pi(1)$ or $\pi(2)$ etc.

We formulated what a permutation is on an arbitrary set A , but we will mainly work with finite sets. In that case, it is easier to show that a given function acting on this finite A is a permutation, as this theorem shows:

Theorem. Let A be a finite set of size n and let $f : A \rightarrow A$ be a function on A . Then, f is injective if and only if f is surjective.

Proof. ($\implies$) Because f is injective, every element of A is mapped to a different value, which means that there are n different values in the form $f(a)$, $a \in A$, each of them lying in the set A , which has n elements. That means that among those $f(a)$, $a \in A$, every element of A is represented. In other words, for arbitrary $y \in A$, there must exist an $x \in A$ such that $f(x) = y$.

($\impliedby$) If f was not injective, there would exist distinct $x_1, x_2 \in A$ such that $f(x_1) = f(x_2)$. That would mean that there are at most $(n-1)$ different values $f(a)$, $a \in A$, contrary to the fact that f is surjective. $\square$

A corollary of this theorem is that for a finite set A , every injective function $A \rightarrow A$ is a permutation, and similarly, every surjective function $A \rightarrow A$ is a permutation.

Because permutations are bijections, we may refer to their *inverses* — for $\pi \in S_A$, there exists a mapping π^{-1} such that π^{-1} maps $b \in A$ to the unique element $a \in A$ satisfying $\pi(a) = b$. Because π is a bijection acting on A , π^{-1} is also a bijection defined on A , i.e. it is a permutation again.

It also holds that the *composition* of permutations $\pi, \sigma \in S_A$, defined by

$$(\pi \circ \sigma)(a) = \pi(\sigma(a)), \quad a \in A,$$

is a permutation. If we compose π with itself $k \in \mathbb{N}$ times, we write this composition as π^k .

Cycles

Suppose we have a permutation π on a finite set A and we choose an element $a_1 \in A$. Then π might map a_1 to itself, or it can map it to another element $a_2 = \pi(a_1)$. Next, a_2 can be then mapped to a_1 or some other element a_3 of A , but it cannot be mapped to a_2 , because π is injective and a_1 is already being mapped to a_2 .

More generally, suppose that $a_1, a_2, \dots, a_k$ are all distinct elements of A and it holds that $\pi(a_i) = a_{i+1}$ for $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. Suppose also that a_k is mapped to an already visited element, say a_ℓ for some $\ell \in \{1, 2, \dots, k\}$ — this has to eventually happen, because A is finite. Now, if $\ell \geq 2$, then we would have $\pi(a_k) = a_\ell$ and also $\pi(a_{\ell-1}) = a_\ell$. But $a_k \neq a_{\ell-1}$, so π would not be injective, and thus not a permutation. This means that $\ell = 1$ must happen and therefore π creates a *cycle*

$$a_1 \mapsto a_2 \mapsto \dots \mapsto a_k \mapsto a_1.$$

It can be the case that A also contains some other elements which are not part of this cycle. With the same procedure, we can again choose some $b_1 \in A \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$, which will construct another cycle — let us dispense with the arrows and just write the cycle as $(b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m)$. Continuing like this, we can *decompose the permutation π into disjoint cycles* as

$$\pi = (a_1^1 \ a_2^1 \ \dots \ a_{k_1}^1)(a_1^2 \ a_2^2 \ \dots \ a_{k_2}^2) \dots (a_1^m \ a_2^m \ \dots \ a_{k_m}^m),$$

where the elements a_i^j are all distinct — this notation lists all the individual cycles, $(a_1^j \ a_2^j \ \dots \ a_{k_j}^j)$ being the j -th cycle. Moreover, these cycles are uniquely determined for the given permutation. Usually, we omit cycles of length 1 for simplicity.

As an example, the permutation $\pi \in S_6$ which is given by $\pi(1) = 4$, $\pi(2) = 2$, $\pi(3) = 6$, $\pi(4) = 5$, $\pi(5) = 1$ and $\pi(6) = 3$ is represented by the cycles

$$\pi = (1 \ 4 \ 5)(2)(3 \ 6) = (1 \ 4 \ 5)(3 \ 6)$$

(we omit the cycle (2) of length one). This gives us a better idea how the permutation behaves — for example, we see that $\pi^6 = \text{id}$ (more generally, it is not hard to see that the smallest positive exponent with this property is equal to the least common multiple of all the cycle lengths). We can also immediately determine the inverse of π — we just have to reverse the order of elements in individual cycles, so $\pi^{-1} = (5 \ 4 \ 1)(6 \ 3)$.

If $\pi(a) = a$ for $a \in A$, we say that a is a *fixed point* of π . If π consists only of one cycle, it is called *cyclic*. If $\pi = (b \ a) \in S_A$, i.e. if π swaps a with b while leaving the remaining points fixed, then we say that π is a *transposition*.

Counting Permuted Values

When several numbers are summed or multiplied together, it does not matter how we order these numbers — $1 + 2 + 3$ is the same as $2 + 1 + 3$ or $3 + 1 + 2$. Thus, if we have a permutation π on a finite set of numbers A , it holds that⁴

$$\sum_{a \in A} a = \sum_{a \in A} \pi(a) \quad \text{and} \quad \prod_{a \in A} a = \prod_{a \in A} \pi(a).$$

This simple fact can serve as a surprisingly powerful tool, as we will now illustrate:

Theorem. (Fermat's little theorem) Let p be a prime and $a \in \{1, 2, \dots, p-1\}$. Then $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

⁴ $\sum$ denotes the *sum* and $\prod$ the *product*.

Proof. Let $A = \{1, 2, \dots, p-1\}$ and $\pi : A \rightarrow A$ defined as $\pi(x) = (ax \bmod p)$. We claim that π is injective — to that end, suppose that $x, y \in A$ satisfy $\pi(x) = \pi(y)$. Then $ax \equiv ay \pmod{p}$, and because a and p are coprime, it follows that $x \equiv y \pmod{p}$. However, x and y are from A which contains only numbers between 1 and $p-1$, so $x = y$. We showed that π is injective, and so it must be a permutation thanks to the finiteness of A .

Now, the product

$$\prod_{x \in A} \pi(x) = \pi(1) \cdot \pi(2) \cdots \pi(p-1)$$

must be equal to

$$\prod_{x \in A} x = 1 \cdot 2 \cdots (p-1),$$

because both run over the whole A and π is a permutation, so every element of A appears exactly once in each product, regardless of whether we multiply the values 1, 2, ..., $p-1$ in ascending order or in the permuted order given by π .

Finally, we calculate

$$\prod_{x \in A} x = \prod_{x \in A} \pi(x) = \prod_{x \in A} (ax \bmod p) \equiv \prod_{x \in A} ax = a^{p-1} \cdot \prod_{x \in A} x \pmod{p},$$

and so $1 \equiv a^{p-1} \pmod{p}$ thanks to the fact that individual elements of A are coprime to p , hence their product is also coprime to p . $\square$

Polynomy 1 – Ke kořenům a zase zpátky

Milý příteli,

vítej u prvního dílu letošního seriálu, v němž budeme brouzdat světem polynomů. *Polynom*, nebo též hezky česky *mnohočlen*, je pojem, který už jsi dost možná někdy potkal(a). Schovává se za ním výraz s proměnnou x a s koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_n$, který může vypadat nějak takhle:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0.$$

Matematiky často zajímá hledání kořenů, tedy jaká čísla za x můžeme dosadit, aby celý výraz nabyl nulové hodnoty. I nás budou kořeny na naší cestě provázet: po osvojení základních pojmů si v tomto díle ukážeme, jak s pomocí kořenů faktorizovat polynom na součin a k čemu je to dobré. Poté prozkoumáme, jak se od kořenů vrátit zpět ke koeficientům, a na úplný závěr představíme pár hezkých i špinavých triků na úlohy, v nichž hledáme neznámý polynom.

Pokud jsi potkal(a) polynomy ve škole, pravděpodobně jste jako proměnné, kořeny i koeficienty brali reálná čísla. Spousta zajímavých úloh ale vznikne tak, že místo o reálných číslech začneme přemýšlet jenom o těch celých nebo racionálních. Nebo si naopak můžeme svět reálných čísel zvětšit na komplexní čísla. Abychom podchytili co nejvíc z této rozmanitosti, budeme se teorií snažit budovat trochu obecně. Díky tomu pak budeme schopni snadno přepínat, zda zrovna hovoříme o polynomech „nad“ reálnými, celými, racionálními, ... či jakýmkoliv exotičtějšími čísly.

Seriál pro Tebe letos píše Majda Mišinová, Matěj Doležálek a Tom Flidr. Zavrtá-li se Ti do hlavy při čtení jakákoliv otázka či nejasnost, neváhej se na nás obrátit na mailových adresách magdalena.misinova@gmail.com, matej@prase.cz a tomas@flidr.name. Přejeme příjemné čtení!

O příkladech, cvičeních a úlohách

V seriálu bychom Ti rádi pomohli procvičit si počítání a řešení úloh. V textu jsou k tomuto účelu rozesety tři druhy pomůcek. **Příklady** jsou řešené ukázky, na kterých Ti chceme osvětlit nejtypičtější metody, které se při řešení úloh hodí znát. **Cvičení** jsou zamyšlení, která by Tě měla ubezpečit v osvojení zavedených pojmů, či menší tvrzení, která je podle nás hodnotnější si nejprve zkusit sám/sama. Pokud by se Ti to nedařilo, nezoufej, na konci dílu najdeš návody k některým z nich a ještě o kousek dál řešení úplně všech. Konečně **Úlohy** jsou problémy olympiádního typu, podobně jako běžně můžeš potkat na soutěžích. Některé mohou být těžší než Cvičení, na oplátku zase ale bývají hezčí. Stejně jako cvičení jsou pak i úlohy opatřeny návodem a řešeními na konci textu.

Základní definice

V tomto seriálu budeme polynomy uvažovat jen s koeficienty branými z množin, kterým říkáme *obory*. Obor je ve zkratce struktura, v níž význačné prvky 0 a 1 a ve které můžeme násobit, sčítat a odečítat tak, jak jsi zvyklý/zvyklá. Tím myslíme třeba to, že při sčítání nezávisí na pořadí ani na uzavírkování, že můžeme roznásobovat závorky jako $a \cdot (b + c) = ab + ac$ nebo že součin ab může být nulový, jen když je a nebo b (nebo obojí) nula. Pozor, schopnost dělit v oboru nevyžadujeme.

Příklady oborů jsou celá čísla $\mathbb{Z}$, racionální čísla $\mathbb{Q}$, reálná čísla $\mathbb{R}$ nebo komplexní čísla⁵ $\mathbb{C}$. Pokud by Tě během čtení seriálu pojem „obor“ znervózňoval, klidně si představuj, že je to jen některý ze $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ či $\mathbb{C}$, neboť stejné myšlenky budou povětšinou fungovat jak s jedním konkrétním oborem, tak s libovolným jiným. Pokud jsi už někdy potkal(a) modulární aritmetiku, můžeš si jako bonus pro každé prvočíslo p představovat také $\mathbb{Z}_p$ (celá čísla modulo p), neboť to je též oborem.

Definice. Je-li R obor, pak *polynomem nad R* myslíme výraz tvaru $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, kde n je nějaké nezáporné celé číslo a $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$. Množinu všech polynomů nad R v proměnné x značíme $R[x]$.

Pokud $a_n \neq 0$, nazýváme a_n *vedoucím koeficientem* polynomu P . Naproti tomu a_0 nazýváme *konstantním* nebo též *absolutním členem* polynomu P . Domluvme se také, že si v zápisu polynomů dovolíme vynechávat jedničkové koeficienty a členy s nulovým koeficientem a že záporná znaménka bude psát pomocí rozdílu: např. tedy napíšeme $x^2 - 1$ namísto striktně formálního $1x^2 + 0x + (-1)$. Podobně se domluvme, že pokud se odkážeme na koeficient s indexem větším než n , bereme, že je to nula.

Na polynomy se primárně díváme jako na výrazy s proměnnou. Přirozené je ale taky vnímat polynomy jako funkce: když máme polynom $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$ a nějaký prvek $r \in R$, můžeme jej *dosadit* a získat tak nějaký nový prvek $P(r) = a_n r^n + \cdots + a_1 r + a_0 \in R$. Když napíšeme $P(x) = Q(x)$, budeme tím myslet, že P a Q mají stejné koeficienty u každé mocniny x . Pozor, to obecně není ekvivalentní s tím, že $P(r) = Q(r)$ pro každé $r \in R$. V tomto díle tuhle situaci nepotkáme, ale nad některými obory mohou existovat polynomy, které jsou různé, ale přesto dosazením libovolného prvku dávají vždy stejnou hodnotu. (Pokud si rozumíš s obory $\mathbb{Z}_p$, můžeš si rozmyslet, že x^2 a x dávají nad $\mathbb{Z}_2$ vždy stejné hodnoty, ale přesto jsou to různé polynomy.)

Definice. O $\alpha \in R$ řekneme, že je *kořenem* polynomu P , pokud $P(\alpha) = 0$. Pokud takové $\alpha \in R$ existuje, říkáme, že P *má kořen* v R .

Definice. Je-li $P \in R[x]$ polynom $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ a $a_n \neq 0$, pak n nazveme *stupněm* P , což značíme jako $\deg(P) = n$. Speciálně definujeme $\deg(0) = -\infty$.

Pro nízké stupně existují zažitá názvy: polynom nazýváme *konstantním*, pokud má stupeň 0 nebo je nulový, *lineárním*, pokud má stupeň 1, *kvadratickým*, pokud má stupeň 2, *kubickým*, pokud má stupeň 3, atd.

Všimni si, že každé celé číslo je racionální a každé racionální číslo je reálné. Máme-li tedy polynom s celočíselnými koeficienty, můžeme ho interpretovat jako polynom nad $\mathbb{Z}$, nad $\mathbb{Q}$ i jako polynom nad $\mathbb{R}$. Podobně u polynomu nad $\mathbb{Z}$ můžeme koeficienty interpretovat jen jako zbytkové třídy modulo nějaké p a získat tak polynom nad $\mathbb{Z}_p$. Zápis bude mít pořád stejný, ale jeho vlastnosti se můžou značně lišit.

Cvičení 1. Najdi polynom s celočíselnými koeficienty takový, že

- (i) má kořen v $\mathbb{Q}$, ale ne v $\mathbb{Z}$,
- (ii) má kořen v $\mathbb{R}$, ale ne v $\mathbb{Q}$,
- (iii) (jen pokud znáš $\mathbb{Z}_p$) má kořen v $\mathbb{R}$, ale ne v $\mathbb{Z}_5$,
- (iv) (jen pokud znáš $\mathbb{Z}_p$) má kořen v $\mathbb{Z}_5$, ale ne v $\mathbb{R}$.

Úloha 1. Ať je dán nenulový polynom $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Q}[x]$ a číslo $0 \neq r \in \mathbb{R}$, které je jeho kořenem. Najdi nějaký polynom nad $\mathbb{Q}$, jehož kořenem je $\frac{1}{r}$.

V tomto díle se budeme zabývat hlavně polynomy nad $\mathbb{R}$ (a později nad $\mathbb{C}$), v zájmu obecnosti se toho však budeme snažit co nejvíce zformulovat a dokázat nad obecným oborem.

⁵Pokud se s komplexními čísly zatím nekamarádiš, nevěš hlavu – v tomto dílu vás seznámíme.

Sumy

Polynomy typicky píšeme jako součty jejich členů. Zatím jsme pro to používali notaci s třemi tečkami, která má ale jisté nevýhody. Zabírá více místa, a hlavně není vždy jednoznačná: $3 + 5 + \dots + 11$ může být jak součet lichých čísel od 3 do 11, tak součet prvočísel v témže rozsahu. Oba tyto problémy řeší zápis pomocí sum: máme-li výrazy $f_k, f_{k+1}, \dots, f_n$, jejich součet můžeme napsat jako $\sum_{j=k}^n f_j = f_k + f_{k+1} + \dots + f_n$. Například tedy polynom

$$a_n x^n + \dots + a_1 x_1 + a_0 \quad \text{můžeme napsat jako} \quad \sum_{j=0}^n a_j x^j.$$

Všimni si, že v tištěné podobě se počáteční a koncový index píšou jak nad a pod sumační symbol, tak i vedle – co do významu v tom není žádný rozdíl. Abychom mohli sumami pohodlně zapisovat polynomy, domluvme se, že x^0 vždy znamená 1, jinak bychom striktně vzato při dosazování $x = 0$ dostávali nedefinovaný výraz 0^0 .

Na pořadí sčítanců nezáleží a proměnná, přes kterou sčítáme, je použita pouze uvnitř sumy. Můžeme tak s podobou sumy trochu čachrovat – musíme si ale dát pozor, aby byl každý sčítanec zahrnut právě jednou. Například

$$\sum_{j=0}^n f_j = \sum_{j=1}^{n+1} f_{j-1} = \sum_{j=0}^n f_{n-j}.$$

Sčítat můžeme i přes více proměnných, to si lze představit jako sčítání hodnot zapsaných v políčkách nějaké tabulky. Sumy přes různé proměnné můžeme prohazovat, tak jako v tabulce nezáleží na tom, jestli sčítáme přes řádky, nebo přes sloupce:⁶

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m f_{jk} = \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n f_{jk}.$$

Operace s polynomy

Když dostaneš dva polynomy, $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x_1 + a_0$ a $Q(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x_1 + b_0$, jsou v zásadě tři věci, které s nimi můžeš udělat:

- (1) Sečíst je. Potom prostě sečteš jejich koeficienty u příslušných mocnin proměnné:

$$(P + Q)(x) = \sum_{j=0}^{\max\{m,n\}} (a_j + b_j) x^j.$$

- (2) Vynásobit je. Pro mocniny neznámé pak může existovat hodně způsobů, jak ji získat jakou součin členu v p a členu v q :

$$(P \cdot Q)(x) = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m a_j b_k x^{j+k} = \sum_{\ell=0}^{n+m} \left(\sum_{j=0}^{\ell} a_j b_{\ell-j} \right) x^{\ell}.$$

- (3) Složit je, neboli dosadit jeden do druhého. Potom se stane něco hodně divokého, neboť budeme hodně násobit:

$$P(Q(x)) = \sum_{j=0}^n a_j Q(x)^j = \sum_{j=0}^n a_j \left(\sum_{k=0}^m b_k x^k \right)^j.$$

Může se zdát, že jsme občas použili nějaký nedefinovaný koeficient. Pokud nás ale zajímá koeficient na pozici vyšší, než je stupeň polynomu, řekneme prostě, že je to nula.

⁶Kdybychom zkoušeli sčítat nekonečně mnoho prvků, mohli bychom se dostat do problémů. Naštěstí je ale každý polynom součet konečně mnoha členů.

Tvrzení. (operace s polynomy a stupně) *Necht' P a Q jsou nenulové polynomy nad oborem R . Potom:*

- (i) $\deg(P \cdot Q) = \deg(P) + \deg(Q)$,
- (ii) $\deg(P(Q(x))) = \deg(P) \cdot \deg(Q)$,
- (iii) $\deg(P + Q) \leq \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$. Pokud $\deg(P) \neq \deg(Q)$, pak už dokonce v předchozí nerovnosti nastane rovnost.

Cvičení 2. Najdi nad $\mathbb{R}$ polynomy P a Q takové, že $\deg(P(x) + Q(x)) < \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$.

Kořeny

Když dostaneme nějaký polynom, nejpřirozenější otázkou je, jaké má kořeny. S řešením kvadratické rovnice ses jistě setkal(a) ve škole, tím Tě tu proto nudit nebudeme :-). Pro polynomy vyšších stupňů je hledání kořenů výrazně těžší a pro polynomy pátého a vyššího stupně je dokonce nemožné najít formulu, která by kořeny polynomu vyjádřila pomocí jeho koeficientů. Přesto můžeme o kořenech obecného polynomu říct spoustu věcí.

Tvrzení. *Je-li R obor a $P \in R[x]$ polynom s kořenem $\alpha \in R$, pak existuje polynom $Q \in R[x]$ takový, že $P(x) = (x - \alpha) \cdot Q(x)$.*

Důkaz. Uvažujme „posunutý“ polynom $\tilde{P}(x) = P(x + \alpha)$ a označme si jeho koeficienty jako $\tilde{P}(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$. Dosazením $x = 0$ se vynulují všechny členy kromě absolutního, takže získáme $a_0 = \tilde{P}(0)$. Na druhou stranu ale víme $\tilde{P}(0) = P(\alpha) = 0$, protože α je kořenem P . Člen $a_0 = 0$ nám tak zmizí a můžeme zapsat

$$\tilde{P}(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x = x \cdot \underbrace{(a_n x^{n-1} + \dots + a_1)}_{=\tilde{Q}(x)},$$

kde jsme označením polynomu v poslední závorce jako $\tilde{Q}$ získali $\tilde{P}(x) = x \cdot \tilde{Q}(x)$. Nakonec ještě pojmenujme $Q(x) = \tilde{Q}(x - \alpha)$, čímž už dostaneme

$$P(x) = P((x - \alpha) + \alpha) = \tilde{P}(x - \alpha) = (x - \alpha)\tilde{Q}(x - \alpha) = (x - \alpha)Q(x). \quad \square$$

Tvrzení. *Nenulový polynom P stupně n nad oborem R má v R nanejvýš n kořenů. Pokud má n různých kořenů $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$, pak už jej lze zapsat ve tvaru $P(x) = c(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$ pro nějaké $c \in R$.*

Důkaz. Budeme postupovat matematickou indukcí. Jako základní případ vyřešíme $n = 0$, pak je P konstantní a nenulový, tedy $P(x) = c$ pro nějaké $0 \neq c \in R$. Automaticky tudíž P nemůže mít kořen, protože ať dosadíme cokoliv, výsledná hodnota bude c . Skutečně tak P má nanejvýš 0 kořenů, navíc jsme jej vyjádřili v odpovídajícím součinném⁷ tvaru $P(x) = c$.

Dále předpokládejme, že P je polynom stupně n a všechny polynomy stupně $n - 1$ mají nejvýše $n - 1$ kořenů. Pokud P nemá žádný kořen, pak už jsme vyhráli. Pokud má kořen $\alpha \in R$, pak z předchozího tvrzení platí $P(x) = (x - \alpha)Q(x)$ pro nějaký polynom Q . Stupeň P je o jedna vyšší než stupeň Q , takže Q má stupeň $n - 1$, a tudíž nejvýše $n - 1$ kořenů. Každý kořen P je buď α nebo kořen Q , takže P má nejvýše n kořenů. Navíc pokud P má přesně n různých kořenů, pak jich Q také musel mít $n - 1$ různých, takže $Q(x) = c(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_{n-1})$ pro nějaké c a kořeny $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$. Pojmenováním $\alpha_n = \alpha$ a přidáním činitele $(x - \alpha_n)$ pak máme součinný tvar i pro $P(x)$. $\square$

Speciálním důsledkem tvrzení je, že když má polynom kořenů více, je to už nutně nulový polynom. Díky tomu můžeme poznat, jestli jsou dva polynomy P a Q stejné: jejich rozdíl má stupeň

⁷Představujeme si, že součin s nula činiteli je prostě 1.

nejvýše $\max\{\deg(P), \deg(Q)\}$ a jeho kořeny jsou argumenty, pro něž se P a Q shodují. Pokud se tedy P a Q shodují v alespoň $\max\{\deg(P), \deg(Q)\} + 1$ bodech, je jejich rozdíl nulový polynom, tedy P a Q jsou tentýž polynom. Ještě speciálnější, pokud se P a Q shodují v nekonečně mnoha bodech, pak předchozí argument funguje i bez toho, abychom něco věděli o jejich stupních.

Pojďme si to ukázat na příkladech z praxe:

Příklad. Nenulový polynom $P \in \mathbb{R}[x]$ stupně n nazveme *vteřinovým*, pokud má n různých reálných kořenů $r_1, \dots, r_n$, a navíc pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ splňuje $P(r_j + 1) = 1$. Najdi všechny vteřinové polynomy. (PraSe 39–3j–5)

Řešení. Nenulové konstantní polynomy vyhovují triviálně všechny (nemají žádné kořeny, takže podmínka „pro všechny kořeny“ automaticky platí), nadále se proto zabývejme jen nekondantními P . Ukážeme, že mezi nimi vyhovují právě ty tvaru $P(x) = x + c$ pro $c \in \mathbb{R}$. Že všechny tyto vyhovují, je zřejmé.

Uvažujme tedy nekondantní vteřinový polynom P stupně n a označme $Q(x) = P(x+1) - P(x)$. Tvrdíme, že $Q(x)$ má stupeň $n-1$. K tomu rozepíšeme $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$. Roznásobením závorek $(x+1)^k$ podle binomické věty⁸ bude zápis polynomu $P(x+1)$ začínat

$$P(x+1) = a_n \underbrace{(x^n + nx^{n-1} + \dots)}_{(x+1)^n} + a_{n-1} \underbrace{(x^{n-1} + \dots)}_{(x+1)^{n-1}} + \dots,$$

přičemž pod trojtečkami se vždy skrývají členy stupně $n-2$ či nižšího. Podobně nám začíná $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots$, takže jejich odečtením získáme

$$Q(x) = (a_n - a_n)x^n + (a_n n + a_{n-1} - a_{n-1})x^{n-1} + \dots = na_n x^{n-1} + \dots$$

Jelikož a_n muselo být nenulové (protože $\deg(P) = n$), znamená to, že $\deg(Q) = n-1$.

Nyní si ale povšimneme, že podle zadané podmínky pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ platí

$$Q(r_j) = P(r_j + 1) - P(r_j) = 1 - 0 = 1.$$

Jinými slovy, polynom Q a konstantní polynom 1, jež mají oba stupeň nanejvýš $n-1$, se shodují v n různých bodech. To znamená, že už musí být totožné, tedy $Q(x) = 1$ je konstantní polynom.

Už zbývá jen vydedukovat, jak mohl vypadat původní P . Ze stupňů máme $n-1 = \deg(Q) = \deg(1) = 0$, takže P byl lineární. Navíc jsme při důkazu $\deg(Q) = n-1$ mimoděk odhalili, že vedoucím koeficientem Q je na_n . Vedoucím koeficient konstantního polynomu 1 je 1, takže $1 = na_n = 1 \cdot a_1$ nám prozrazuje jeden ze dvou koeficientů lineárního polynomu P . Musí tak být $P(x) = x + c$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$, což už jsme ověřili, že vyhovuje zadání. Našli jsme tak všechna řešení: nenulové konstanty a lineární polynomy s vedoucím koeficientem 1.

Příklad. Polynom $P \in \mathbb{R}[x]$ stupně 2024 splňuje $P(k) = \frac{1}{k}$ pro každé $k \in \{1, 2, \dots, 2025\}$. Urči $P(2026)$.

Řešení. Uvažme polynom $Q(x) = x \cdot P(x) - 1$. Má o 1 větší stupeň než P , takže $\deg(Q) = 2025$. Zároveň pro $k \in \{1, 2, \dots, 2025\}$ máme

$$Q(k) = kP(k) - 1 = k \cdot \frac{1}{k} - 1 = 0.$$

Nalezli jsme tak 2025 různých kořenů tohoto polynomu stupně 2025, musí se proto už jednat o všechny jeho kořeny. Navíc dostáváme součinný tvar

$$Q(x) = c(x-1)(x-2)\cdots(x-2025)$$

⁸Binomická věta říká $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, kde $\binom{n}{k}$ jsou kombinační čísla.

pro nějaké zatím neznámé $c \in \mathbb{R}$. Toto c dopočítáme dosazením $x = 0$, dostaneme

$$Q(0) = c(-1)(-2) \cdots (-2025) = c(-1)^{2025} 2025!,$$

ale zároveň $Q(0) = 0 \cdot P(0) - 1 = -1$, z čehož už plyne $c = \frac{1}{2025!}$. Víme tedy už přesně, jak vypadá $Q(x)$. Abychom se dopídili $P(2026)$, dosadíme tento argument do Q a dopočteme

$$\begin{aligned} 2026 \cdot P(2026) - 1 &= Q(2026) = \frac{1}{2025!} (2026 - 1)(2026 - 2) \cdots (2026 - 2025) = \frac{1}{2025!} \cdot 2025! = 1, \\ P(2026) &= \frac{1 + 1}{2026} = \frac{1}{1013}. \end{aligned}$$

Úloha 2. Ať jsou a, b, c navzájem různá reálná čísla. Nahlédni bez roznásobování, na co se zjednoduší součet polynomů

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Úloha 3. Jsou dána navzájem různá reálná čísla a_1, a_2, a_3 a další reálné číslo c . Pokud víš, že řešeními rovnice

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) = c$$

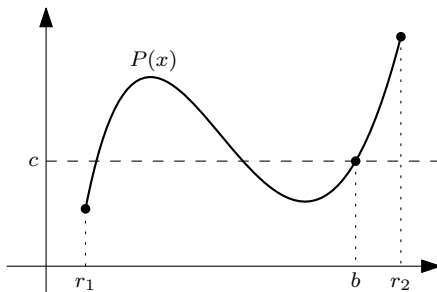
jsou tři různá $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$, urči všechna reálná řešení rovnice

$$(x + b_1)(x + b_2)(x + b_3) = c.$$

Jeden trend, kterého si můžeš povšimnout v dosavadních tvrzeních, je to, že vždy nejprve předpokládáme, že nějaký kořen máme – obecně totiž není garantováno, že nějaký kořen existuje (to bylo k vidění ve Cvičení 1). V některých konkrétních situacích ale existenci kořenu garantovat umíme:

Cvičení 3. Každý lineární polynom nad $\mathbb{Q}$ má v $\mathbb{Q}$ kořen.

Cvičení 4. Necht má polynom $P \in \mathbb{R}[x]$ lichý stupeň. Dokaž, že potom má P kořen v $\mathbb{R}$. (Můžeš předpokládat následující: pokud čísla $r_1, r_2, c \in \mathbb{R}$ splňují $P(r_1) \leq c \leq P(r_2)$, pak existuje $b \in \mathbb{R}$ splňující $P(b) = c$.)



Úloha 4. Ať mají oba $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ stupeň 10 a vedoucí koeficient 1. Je-li známo, že rovnice $P(x) = Q(x)$ nemá reálné řešení, dokaž, že $P(x+1) = Q(x-1)$ už reálné řešení má.

Úloha 5. Uvažujme dva kubické polynomy $F, G \in \mathbb{R}[x]$ s vedoucími koeficienty 1. Dejme tomu, že rovnice

$$F(x) = 0, \quad G(x) = 0, \quad F(x) = G(x)$$

mají dohromady 8 různých reálných řešení. Rozhodni, zda to největší a to nejmenší z nich mohou obě být řešeními $F(x) = 0$.
(PraSe 38–4p–4)

Odbočka do komplexní roviny

Nyní už dovedeme namotivovat komplexní čísla a seznámit Tě s nimi, pokud se ještě neznáte. Polynomy lichého stupně nad $\mathbb{R}$ mají vždy kořen, ty se sudým stupněm však mohou kořeny stále postrádat. Snad nejjednodušším možným příkladem je polynom $x^2 + 1$, který všude na reálné ose nabývá kladných hodnot, a proto nikde nemá kořen. Tento stav věcí matematiky raného novověku trápil natolik, až se jej rozhodli vyřešit neortodoxním způsobem – prostě si tento chybějící kořen vymysleli a začali zkoumat, k čemu dalšímu to povede.⁹ Pojďme následovat jejich cestu.

Začneme tím, že prohlásíme, že existuje jakési i (říkejme mu *imaginární jednotka*), které splňuje $i^2 = -1$. To znamená, že i bude kořenem polynomu $x^2 + 1$. *Komplexní čísla* budeme rozumět čísla tvaru $a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, a množinu všech komplexních čísel označíme $\mathbb{C}$. Podobně jako u polynomů se domluvíme, že v zápise komplexních čísel dovolíme přirozená zjednodušení, např. tedy budeme psát i místo $0 + 1i$, 0 místo $0 + 0i$ či $1 - i$ místo $1 + (-1)i$.

Pojďme si rozmyslet, jak s komplexními čísly počítat, k tomu uvažujme $a + bi$ a $c + di$. Sčítání je snadné:

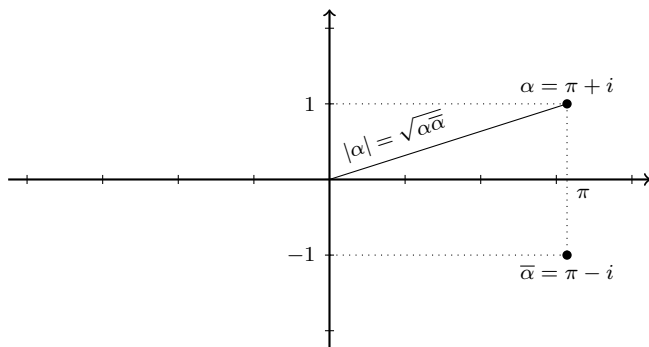
$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

podobně tak i odčítání. Při násobení dostaneme roznásobením

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2,$$

což s využitím $i^2 = -1$ zjednodušíme na $(ac - bd) + (ad + bc)i$, takže jde opět o komplexní číslo. Z hlediska úprav výrazů fungují tyto počty s komplexními čísly stejně jako počítání v reálných číslech – všechny obvyklé poučky jako komutativita¹⁰ a asociativita¹¹ sčítání a násobení či roznásobování závorek zůstávají v platnosti. Teď by bylo přirozené osvětlit ještě dělení, ale to se nám prozatím vyplatí odložit a místo toho si nakreslit obrázek.

Komplexní čísla jsme zavedli jako $a + bi$ pro $a, b \in \mathbb{R}$, je tedy přirozené se na ně dívat jako na dvojice reálných čísel. Ty můžeme interpretovat jako souřadnice bodu v rovině – říkáme jí *komplexní* nebo též *Gaussova rovina*. Typicky ji kreslíme s vodorovnou, x -ovou osou reprezentující reálnou složku a svislou, y -ovou osou reprezentující imaginární složku.



Pro $\alpha = a + bi$ definujeme jeho *komplexně sdružené číslo* jako $\bar{\alpha} = a - bi$ (čti „alfa s pruhem“). V obrázku komplexní roviny to odpovídá osově souměrnosti podle reálné osy. Dále si můžeme všimnout, že

$$\alpha \cdot \bar{\alpha} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$$

⁹Tady velice, velice zjednodušujeme, historie je o něco složitější. Prosíme, odpusť nám to :-).

¹⁰„Nezávisí na pořadí.“

¹¹„Nezávisí na uzávorkování.“

je vždy reálné číslo. Přesněji řečeno je to dokonce druhá mocnina vzdálenosti bodu $[a, b]$ od počátku. Obvykle se proto tímto definuje absolutní hodnota komplexního čísla jako $|\alpha| = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}} = \sqrt{a^2 + b^2}$, jež je pro každé $\alpha \neq 0$ kladná.

Cvičení 5. Ověř, že pro $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ platí

$$\overline{(\alpha + \beta)} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \quad \overline{(\alpha \cdot \beta)} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}.$$

Z předchozího cvičení také plyne, že $|\alpha\beta| = \sqrt{(\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta})} = \sqrt{\alpha\bar{\alpha}} \cdot \sqrt{\beta\bar{\beta}} = |\alpha| \cdot |\beta|$. To speciálně znamená, že $\alpha\beta = 0$ může nastat pouze tehdy, když $0 = |\alpha\beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$, což je právě tehdy, když jedno z α, β má nulovou absolutní hodnotu neboli je nulou. S tímto posledním střípkem skládačky jsme tak oprávněni tvrdit, že $\mathbb{C}$ je obor – můžeme tedy nad $\mathbb{C}$ zvesela vypustit všechnu polynomiální mašinerii, kterou si vybudujeme.

Cvičení 6. Najdi všechny kořeny polynomu $x^4 + 1$ v komplexních číslech.

Cvičení 7. Rozmysli si, že v $\mathbb{C}$ dovedeme dělit libovolným nenulovým číslem pomocí rozšíření komplexně sdruženým číslem: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\bar{\beta}}{\beta\bar{\beta}}$.

Zatím jsme osvětlili, *jak* pracovat v komplexních číslech, nemusí být ale stále jasné, *proč* se to vyplatí. Naše motivace započala tím, že vyrobíme kořen pro jeden konkrétní polynom. Nastává však velká magie (jejíž důkaz je bohužel nad naše možnosti) – v komplexních číslech už najednou mají kořen *všechny* (nekonstantní) polynomy. A to dokonce nejen všechny polynomy s reálnými koeficienty, ale i všechny ty, které mají komplexní koeficienty:

Věta. (základní věta algebry) Každý nekonstantní polynom $P \in \mathbb{C}[x]$ má v $\mathbb{C}$ kořen.

Se základní větou algebry v rukou už se můžeme – alespoň když pracujeme nad $\mathbb{C}$ – zbavit podmínek stylu „pokud nějaký kořen existuje ...“ a vyslovit rozklad polynomů na součinný tvar bezpodmínečně:

Důsledek. Nenulový polynom $P \in \mathbb{C}[x]$ stupně n lze zapsat ve tvaru $P(x) = c(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$, kde $c \in \mathbb{C}$ je vedoucí koeficient a $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ kořeny (ne nutně různé).

Důkaz postupuje prakticky stejnou indukcí jako ve verzi, kdy jsme nad obecným oborem měli existenci kořenů jako předpoklad – nebudeme jej tu proto opakovat.

Cvičení 8. Uvažujme polynom $P \in \mathbb{R}[x]$ jako polynom nad $\mathbb{C}$. Nahlédni, že pokud je $\alpha \in \mathbb{C}$ kořenem P , pak je i $\bar{\alpha}$ kořenem P .

Úloha 6. Jsou dány polynomy $F, G, H \in \mathbb{R}[x]$ splňující rovnost

$$(x^2 + x + 1)F(x) = G(x^3) + xH(x^3).$$

Dokaž, že 1 je kořenem G i H .

Věťovy vztahy

Náš dosavadní pohled na věc nabádá k tomu, že začneme s polynommem zapsaným pomocí koeficientů a chceme najít jeho kořeny. Neméně užitečná (a navíc snazší) je však cesta opačným směrem – představujeme si, že už známe kořeny, a dopočítáváme pomocí nich koeficienty. Přesně toto zařizují tzv. *Věťovy vztahy*.

Domluvm se, že když řekneme, že polynom P má kořeny $r_1, \dots, r_n$, myslíme tím, že se faktorizuje jako $P(x) = c(x - r_1) \cdots (x - r_n)$ pro nějaké c . Pointou je, že by se nemuselo jednat o n navzájem různých kořenů, některé by se mohly opakovat – včetně těchto opakování se ale dohromady nastrádá n kořenů.

Tvrzení. (Viètovy vztahy) Mějme polynom nad komplexními čísly $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, který má kořeny $r_1, r_2, \dots, r_n$. Pak pro každé $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí

$$\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} r_{j_1} \cdot r_{j_2} \cdot \dots \cdot r_{j_k} = (-1)^k \cdot \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

Výraz na levé straně může vypadat děsivě, ale je to jenom sumační zápis toho, že vezmeme všechny součiny obsahující právě k různých kořenů a sečteme je. Zejména pro některé „krajní“ koeficienty vypadá výsledná formulka celkem hezky: pro $k = 1$ a $k = n$ dostaneme po řadě

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{a} \quad r_1 r_2 \cdot \dots \cdot r_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Další zjednodušení přichází v případě $a_n = 1$: pak je absolutní člen (až na znaménko!) součinem kořenů, zatímco druhý nejvyšší koeficient je mínus součet kořenů.

Cvičení 9.

- (i) Napiš si Viètovy vztahy pro polynom stupně 2 a pro polynom stupně 3.
- (ii) Najdi koeficienty nějakého polynomu, jehož kořeny jsou 2, 3 a 5.

Polynom ve formulaci Viètových vztahů výše jsme vzali nad komplexními čísly, protože tam máme zajištěno, že opravdu má n kořenů. Taký je ale možné postupovat obecněji:

Cvičení 10. Zformuluj Viètovy vztahy nad libovolným oborem pro polynom stupně n s kořeny $r_1, \dots, r_n$ v případě, že má vedoucí koeficient $a_n = 1$.

Pojďme si nyní ukázat, jak Viètovy vztahy použít v úlohách. Sice nám nepomohou v řešení polynomiální rovnice, často ale umožňují vyřešit úlohy týkající se kořenů, aniž bychom kořeny explicitně počítali.

Příklad. Označme α a β (komplexní) kořeny rovnice $2x^2 - 4x + 9 = 0$. Urči $\alpha^2 + \beta^2$.

Řešení. Víme, že $\alpha + \beta = -(-\frac{4}{2}) = 2$ a $\alpha\beta = \frac{9}{2}$. Nyní je naším úkolem vyrobit $\alpha^2 + \beta^2$ z $\alpha + \beta$ a $\alpha\beta$. K tomu si stačí uvědomit, že $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, tedy

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 2^2 - 2 \cdot \frac{9}{2} = -5.$$

Na první pohled může vypadat překvapivě, že součet dvou čtverců vyšel záporně. To je ale jen tím, že α a β jsou ve skutečnosti komplexní čísla.

Příklad. Označme (komplexní) kořeny polynomu $x^3 - 3x^2 + 1$ jako α, β, γ . Najdi kubický polynom s kořeny $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$.

Řešení. Nejprve si shrňme Viètovy vztahy pro $x^3 - 3x^2 + 1$. Pro koeficienty u x^2 , x a 1 postupně dostáváme

$$\alpha + \beta + \gamma = -(-3) = 3, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0, \quad \alpha\beta\gamma = -1.$$

Nyní chceme pomocí těchto výrazů vyjádřit vzorečky pro $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$. Začneme součtem kořenů, což je až na znaménko koeficient u x^2 . Využijeme vztah $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$ k vyjádření

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 3^2 - 2 \cdot 0 = 9.$$

Následuje koeficient u x , zde podobným využitím závorky mocněné na druhou získáme

$$\begin{aligned} \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 &= (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2\alpha^2\beta\gamma - 2\alpha\beta^2\gamma - 2\alpha\beta\gamma^2 = \\ &= (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 2\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) = 0^2 - 2 \cdot (-1) \cdot 3 = 6. \end{aligned}$$

Konečně absolutní člen, který odpovídá součinu kořenů, což dá

$$\alpha^2 \beta^2 \gamma^2 = (\alpha \beta \gamma)^2 = (-1)^2 = 1.$$

Na závěr už ke spočteným výrazům musíme přidat střídající se znaménka, čímž ve výsledku dostaneme, že $\alpha^2, \beta^2, \gamma^2$ jsou kořeny polynomu $x^3 - 9x^2 + 6x - 1$.

Cvičení 11. Buď $P \in \mathbb{Q}[x]$ polynom, který má v $\mathbb{C}$ kořeny $r_1, \dots, r_n$. Pokud víš, že $r_1, \dots, r_{n-1}$ jsou ve skutečnosti racionální, nahlédni, že i r_n musí být racionální.

Úloha 7. Jsou dána komplexní čísla a, b, c, d taková, že $a + b = c + d$ a zároveň $ab = cd$. Dokaž, že $\{a, b\} = \{c, d\}$, tedy že se jedná (možná až na pořadí) o stejné dvojice.

Úloha 8. Pokud víš, že reálná čísla $a \neq b$ splňují $a^2 + 4a + 1 = b^2 + 4b + 1 = 0$, urči $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$.

Úloha 9. Jsou dána $a, b, c \in \mathbb{R}$ taková, že platí nerovnosti

$$a + b + c > 0, \quad ab + bc + ca > 0, \quad abc > 0.$$

Dokaž, že $a, b, c > 0$.

Úloha 10. Jsou dány kvadratické polynomy $P(x)$ a $Q(x)$ takové, že $P(Q(x))$ má čtyři různé reálné kořeny $r_1 < r_2 < r_3 < r_4$. Dokaž, že $r_1 + r_4 = r_2 + r_3$. (PraSe 43–1p–4)

Úloha 11. Jsou dána $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, z nichž alespoň jedno je nenulové. Dokaž, že polynom $x^6 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ nemá všechny kořeny reálné.

Úloha 12. Uvažujme celá čísla $n \geq 2$ a $p, q \geq 0$. Dokaž, že pokud existuje polynom $x^n - px^{n-1} + qx^{n-2} + a_{n-3}x^{n-3} + \dots + a_1x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$, jehož všechny komplexní kořeny jsou nezáporná celá čísla, pak lze do roviny nakreslit p přímek protínajících se v q různých bodech.

Hledání polynomů

V olympiádě můžeš najít úlohy následujícího typu: dostaneš rovnici, v níž vystupuje nějaký neznámý polynom, případně polynomy. Tvým úkolem je pak přijít na to, které to mohou být.

Co lze s takovou úlohou dělat:

- (1) Porovnat stupně. To je poměrně jednoduché a může to možná řešení značně omezit.
- (2) Porovnat jednotlivé koeficienty. Nejsnadněji se typicky dopočítávají „krajní“ koeficienty, tzn. vedoucí, absolutní, lineární, ...
- (3) Porovnat hodnoty v určitých bodech. Často může být šikovné dosadit kořen některého polynomu, který se v úloze vyskytuje.

Kromě těchto obecných rad můžeme nabídnout už jen přání kuráže a houževnatosti – polynomiální rovnice dovedou být rozmanité a mnohdy si v nich pořádně započítáme. Ukážeme na příkladu:

Příklad. Najdi všechny dvojice nekonstantních polynomů $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ splňující

$$P(Q(x)^3) = x \cdot P(x) \cdot Q(x)^3.$$

(PraSe 41–4p–6)

Řešení. Připomeňme, že rovnosti polynomů na levé a na pravé straně myslíme to, že mají stejné koeficienty u každé mocniny x . To ale implikuje i to, že dosazením libovolného čísla dávají stejné hodnoty, což později využijeme.

Začneme porovnáním stupňů, označme $n = \deg(P)$, $m = \deg(Q)$. Jelikož hledáme nekonstantní polynomy, půjde o kladná celá čísla. Pak na levé straně máme stupeň $n \cdot 3m$, zatímco na pravé $1 + n + 3m$. Postupně upravíme

$$3nm = n + 3m + 1,$$

$$3nm - 3m - n + 1 = 2,$$

$$(3m - 1)(n - 1) = 2.$$

Máme tedy 2 rozloženo na součin dvou (nezáporných) celých čísel, což jde jen dvěma způsoby: $1 \cdot 2$ a $2 \cdot 1$. Jelikož $3m - 1 = 1$ není možné, zbývá jenom $3m - 1 = 2$ a $n - 1 = 1$ neboli $m = 1$, $n = 2$.

Nyní víme, že Q je lineární. Jakožto reálný polynom s lichým stupněm tak má nějaký reálný kořen r . Dosazením $x = r$ do zadané rovnice získáme $P(0) = P(Q(r)^3) = r \cdot P(r) \cdot Q(r)^3 = r \cdot P(r) \cdot 0^3 = 0$, takže 0 je kořenem P .

Vytkněme činitel x odpovídající tomuto kořenu, tím dostaneme $P(x) = xR(x)$ pro nějaké $R \in \mathbb{R}[x]$. Dosazením tohoto vyjádření P pak dostaneme

$$Q(x)^3 \cdot R(Q(x)^3) = x^2 \cdot R(x) \cdot Q(x)^3.$$

Pro $a \in \mathbb{R}$ různé od r je $Q(a) \neq 0$, protože Q má jen jeden kořen, takže v těchto bodech zjednodušíme $Q(a)^3 \cdot R(Q(a)^3) = a^2 \cdot R(a) \cdot Q(a)^3$ na $R(Q(a)^3) = a^2 R(a)$. Toto má platit ve všech reálných bodech kromě jednoho, tedy v nekonečně mnoha bodech, což nám umožňuje tuto rovnost zesílit na rovnost polynomů

$$R(Q(x)^3) = x^2 \cdot R(x)$$

(jinými slovy, i když jsme nejprve museli vyloučit bod $x = r$, později ho dostaneme zpátky).

Jelikož P měl stupeň 2, R musí mít stupeň 1, takže má v $\mathbb{R}$ právě jeden kořen, označme jej s . Dosazením $x = 0$ nyní dostaneme $R(Q(0)^3) = 0$, takže $Q(0)^3 = s$. Obdobně ale taky dosazením $x = s$ dostaneme $R(Q(s)^3) = s^2 R(s) = 0$, takže i $Q(s)^3 = s$. Dohromady jsme získali $Q(0)^3 = Q(s)^3$, takže také $Q(0) = Q(s)$. Označíme-li si koeficienty Q třeba jako $Q(x) = ux + v$, kde $u \neq 0$, pak už snadno vidíme, že z $u \cdot 0 + v = us + v$ plyne $0 = s$.

Odhallili jsme tedy, že kořenem R je opět 0 , takže máme $R(x) = cx$ pro nějaké $0 \neq c \in \mathbb{R}$, a tedy $P(x) = cx^2$. Navíc jsme měli $Q(0)^3 = s = 0$, tedy $Q(0) = 0$. Jelikož Q bylo taktéž lineární, zbavíme se absolutního členu, čímž zbude $Q(x) = ux$. Dosazením do $R(Q(x)^3) = x^2 R(x)$ dostaneme $c(ux)^3 = x^2 \cdot cx$, z čehož porovnáním koeficientů dostaneme $cu^3 = c$, tedy $u^3 = 1$, tedy $u = 1$.

Dokázali jsme tak, že všechna řešení musí být tvaru $(P, Q) = (cx^2, x)$ pro $0 \neq c \in \mathbb{R}$. Zkouškou už ověříme, že všechny dvojice tohoto tvaru vyhovují původní rovnici:

$$P(Q(x)^3) = c(x^3)^2 = cx^6 = x \cdot cx^2 \cdot x^3 = x \cdot P(x) \cdot Q(x)^3.$$

Prochroustal(a) ses úspěšně řešením? Dobrá práce, na dalších úlohách se můžeš procvičit:

Úloha 13. Najdi všechny nenulové polynomy $P \in \mathbb{R}[x]$, jež splňují $P(x^2) = x^2(x^2 + 1)P(x)$.

Úloha 14. Najdi všechny polynomy $P \in \mathbb{R}[x]$ splňující $xP(x - 1) = (x + 1)P(x)$.
(PraSe 34–2j–3)

Úloha 15. Najdi všechny polynomy $P \in \mathbb{R}[x]$, které splňují $P(0) = 0$ a zároveň $P(x^2 + 1) = P(x)^2 + 1$.

Úloha 16. (těžká) Jsou dány polynomy $P, Q \in \mathbb{R}[x]$, jež splňují $P(Q(x)^2 + x + 1) = Q(P(x)^2 + x + 1)$. Navíc je známo, že P má nějaký reálný kořen a Q má nějaký reálný kořen. Dokaž, že potom už $P = Q$.

Závěr

Vítej na konci prvního dílu, jsme rádi, že ses dočetl(a) až sem. Ptáš se, co očekávat v díle druhém? Namísto reálné přímky či komplexní roviny zabrousíme do světa celých čísel a prozkoumáme zákoutí, kde se polynomy potkávají s teorií čísel – těšit se můžeš například na poučku „rozdíl argumentů dělí rozdíl hodnot“ či na větu o racionálním kořenu.

Přejeme hodně úspěchu při řešení úloh 1. seriálové série a těšíme se na zdárnou shledanou u druhého dílu!

Návody ke cvičením

- Členy nejvyššího stupně se musí navzájem vyrušit.
- Umíme dělit.
- Dokaž, že pro dost velká kladná r je $P(r)$ kladné a pro dost malá záporná r je $P(r)$ záporné. . . anebo naopak.
- $P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$.
- Pokud $a_n = 1$, skoro nic nezmění. Jen chceme, aby sis rozmyslel(a), že kromě záruky existence kořenů jsme nepoužili nic specifického pro $\mathbb{C}$:-).
- Součet kořenů je. . . ?

Návody k úlohám

- Obrát pořadí koeficientů.
- Dosaď postupně $x = a, b, c$.
- $(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) - c = (x - b_1)(x - b_2)(x - b_3)$.
- Co se v rozdílech děje s členem stupně 9?
- Nemůže – zkoumej, kde polynomy F , G a $F - G$ nabývají kladných a záporných hodnot.
- Dosazuj komplexní kořeny polynomu $x^2 + x + 1$.
- Kořeny kvadratického polynomu.
- Viètovy vztahy pro polynom $x^4 + 4x + 1$.
- $(x + a)(x + b)(x + c)$.
- Dívej se na Viètovy vztahy polynomů $Q(x) - s$, kde s je kořen P .
- Předpokládej, že všech šest kořenů $r_1, \dots, r_6$ je reálných, a vyjádři $r_1^2 + \dots + r_6^2$.
- Interpretuj kořeny jako skupinky rovnoběžek.
- Stupeň určíš snadno. Potom hledej kořeny P dosazováním takových argumentů, aby se pravá strana vynulovala.
- Polynom $(x + 1)P(x)$ má vždy stejné hodnoty v $r - 1$ a r .
- Induktivně najdi nekonečně mnoho přirozených m , pro něž $P(m) = m$.
- Nejprve najdi bod, kde se P a Q shodují. Potom vyráběj další a další.

Řešení cvičení

- Příkladů je mnoho, my jsme si vybrali následující: (i) $2x - 1$, (ii) $x^2 - 2$, (iii) $x^2 - 2$, (iv) $x^2 + 1$.
- Funguje např. $P(x) = x + 1$ a $Q(x) = -x$, neboť pak $P(x) + Q(x) = 1$.
- Označíme-li si polynom $ax + b$, kde $a \neq 0$, pak je $-\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ kořenem.
- Rozepišme $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, přičemž $a_n \neq 0$ a n je liché. BÚNO nechtě $a_n > 0$. Nejprve si rozmyslíme, že pro nějaké dost velké r je $P(r)$ kladné, jelikož člen $a_n r^n$ „přebije“ všechny ostatní. To je intuitivně celkem zjevné, ale abychom to dokázali pořádně, budeme si muset vyhrnout rukávy – pokud by Ti následující odstavec dělal potíže, klidně se jen intuitivně smíř s tím, že člen většího stupně přebije ty menší, a pokračuj dál :-).

Postupujme třeba následovně: nejprve označme $A = \max \left\{ \frac{|a_0|}{a_n}, \frac{|a_1|}{a_n}, \dots, \frac{|a_{n-1}|}{a_n} \right\} + 1$. Potom zvolme $r = \max\{1, n \cdot A\}$. Tím následně dovedeme pro každé $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ odhadnout $|a_k r^k| < \frac{1}{n} a_n r^n$: pokud $a_k = 0$, pak to platí triviálně, a pokud $a_k \neq 0$, tak dostaneme

$$|a_k r^k| = |a_k| r^k \leq |a_k| r^{n-1} \leq r^n \cdot \frac{|a_k|}{nA} < r^n \cdot \frac{|a_k|}{n \cdot \frac{|a_k|}{a_n}} = \frac{1}{n} a_n r^n.$$

Sečtením tohoto odhadu přes nultý, první, $\dots$, $(n-1)$ -tý člen v $P(r)$ a aplikováním trojúhelníkové nerovnosti pak získáme, že vedoucí člen v absolutní hodnotě skutečně přebíjí všechny ostatní dohromady, neboť

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k r^k| < n \cdot \frac{1}{n} a_n r^n = a_n r^n.$$

Tudíž v tom nejnešťastnějším možném případě, kdy by všechny nižší členy přispívali do $P(r)$ zápornými příspěvky, dostaneme

$$P(r) = a_n r^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k \geq a_n r^n - \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k \right| > a_n r^n - a_n r^n = 0,$$

takže $P(r)$ je kladné.

Díky tomu, že n je liché, bude obdobně $a_n(-r)^n$ natolik malé (daleko v záporném směru na číselné ose), že ostatní členy jej nedokážou přebít, takže $P(-r)$ bude záporné. Víme tedy, že P někde nabývá záporné a někde jinde kladné hodnoty. Jelikož je to reálný polynom, musí někde mezi nabývat i nuly, a tento bod je potom naším hledaným kořenem.

5. Označme $\alpha = a + bi$ a $\beta = c + di$, pak přímočaře ověříme:

$$\begin{aligned} \overline{(\alpha + \beta)} &= \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \\ \overline{(\alpha \cdot \beta)} &= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i = (a - bi)(c - di) = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}. \end{aligned}$$

6. Jsou to všechny čtyři kombinace znamének v $\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

7. Je to skutečně tak, nekecali jsme. Jelikož předpokládáme $\beta \neq 0$, je $\beta\bar{\beta} = |\beta|^2$ kladné reálné číslo. Stačí tedy spočítat součin $\alpha\bar{\beta}$ a poté obě složky podělit tímto reálným číslem $|\beta|^2$.

8. Ať $P(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$. Jelikož $c_k \in \mathbb{R}$, platí $c_k = \overline{c_k}$, takže dostaneme

$$P(\bar{\alpha}) = \sum_{k=0}^n c_k (\bar{\alpha})^k = \sum_{k=0}^n \overline{(c_k \alpha^k)} = \overline{\left(\sum_{k=0}^n c_k \alpha^k \right)} = \overline{P(\alpha)} = \bar{0} = 0.$$

9. (i) Pro kvadratický polynom $P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ s kořeny r_1, r_2 dostaneme

$$r_1 + r_2 = -\frac{a_1}{a_2} \quad \text{a} \quad r_1 r_2 = \frac{a_0}{a_2}.$$

Pro kubický $P(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ s kořeny r_1, r_2, r_3 to pak bude

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{a_2}{a_3}, \quad r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 = \frac{a_1}{a_3}, \quad \text{a} \quad r_1 r_2 r_3 = -\frac{a_0}{a_3}.$$

(ii) Kýžené kořeny si můžeme zařídit třeba tím, že si polynom zvolíme v součinném tvaru jako $(x-2)(x-3)(x-5)$. Roznásobením závorek, což odpovídá počítání Viětových vztahů, pak získáme

$$x^3 - (2+3+5)x^2 + (2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 2)x - 2 \cdot 3 \cdot 5 = x^3 - 10x^2 + 31x - 30.$$

10. Můžeme zformulovat třeba takto: Ať je $P(x) = x^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$ polynom nad oborem R a nechť má v R kořeny $r_1, \dots, r_n$. Potom pro každé $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí

$$\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} r_{j_1} \cdots r_{j_k} = (-1)^k a_{n-k}.$$

11. Označme $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, kde jednotlivá a_k jsou racionální. Z Viětova vztahu pro a_{n-1} máme $r_1 + \dots + r_{n-1} + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$, což upravíme na $r_n = -\left(r_1 + \dots + r_{n-1} + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right)$. V tomto výrazu jsou na pravé straně samá racionální čísla, takže i r_n je racionální.

Řešení úloh

1. BÚNO¹² předpokládáme $a_n \neq 0$. Stejně tak předpokládáme $a_0 \neq 0$, v opačném případě bychom vytknuli x a vzali za P polynom s menším stupněm.

Pak označme $Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \in \mathbb{Q}[x]$ polynom, který z P vznikne obrácením pořadí koeficientů. Pro $0 \neq t \in \mathbb{R}$ pak platí $Q(t) = t^n P(\frac{1}{t})$. Speciálně tedy pro $t = \frac{1}{r}$ dostaneme $Q(\frac{1}{r}) = \frac{1}{r^n} P(r) = \frac{0}{r^n} = 0$, takže $\frac{1}{r}$ je kořenem Q .

2. Označme zadaný součet jako polynom $P(x)$. Každý ze tří sčítanců má stupeň 2, takže také $\deg(P) \leq 2$. Dosazením $x = a$ dostaneme v prvním sčítanci $\frac{(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)} = 1$, zatímco v každém ze zbylých dvou sčítanců objevíme nulovou závorku $(a-a)$. Celkem tedy $P(a) = 1$ a obdobně máme též $P(b) = P(c) = 1$. Polynomy P a 1 (konstantní polynom), oba stupně nanejvýš 2, se tak shodují ve 2 + 1 různých bodech, takže už se musí rovnat. Zjednodušíme tedy $P(x) = 1$.

3. Známe kořeny polynomu $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) - c$, takže jej můžeme vyjádřit součinem jako $(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)$. Přesunutím c pak hned máme, že kořeny $(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3) + c$ jsou a_1, a_2, a_3 . Naše původní tři čísla jsou tak řešeními $(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3) = -c$. Dosazením $-x$ místo x a přenásobením rovnice mínus jedničkou pak získáme přesně rovnici $(x+b_1)(x+b_2)(x+b_3) = c$, jejímiž řešeními tak jsou $-a_1, -a_2, -a_3$.

4. Podmínka o (ne)řešitelnosti rovnic nám říká, že $P(x) - Q(x)$ nemá reálný kořen. Polynom nad $\mathbb{R}$ může nemít kořen jen tehdy, když má sudý stupeň. Pokud $P(x) = x^{10} + a_9x^9 + \dots + a_1x + a_0$ a $Q(x) = x^{10} + b_9x^9 + \dots + b_1x + b_0$, pak nám toto speciálně říká, že v rozdílu

$$P(x) - Q(x) = (a_9 - b_9)x^9 + \dots$$

musel zmizet člen stupně 9, takže $a_9 = b_9$. Teď už stačí jen vyvodit, že v $P(x+1) - Q(x-1)$ už člen stupně 9 nezmizí. K tomu spočítáme

$$\begin{aligned} P(x+1) - Q(x-1) &= \left((x^{10} + 10x^9 + \dots) + a_9(x^9 + \dots) + \dots \right) - \\ &\quad - \left((x^{10} - 10x^9 + \dots) + b_9(x^9 - \dots) + \dots \right) = \\ &= \left((10 + a_9) - (-10 + b_9) \right) x^9 + \dots = 20x^9 + \dots \end{aligned}$$

protože $a_9 - b_9 = 0$. Díky lichému stupni tak $P(x+1) - Q(x-1)$ má reálný kořen, tedy $P(x+1) = Q(x-1)$ má řešení.

5. Řešení $F(x) = G(x)$ jsou přesně kořeny polynomu $F - G$. Všimněme si, díky shodným vedoucím koeficientům se kubické členy v $F - G$ vyruší, takže půjde nanejvýš o kvadratický polynom. Dohromady nám naše tři rovnice tedy nemohou dát více než $3 + 3 + 2 = 8$ různých řešení. To, že máme všech osm, znamená, že už se dohromady jedná o všechny kořeny těchto polynomů a také že $F - G$ má skutečně stupeň 2 (a nikoliv nižší).

Ať je a ten nejmenší a b ten největší z kořenů. Pro spor předpokládáme, že jsou to oba kořeny F . Jelikož má G vedoucí koeficient 1, nabývá dostatečně daleko vlevo na číselné ose (v záporných číslech) záporné hodnoty. Zároveň na intervalu $(-\infty, a)$ nemůže měnit znaménko, protože všechny kořeny G jsou větší než a . To znamená, že $G(a) < 0$, takže $(F-G)(a) = F(a) - G(a) = -G(a) > 0$. Taktéž $F - G$ nemůže na intervalu $(-\infty, a)$ měnit znaménko, takže také všude dostatečně daleko vlevo na číselné ose nabývá kladných hodnot. Protože je $F - G$ kvadratický polynom (má sudý stupeň), znamená to, že jeho vedoucí koeficient je kladný.

Analogickou argumentaci na druhé straně číselné osy zjistíme, že $G(b) > 0$, takže $(F-G)(b) < 0$, což ale implikuje, že $F - G$ má záporný vedoucí koeficient. To je spor, takže a i b nemohly být současně kořeny F .

¹²Zkratka pro „bez újmy na obecnosti“. Myslím tím, že činíme nějaké zjednodušení nebo volbu, která nic podstatného nezmění.

6. Uvažujme komplexní kořeny polynomu $x^2 + x + 1$: dosazením snadno ověříme, že to jsou $\alpha_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ a $\alpha_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$. Navíc to pak musí být rovnou i kořeny $(x-1)(x^2+x+1) = x^3-1$, takže $\alpha_1^3 = 1 = \alpha_2^3$. Jejich dosazením do zadané rovnosti tak pro $j \in \{1, 2\}$ dostaneme $0 = G(1) + \alpha_j H(1)$. Na to se můžeme dívat jako na soustavu dvou rovnic s neznámými $G(1)$ a $H(1)$. Odečtením rovnic od sebe dostaneme $0 = (\alpha_1 - \alpha_2)H(1) = i\sqrt{3} \cdot H(1)$, takže $H(1) = 0$. Z toho už pak snadno vyplývá $G(1) = 0$.

7. Uvažme $P(x) = (x-a)(x-b)$, $Q(x) = (x-c)(x-d)$. Použitím Viětových vztahů zjistíme, že P a Q mají totožný lineární koeficient $-(a+b) = -(c+d)$ i totožný absolutní člen $ab = cd$, takže už $P(x) = Q(x)$. Musí tedy mít i stejnou sadu kořenů $\{a, b\} = \{c, d\}$.

8. Chceme výraz $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ vztáhnout k viětovským výrazům ab a $a+b$, čehož docílíme třeba pomocí

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} = \frac{(a+b)^2}{ab} - 2.$$

Dosazením $a+b = -4$, $ab = 1$ tak získáme $\frac{(-4)^2}{1} - 2 = 14$.

9. Uvažme polynom $P(x) = (x+a)(x+b)(x+c)$. Podle Viětových vztahů (anebo prostě násobením závorek) obdržíme $P(x) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$. Jedná se tedy o polynom se samými kladnými koeficienty, speciálně tak dosazením jakéhokoliv $r \geq 0$ dostaneme $P(r) > 0$. Přitom ale z definice vidíme, že P má kořeny $-a, -b, -c$. Ty tak musí být záporné, což už je ekvivalentní $a, b, c > 0$.

10. Všimneme si, že P má reálný kořen $s_1 = Q(r_1)$. Rozkládá se potom tedy na $P(x) = (x-s_1) \cdot (ux+v)$ pro nějaký lineární polynom $ux+v$. Z toho pak plyne, že má P i druhý reálný kořen $s_2 = -\frac{v}{u}$. Nyní můžeme změnit úhel pohledu a na kořeny $P(Q(x))$ se dívat jako na kořeny jednoho z polynomů $Q(x) - s_1$ a $Q(x) - s_2$, načež víme, že r_1, r_2, r_3, r_4 se mezi tyto dva polynomy nějakým způsobem rozdělí do dvou dvojic.

Jelikož však $Q(x) - s_1$ a $Q(x) - s_2$ mají stejný koeficient u x (liší se totiž jen o konstantu), znamená to, že tyto dvě dvojčky kořenů dají stejný součet. To už ale vzhledem k seřazení $r_1 < r_2 < r_3 < r_4$ jde jenom tehdy, když se spáruje nejmenší s největším a poté dva prostřední spolu, tedy $r_1 + r_4 = r_2 + r_3$.

11. Ať jsou kořeny polynomu $r_1, \dots, r_6$. Koeficienty u x^5 a x^4 jsou nulové, což znamená

$$\sum_{k=1}^6 r_k = 0 = \sum_{1 \leq j < k \leq 6} r_j r_k.$$

Díky tomu dovedeme vyjádřit

$$\sum_{k=1}^6 r_k^2 = \left(\sum_{k=1}^6 r_k \right)^2 - 2 \left(\sum_{1 \leq j < k \leq 6} r_j r_k \right) = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0.$$

Nyní pro spor předpokládejme, že všechny $r_1, \dots, r_6$ jsou reálné. Pak máme součet čtverců několika reálných čísel nulový, což mohlo nastat jen tehdy, pokud jsou všechny nulové, tedy $r_1 = \dots = r_6 = 0$. Pak je ale celý polynom roven x^6 , což je spor s předpokladem, že alespoň jedno z a, b, c, d je nenulové.

12. Označme si kořeny $r_1, \dots, r_n$. Vyberme si v rovině n navzájem nerovnoběžných přímk a přidejme ke každé nějaké její rovnoběžky tak, abychom nakonec v k -tém směru měli r_k rovnoběžek. Provedme to navíc tak, aby se žádné tři z vybraných přímek neprotly v jednom bodě – kdyby se to stalo, prostě vezmeme jednu z inkriminovaných přímek a nahradíme ji za jinou rovnoběžku.

Přímek je nyní dohromady $\sum_{k=1}^n r_k$, což je podle Viětových vztahů $-(-p) = p$. Průsečky pak odpovídají dvojicím přímek z rozdílných skupinek, takže jejich celkový počet získáme posčítáním všech součinů různých r_k , což podle Viětových vztahů dá přesně q .

13. Označme $n = \deg(P)$, potom na levé straně máme stupeň $2n$ a na pravé $2 + 2 + n$, z čehož vyvodíme $n = 4$. Nyní zkusíme dosazovat: $x = 0$ vynuluje pravou stranu, takže $P(0^2) = 0$. Dále budeme chtít za x dosazovat i komplexní hodnoty – to můžeme z toho důvodu, že i kdybychom věděli jen to, že $P(x^2) = x^2(x^2 + 1)P(x)$ platí ve všech reálných bodech x , stále to znamená, že polynomy na levé a na pravé straně uvažované nad $\mathbb{C}$ mají nekonečně mnoho bodů, kde se shodují, takže už to musí být stejné polynomy i nad $\mathbb{C}$. Můžeme tedy dosadit třeba $x = i$, čímž bude na pravé straně $i^2 + 1 = 0$, takže v důsledku $P(i^2) = 0$. Dohromady jsme tak odhalili, že P má kořeny 0 a -1 , takže $P(x) = x(x+1)Q(x)$ pro nějaký $Q \in \mathbb{R}[x]$.

S tímto vyjádřením v rovnici dostaneme $x^2(x^2+1)Q(x^2) = x^2(x^2+1)x(x+1)Q(x)$. Pro všechna nenulová $a \in \mathbb{R}$ je $a^2(a^2+1) \neq 0$, takže v těchto bodech dostaneme

$$a^2(a^2+1)Q(a^2) = a^2(a^2+1)a(a+1)Q(a) \implies Q(a^2) = a(a+1)Q(a).$$

Vzhledem k tomu, že to je rovnost v nekonečně mnoha bodech, dostáváme $Q(x^2) = x(x+1)Q(x)$.

Nyní provedeme něco podobného ještě jednou: dosadíme $x = 0$ a $x = -1$, abychom vynulovali pravou stranu, čímž zjistíme, že 0^2 a $(-1)^2 = 1$ jsou kořeny Q . Vzhledem k $\deg(Q) = \deg(P) - 2 = 2$ pak už musí být $Q(x) = cx(x-1)$ pro nějaké $0 \neq c \in \mathbb{R}$, takže $P(x) = cx(x+1)x(x-1) = cx^2(x^2-1)$. Zkouškou snadno ověříme, že všechny polynomy tohoto tvaru jsou řešeními.

14. $P(x) = 0$ zjevně funguje. Ukážeme, že žádné nenulové polynomy už nevyhovují. Označme $Q(x) = (x+1)P(x)$. Zadání nám říká $Q(x-1) = Q(x)$, takže pokud označíme třeba $c = Q(0)$, polynom Q nabývá této hodnoty v nekonečně mnoha bodech

$$c = Q(0) = Q(1) = Q(2) = \dots$$

To už znamená, že $Q(x)$ a konstantní polynom c jsou totožné. To je ale možné jen pro $P = 0$, protože jinak by mělo Q stupeň $\deg(P) + 1 \geq 1$, což pro konstantu není možné.

15. Tvrdíme, že vyhovuje pouze $P(x) = x$. Že toto skutečně vyhovuje, je zjevné.

Nyní ať P splňuje podmínky zadání. Definujme posloupnost $a_0, a_1, \dots$ pomocí $a_0 = 0$ a rekurence $a_{n+1} = a_n^2 + 1$. Snadno pozorujeme, že to je rostoucí posloupnost. Indukcí dokážeme, že každý člen splňuje $P(a_n) = a_n$. Pro $n = 0$ to platí hned ze zadání, protože $P(0) = 0$. Dále dokážeme indukční krok: pokud $P(a_n) = a_n$, pak už taky

$$P(a_{n+1}) = P(a_n^2 + 1) = P(a_n)^2 + 1 = a_n^2 + 1 = a_{n+1}.$$

Důkaz indukci je tím hotov. Díky němu máme nekonečně mnoho různých $m \in \mathbb{R}$ splňujících $P(m) = m$. Polynom $P(x)$ a x se tak shodují v nekonečně mnoha bodech, takže musí být totožné.

16. Nejprve dokážeme, že v nějakém bodě a nastane $P(a) = Q(a)$. Máme zadáno, že P i Q mají nějaký reálný kořen, ať tedy $P(u) = 0$ a $Q(v) = 0$ pro nějaká $u, v \in \mathbb{R}$. Uvažujme polynom $R(x) = P(x)^2 - Q(x)^2$. V bodě $x = v$ má hodnotu $R(v) = P(v)^2 \geq 0$, takže R někde nabývá nezáporné hodnoty. Podobně v bodě $x = u$ dostaneme $R(u) = -Q(u)^2 \leq 0$, takže R někde nabývá taky nekladné hodnoty. „Někde mezi“ (viz Cvičení 4) už proto musí nabývat nulové hodnoty, tedy R má reálný kořen, nazvěme ho r . V něm platí $P(r)^2 = Q(r)^2$, takže když označíme $a = P(r)^2 + r + 1 = Q(r)^2 + r + 1$, dostaneme dosazením $x = r$ v zadané rovnosti, že $P(a) = Q(a)$.

Našli jsme tak jedno reálné a splňující $P(a) = Q(a)$. Teď ukážeme, že jich dokonce musí být nekonečně mnoho. Pro spor tedy předpokládejme, že jich je jen konečně mnoho. Potom si můžeme vybrat to největší z nich a označit si $b = P(a) = Q(a)$. Dosazením $x = a$ v zadané rovnici pak zjistíme, že P a Q se shodují též v $b^2 + a + 1$. Přitom ale $b^2 + a + 1 \geq a + 1 > a$, což je spor s tím, že a bylo největší číslo, kde se P a Q shodují. Takových bodů proto muselo existovat nekonečně mnoho, a tudíž $P = Q$.

1. podzimní série – UFO

VÝSLEDKOVÁ LISTINA

	jméno	příjmení	r.	škola	1	2	3	4	5	6	7	8	re±im	celkem
1.–3.	Patrik	Štencel	4	MendelG OP	–	–	–	5	5	5	5	5	25	25,00
1.–3.	Lukáš	Komín	2	GOpatoVPH	–	–	–	5	5	5	5	5	25	25,00
1.–3.	Jakub	Trčka	2	GKepleraPH	–	–	3	5	5	5	5	5	25	25,00
4.	Jakub	Hříbal	2	G Beroun	3	3	3	5	5	5	5	–	23	23,92
5.	Štěpán	Síkora	0	GNadŠtolPH	3	3	3	5	–	5	5	–	21	23,88
6.	Alexis Théodore	Dachary	3	LSG Letohrad	3	3	3	5	5	5	5	4	24	23,62
7.	Arne	Štoudek	1	GJarošeBO	3	3	3	5	5	–	5	–	21	23,42
8.–9.	Jakub	Kuchařík	2	G Dobříš	3	3	3	5	5	0	5	–	21	22,79
8.–9.	Anna-Kristina	Migel	2	SPŠSmíchov	3	3	3	5	5	3	5	–	21	22,79
10.	Vít Jiří	Houfek	2	GKepleraPH	3	3	1	5	5	3	5	–	21	22,72
11.	Dan	Školař	0	ŠkBřezová	3	3	3	5	–	4	3	–	18	22,66
12.	Vladislav	Bredikhin	2	GKepleraPH	3	3	3	5	5	3	5	–	21	22,51
13.	Michaela	Urbanová	2	GFXŠaldyLI	3	3	3	5	5	–	5	–	21	22,45
14.–15.	Jana	FeldbabeLOVá	1	KGTřebíč	3	3	3	–	5	3	5	–	19	22,43
14.–15.	Anna	Košťáková	1	GMensaPH	3	3	3	5	5	–	–	–	19	22,43
16.	Vojtěch	Černý	2	GKepleraPH	–	3	–	5	5	3	5	–	21	22,41
17.	Petr	Hanák	3	SPŠTBatiZL	0	3	3	4	5	5	5	–	22	22,33
18.	Jakub	Krivošík	4	GJHroncaBA	3	–	–	5	5	5	5	–	23	22,29
19.	Tereza	Kubínová	2	GLitoměřPH	3	–	–	5	5	3	5	–	21	22,28
20.–22.	Michal	Roček	3	SPŠMasarLI	3	3	3	5	2	5	5	–	21	22,17
20.–22.	Petr	Starý	3	G Jírov ČB	3	3	3	5	5	3	5	2	21	22,17
20.–22.	Adam	Vášek	3	G Beroun	3	3	3	5	1	5	3	5	21	22,17
23.	Mikuláš	Pater	1	GKepleraPH	0	3	3	–	5	3	5	–	19	22,16
24.	Ondřej	Sedláček	4	GOPavla PH	3	3	–	5	5	5	5	–	23	22,14
25.	Radim	Aulický	4	GNadAlejPH	–	3	3	5	5	5	5	–	23	22,09
26.	Lukáš	Koucký	2	GKepleraPH	3	–	–	5	5	3	5	–	21	22,08
27.–28.	Alexander	Košťál	3	GJarošeBO	3	3	3	5	5	3	5	–	21	22,07
27.–28.	Helena	Muchová	3	GKepleraPH	–	3	–	5	5	5	5	–	23	22,07
29.	Šimon	Komara	1	G Gröss BA	3	3	–	5	–	3	5	–	19	22,00
30.	Ena	Vlková	1	GKepleraPH	3	3	3	1	5	3	4	–	18	21,88
31.	Michal	Imříšek	4	G Gröss BA	–	3	–	5	5	5	5	–	23	21,77
32.	Tomáš	Zuzík	1	G Gröss BA	3	3	–	5	–	3	5	–	19	21,70
33.	Veronika	Menšíková	3	ArcibisGPH	–	3	–	5	5	5	5	–	23	21,61
34.	Lucian	Poljak	3	GJŠkodyPŘ	–	3	3	4	5	5	5	–	22	21,59
35.	Ondřej	Vočka	4	GJNerudyPH	3	3	3	5	5	5	4	–	22	21,46
36.	Petr	Karlík	2	GVoděraPH	3	3	3	–	5	–	5	–	19	21,37
37.	Tomáš	Černý	1	G Gröss BA	3	3	–	1	–	5	5	–	17	21,30
38.	Matúš	Pokorný	3	G Gröss BA	3	3	3	5	5	–	5	–	21	21,13
39.	Oldřich	Marek	2	GPatočkyPH	3	3	3	–	5	–	4	–	18	20,84

40.	Ondřej	Nevěřil	3	G Zábřeh	3 3 3 5 5 3 5 – 21	20,79
41.	David	Hytha	4	BrooklineHS	3 3 3 5 5 3 5 1 21	20,69
42.	Svatava	Šimečková	3	GJarošeBO	3 3 – 5 5 – 5 – 21	20,65
43.–45.	Mykhailo	Degtyar	3	GJNerudyPH	3 3 3 0 5 – 5 – 19	20,63
43.–45.	Jindřich	Heissiger	3	GDoppleraPH	3 3 3 – 5 – 5 – 19	20,63
43.–45.	Filip	Říha	3	GVoděraPH	3 3 3 5 – 3 5 – 19	20,63
46.	Kateřina	Kučerová	0	GHeyrovPH	1 3 3 – – 3 5 – 15	20,57
47.	David	Hromádka	4	GNadAlejPH	3 3 3 5 5 5 5 – 23	20,11
48.	Lucia	Chladná	4	G Gröss BA	3 3 – – 5 5 5 – 21	19,52
49.	Tomáš	Pazourek	3	GJarošeBO	– – 3 5 5 3 4 – 20	19,47
50.	Richard	Dobíšek	4	GMensaPH	3 3 3 5 5 3 5 – 21	19,19
51.	Filip	Urban	4	GChodoviPH	3 3 3 5 5 3 4 – 20	19,17
52.	Erik	Ježek	3	SPŠSmíchov	– 3 3 5 5 3 5 – 21	18,95
53.	Adam	Pustka	3	GFXŠaldyLI	3 3 3 – 5 – 4 – 18	18,83
54.–55.	Markéta	Honsejková	4	GJeronýmLI	3 3 3 5 – 3 5 5 21	18,76
54.–55.	Rudolf	Krzystek	2	GNadAlejPH	3 3 – 4 0 5 1 – 16	18,76
56.–57.	Matěj	Bajgar	2	G Jírov ČB	3 3 3 – 1 – 5 – 15	18,59
56.–57.	Vít	Kubal	2	G ČKrumlov	3 3 3 – 5 0 1 1 15	18,59
58.–59.	Gabriela	Filipská	1	GJarošeBO	3 1 3 – – 0 5 1 13	18,52
58.–59.	Petra	Strážnická	1	G Tišnov	3 3 3 – 0 3 1 – 13	18,52
60.	Jiří	Preč	3	G UherBrod	3 3 3 5 0 3 5 – 19	17,86
61.	Irena	Bártová	1	GKepleraPH	3 3 3 – – – 3 – 12	17,70
62.	Martin	Šnejdar	2	GKepleraPH	3 3 3 – 5 – – – 14	17,57
63.	Tereza	Matějková	4	GVoděraPH	3 3 – 3 5 3 5 – 19	17,37
64.	Tomáš	Havlin	3	BiskG Brno	3 3 1 – 4 – 4 – 15	17,13
65.	Petr	Švorc	2	G PostupPH	3 3 3 – – – 5 – 14	17,11
66.	Anna	Trnková	4	GBudějovPH	3 3 3 5 – 3 4 – 18	17,08
67.	Johana	Štěchová	3	GHeyrovPH	3 3 3 – 5 0 1 – 15	16,89
68.	Lukáš	Lipka	1	ŠpMNDaG BA	3 3 – – – – 5 – 11	16,83
69.	Samuel	Probst	2	PORG PH	2 3 5 – 0 – – – 13	16,63
70.	Jindřich	Kaplický	3	G Čelákov	3 3 – 5 1 5 – – 17	16,51
71.–72.	Matyáš	Hazdra	0	GNadAlejPH	3 3 3 – – – – – 9	16,42
71.–72.	Samuel	Zubák	0	GTomkovaOL	3 3 3 – 0 0 – – – 9	16,42
73.	Adam	Dedek	3	GMensaPH	3 3 3 – – – 5 – 14	16,36
74.	Kateřina	Volná	4	MendelG OP	3 3 2 0 5 3 3 0 17	16,34
75.	Marek	Valkovič	4	GLesníZlín	3 3 3 5 0 – 5 – 19	16,24
76.	Lucie	Zůnová	4	GNVPlániPH	3 3 3 3 0 – 4 – 16	16,00
77.	Jakub	Klicnar	2	G Jírov ČB	3 3 3 – 3 – – – 12	15,93
78.	Patrik	Šenkýř	1	G Sokolov	3 3 – – 1 3 – – 10	15,89
79.	Gabriel	Hamrle	3	GKepleraPH	3 3 3 – – – 5 – 14	15,57
80.	Simon	Svrček	3	GJHroncaBA	3 – 3 – – 3 5 – 14	15,54
81.	Barbora	Slavíková	2	G Vlašim	3 3 3 – – – 3 – 12	15,45
82.	Michael	Jarvis	3	GŠpitálůPH	3 3 3 – – – 5 – 14	15,28
83.	Michail	Smirnov	2	GČeskoliPH	3 3 3 – – 3 – – 12	15,23
84.	Michal	Korčák	2	GJSeiferPH	3 3 – – – – 5 – 11	15,05
85.–90.	Miriam	Barešová	1	G Dobruška	3 3 3 – – – – – 9	14,89
85.–90.	David	Briet	1	GMensaPH	3 3 3 – – – – – 9	14,89
85.–90.	Daniela	Dobíšková	1	PORG PH	3 3 2 0 1 – – – 9	14,89
85.–90.	ALEXANDER	NALIMOV	1	GMensaPH	3 3 3 – – – – – 9	14,89
85.–90.	Lada	Spoustová	1	GKepleraPH	3 3 3 – – – – – 9	14,89
85.–90.	Petr	Vojtěch	1	GKepleraPH	3 3 3 – – – – – 9	14,89
91.	Anna	Haltufová	3	GKepleraPH	3 3 3 – – – 5 – 14	14,65

92.	Dominik	Rigas	4	GJHroncaBA	---	5	5	3	5	-	18	14,53
93.	Jan	Jedlička	3	CírkGPLzeň	3	3	1	5	---	12	- i	13,90
94.-95.	Matej	Kucharčík	1	ŠpMNDaG BA	-	3	---	---	5	-	8	13,81
94.-95.	Martin	Vávra	1	KGTřebíč	3	3	2	---	---	8		13,81
96.-97.	Ema	Čekalová	3	GBudějovPH	3	2	1	---	5	-	11	13,47
96.-97.	Tomáš	Olšinár	3		-	3	3	-	5	---	11	13,47
98.	Noel	Probst	0	PORG PH	3	3	---	---	---	6		13,03
99.	Natálie	Jochová	2	G MasNámTŘ	3	3	3	0	---	9		13,00
100.	Jozef	Smolár	4	GNámestovo	3	3	3	5	---	14		11,84
101.	Anna	Musialková	2	GJSeiferPH	3	2	3	---	---	8		11,81
102.	Lucie	Bélová	0	GOpátovPH	2	0	1	0	1	0	5	11,66
103.	Filip	Sichrovský	3	G ČesLípa	3	3	3	---	---	9		11,39
104.	Ella Michaela	Patrášová	1	GTajBanBys	3	3	---	---	---	6		11,38
105.	Eliška	Sysrová	2	G Ústí n O	0	3	3	-	0	1	- 7	10,72
106.	Eliška	Vimmerová	3	G Dobříš	2	3	3	-	0	---	8	9,96
107.	Rozárka	Michálková	3	G Čelákov	3	3	-	3	---	9		9,52
108.-110.	Michael	Ambros	2	GTomkovaOL	3	3	0	---	---	6		9,48
108.-110.	Kristýna	Pospišiliková	2	G Příbor	3	3	---	---	---	6		9,48
108.-110.	Markéta	Tobolová	2	GStrážnice	3	3	---	---	---	6		9,48
111.	Samuel Gregor	Kalický	3	GNadAlejPH	-	3	3	---	2	- 8		9,25
112.	Kryštof	Kadlčák	4	1ITGPH	3	3	3	---	---	9		9,00
113.	Luisa	Troupová	1	PORG PH	-	3	1	---	---	4		8,48
114.	Ludmila	Kvašná	2	GSvobHumen	-	3	-	0	- 2	- 5		8,17
115.-118.	Ondřej	Adamec	4	G Trutnov	-	3	3	---	2	- 8		8,00
115.-118.	Vojtěch	Fila	4	G Litomyšl	-	3	0	-	0	5	- 8	8,00
115.-118.	Matěj	Hladeček	3	1ITGPH	3	3	---	---	---	6		8,00
115.-118.	Vojtěch	Křížan	3	G ValMez	3	3	---	---	---	6		8,00
119.	Jana	Uglickich	3	GÚstavníPH	3	2	---	---	---	5		6,43
120.	Martin	Soles	3	SPŠMasarLI	1	3	---	---	0	- 4		5,53
121.	František	Nouza	2	GRychnovKn	-	3	---	---	---	3		5,27
122.-123.	Martin	Grünwald	3	G Blansko	-	3	---	---	---	3		4,23
122.-123.	Eva	Martikánová	3	MendelG OP	3	---	---	---	---	3		4,23
124.-125.	Anna	Lošonská	0	GOhradníPH	---	---	1	---	---	1		3,66
124.-125.	Alžběta	Reitmayerová	0	GŠpitálsPH	-	1	---	---	---	1		3,66
126.	Petr	Molhanec	4	GKepleraPH	3	---	---	---	---	3		2,94
127.	Barbora	Salajová	3	GLitoměřPH	-	2	---	0	-	2		2,88

adresa: *Matematický korespondenční seminář*
KAM MFF UK
Malostranské náměstí 25
118 00 Praha 1
web: <https://prase.cz/>
e-mail: info@prase.cz