4. série
Funkcionální rovnice

1. ÚLOHA
Najděte všechna spojitá řešení funkcionální rovnice

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}\ , \quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ,\ x,y\in\mathbb{R}\,.$$

2. ÚLOHA
Řešte funkcionální rovnici

$$f(x+y) - 2f(xy) - 3f(x) + (2x^2-1)f(y) = 2x(xy-1) - 5\ , \quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ ,\ x,y\in\mathbb{R}\,.$$

3. ÚLOHA
Najděte všechny reálné polynomy takové, že pro každé reálné x platí:

$$x\cdot P(x) = (x-15)\cdot P(x+3)\,.$$

4. ÚLOHA
Najděte všechna řešení funkcionální rovnice $f(x+y)-f(x) = y^2+2xy-2y\sqrt{f(0)}$ v oboru $\mathbb{R}$ taková, že pro každé reálné x platí nerovnost $f(x)\geq 2x-1$.

5. ÚLOHA
Řešte funkcionální rovnici:

$$(1-\sin z)\left(f(x+\pi)+f(x-\pi)-f(x+x\sin z)\right) + 2(\sin z)f(x) -$$

$$-(\sin^2 z)f(x) + f(y) - f(x+y) = 0\,, \quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,\ x,y,z\in\mathbb{R}\,.$$

Řešení 4. série

1. ÚLOHA

Označme $f(0) = a$. Pro $y = 0$ dostáváme $f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)+a}{2}$, klademe-li $x + y$ místo x, máme $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x+y)+a}{2}$, takže podle zadané rovnice po vynásobení dvojkou vyjde $f(x)+f(y) = f(x+y)+a$. Odtud po substituci $g(x) = f(x)-a$ dostaneme $g(x)+g(y) = g(x + y)$, což je Cauchyova rovnice, vyřešená v úvodu k zadání 2. série jedenáctého ročníku. Substituce zachovala spojitost (f je spojitá, právě když je g spojitá), takže všechna řešení jsou tvaru $g(x) = cx$, $c \in \mathbb{R}$, nebo-li $f(x) = cx + a$, $a, c \in \mathbb{R}$. Dosazením se přesvědčíme, že každá funkce tohoto tvaru vyhovuje zadání.

2. ÚLOHA

Dosazením $x = y = 0$ dostaneme $f(0) = 1$. Nyní položíme $y = 0$ a dostaneme $f(x) - 2f(0) - 3f(x) + (2x^2 - 1)f(0) = -2x - 5$, tedy $f(x) = x^2 + x + 1$. Dosazením se přesvědčíme, že tato funkce vyhovuje zadání.

3. ÚLOHA

Nechť je $P(x)$ řešením. Víme, že ho lze zapsat ve tvaru

$$P(x) = a(x - b_1)(x - b_2)\dots(x - b_n)\,,$$

kde $a \in \mathbb{R}$, $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{C}$. Dosazením dostaneme:

$$a(x - 0)(x - b_1)\dots(x - b_n) = a(x - 15)(x + 3 - b_1)\dots(x + 3 - b_n)\,.$$

Odtud pro $a \neq 0$:

$$(x - 0)(x - b_1)\dots(x - b_n) = (x - 15)(x + 3 - b_1)\dots(x + 3 - b_n)\,.$$

Aby byly tyto dva polynomy totožné, musí se číselné posloupnosti $0, b_1, b_2, \dots, b_n$ a $15, b_1 - 3, b_2 - 3, \dots, b_n - 3$ až na pořadí shodovat. Porovnáním součtů obou posloupností dostaneme $0 = 15 - 3n$, tedy $n = 5$. Posloupnosti pak vypadají takto: $0, b, c, d, e, f$, $15, b-3, c-3, d-3, e-3, f-3$. Nula, která je v první posloupnosti, musí být i v druhé, takže bez újmy na obecnosti je $b = 3$. Podobně postupujeme dále a dostáváme $c = 6, d = 9, e = 12, f = 15$.

Pro $a = 0$ je situace jasná, takže se snadno přesvědčíme, že jsou řešením právě všechny polynomy tvaru $P(x) = a(x - 3)(x - 6)(x - 9)(x - 12)(x - 15)$, $a \in \mathbb{R}$.

4. ÚLOHA

Označme $a = -\sqrt{f(0)}$. Pro $x = 0$ dostaneme $f(y) = y^2 + 2ay + a^2$. Zřejmě $a \leq 0$. Dosazením do zadané rovnice zjistíme, že ji skutečně splňuje každá funkce tvaru $f(x) = x^2 + 2ax + a^2$, kde $a \leq 0$. Tato funkce pak bude řešením úlohy, právě když bude pro každé $x \in \mathbb{R}$ platit $x^2 + 2ax + a^2 \geq 2x - 1$, nebo-li $x^2 + (2a-2)x + (a^2+1) \geq 0$, což zřejmě nastane, právě když nebude kladný diskriminant $(2a-2)^2 - 4(a^2+1)$, tj. když bude $a \geq 0$. Proto je jediným řešením úlohy funkce $f(x) = x^2$.

5. Úloha

Dosazením $z = \frac{\pi}{2}$ přejde rovnice na tvar $f(x+y) = f(x) + f(y),\ x \in \mathbb{R}$, hledáme však všechna řešení Cauchyovy rovnice, nikoliv jen spojitá, jak tomu bylo v úvodním textu k 2. sérii jedenáctého ročníku. Není tedy možné přejít od racionálních čísel k reálným tak jednoduše. Úlohu řešíme následovně:

Pro funkci f platí (viz. studijní text) $f(0) = 0$ a $f(-x) = -f(x)$. S použitím těchto dvou vztahů upravíme původní rovnici na tvar $(1 - \sin z)(f(x)\sin z - f(x \sin z)) = 0$, tedy pro $\sin z \neq 1$ máme $f(x)\sin z = f(x \sin z)$. Dále víme, že pro f platí: existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že pro racionální x platí $f(x) = cx$. Dále platí, že každé reálné číslo lze vyjádřit jako součin racionálního čísla y a reálného čísla $x \in (-1, 1)$. Číslo x vyjádříme jako sinus nějakého čísla u. (Tuto úvahu si dokažte.) Pak platí $f(z) = f(xy) = f(y \sin u) = f(y)\sin u = xf(y) = xcy = cz$.

Tedy aby f řešila rovnici, musí být tvaru $f(x) = cx$, $c \in \mathbb{R}$. Zkouškou si ověříte, že taková funkce vyhovuje zadání.

Je také možno nejdřív úvahou dokázat, že daná rovnice nemůže mít nespojité řešení a pak už postupovat známým způsobem. Takový postup však není o nic lehčí než postup uvedený výše.