7. série

Ještě jednou diskrétní úlohy

1. Úloha

Nechť n je přirozené číslo. Zjistěte kolik je uspořádaných n-tic $[a_1, a_2, \dots, a_n]$, $a_i \in \{0, 1\}$ takových, že pro všechna $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ je počet prvků množiny $\{i; i \le k, a_i = 0\}$ větší nebo roven počtu prvků množiny $\{i; i \le k, a_i = 1\}$.

2. Úloha

Pro která n lze šachovnici n krát n s odstranšnými políčky $(1, 1)$ a (n, n) (tj. s odstraněným levým dolním a pravým horním políčkem) vyplnit beze zbytku „dominy“ □□ tak, aby se žádná dvě nepřekrývala.

3. Úloha

Mějme tabulku 10 krát 10, v níž jsou zapsána všechna čísla od jedné do sta. Dokažte, že existují dvě sousední políčka, na nichž jsou zapsána čísla s rozdílem alespoň deset.

4. Úloha

$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots n)^2$. Dokažte.

5. Úloha

Představte si hru piškvorky na nekonečné šachovnici, přičemž za výhru se požítá pouze pět kamenů vedle sebe v řadě nebo ve sloupci (tedy nikoliv v diagonále). Najděte strategii, podle které lze hrát tak, abyste protivníkovi zabránili ve výhře.

Řešení 7. série

1. ÚLOHA

Spočtěme, kolik je takových n-tic, že splňují požadavky zadání a obsahují právě l jedniček (a pak to všechno sečteme). Pro $l > \frac{n}{2}$ není jistě žádná a stačí se tedy zabývat případem $l \leq \frac{n}{2}$. Všech n-tic, které obsahují l jedniček je $\binom{n}{l}$. Stačí tedy spočítat, kolik z nich **nesplňuje** zadání úlohy.

Nechť nějaká k-tice nesplňuje zadání úlohy. Potom existuje $k \in \{1, \ldots, n\}$ tak, že počet nul na prvních k místech je menší než počet jedniček na prvních k místech této n-tice. Vezměme nejmenší k s touto vlastností. Snadno nahlédneme, že k je liché a počet jedniček na prvních k místech je o jedničku větší než počet nul na prvních k místech.

Vyrobme $(n+1)$-tici nul a jedniček následujícím způsobem — napišme nulu před zkoumanou n-tici a na prvních $k+1$ místech v takto vzniklé $(n+1)$-tici přepišme nuly na jedničky a jedničky na nuly. Výsledná $(n+1)$-tice obsahuje l jedniček a na prvním místě má jedničku. Takovýchto $(n+1)$-tic je $\binom{n}{l-1}$. Sami dokažte, že každou takovou $(n+1)$-tici můžeme získat výše uvedeným postupem z nějaké n-tice, která obsahuje$l$ jedniček a nesplňuje zadání úlohy a že dvě různé n-tice nesplňující zadání dají těmito úpravami různé $(n+1)$-tice. Tedy všech n-tic, které obsahují l jedniček a nesplňují zadání je stejně jako všech $(n+1)$-tic, které mají na prvém místě jedničku a obsahují l jedniček. A těch je, ja už jsme konstatovali $\binom{n}{l-1}$. Tedy všech n-tic, které obsahují l jedniček a splňují zadání je $\binom{n}{l} - \binom{n}{l-1}$. Výše uvedené úvahy byly pro l větší než nula, ale je jen jedna n-tice ze samých nul a ta nám vyhovuje. Sečtením získaných počtů přes všechna $l \in \{0, 1, \ldots, [\frac{n}{2}]\}$ dostaneme kýžený výsledek : $\binom{n}{[\frac{n}{2}]}$. (Zde $[a]$ značí celou část čísla a.)

2. ÚLOHA

Předpokládejme, že šachovnice má obvyklým způsobem obarvena políčka černou a bílou barvou. Šachovnice s odstraněnými políčky má pak různý počet černých a bílých políček. Vzhledem k tomu, že dominem zaplníme vždy jedno černé a jedno bílé políčko, nepodaří se nám nikdy vyplnit šachovnici požadovaným způsobem. Výše uvedené úvahy jsou správné, pokud $n \geq 2$. Rozmyslete si případ $n = 1$.

3. ÚLOHA

Řešení je poměrně zdlouhavé, jen jej naznačíme. (Proveďte důkladně všechny kroky!) Pole tabulky s čísly 1–50 obarvíme černě, ostatní bíle. Dokážeme, že alespoň jedna z barev má vlastnost, že existuje alespoň deset polí této barvy, které sousedí s políčky opačné barvy. (Tím bude důkaz hotov — stačí si vzít nejmenší (to v případě černých polí, jinak největší) z těch deseti čísel, která sousedí s políčky opačné barvy. Toto je jistě nejvýše rovno 41 (resp. nejméně 60) a sousedí s některým z čísel větším než 50 (resp. menším než 51)). Jsou-li v každém sloupci nebo v každém řádku pole obou barev, tvrzení jistě platí. Obdobně tvrzení zřejmě platí, existuje-li jen jeden stejnobarevný sloupec nebo jen jeden stejnobarevný řádek. Zbývá případ, kdy existují alespoň dva řádky a alespoň dva sloupce, obsahující pole jedné barvy (bez újmy na obecnosti (dále jen BÚNO) černé). Protože $\sqrt{50} > 7$, nemohou existovat současně tři černé řádky a tři černé sloupce. BÚNO předpokládejme, že existují právě dva černé sloupce a alespoň dva černé řádky. Pokud se nejedná o první a druhý sloupec nebo o devátý a desátý sloupec je případ opět jasný. BÚNO předpokládejme, že jde o první a druhý sloupec. Dále můžeme předpokládat, že pro k-tý sloupec ($k \in \{3, \ldots, 10\}$) existuje $n_k \in \{1, \ldots, 9\}$ tak, že pole $1, \ldots, n_k$ daného sloupce jsou bílá, zatímco pole $n_k + 1, \ldots, 10$ jsou černá (jinak je případ jasný). Ovšem aby tento případ nebyl již zřejmý, muselo by platit $n_3 = 1$, $n_4 \leq 2, \ldots, n_k \leq k - 2$, což je již ve sporu s počtem bílých polí.

4. ÚLOHA

Nejprve indukcí dokážeme (známý) vzorec $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Pro $n = 1$ jistě platí, platí-li pro n, platí také pro $n + 1$, neboť $1 + 2 + \cdots + n + n + 1 =$ dle indukčního předpokladu $= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$.

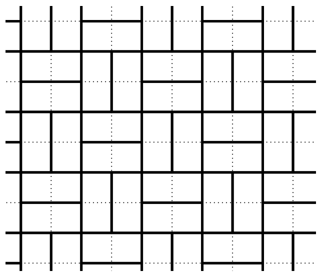
A nyní opět indukcí dokážeme požadovanou rovnost. Opět snadno nahlédneme, že vzorec platí, pokud $n = 1$. Platí-li pro nějaké n, ukážeme, že platí i pro $n + 1$.

$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 =$ opět využijeme indukční předpoklad $= (1 + 2 + \cdots + n)^2 + (n+1)^3 = (1+2+\cdots+n)^2 + (n+1)(n+1)(n+1) = (1+2+\cdots+n)^2 + (n+1)(n(n+1) + (n+1)) = (1+2+\cdots+n)^2 + 2\frac{n(n+1)}{2}(n+1) + (n+1)^2 = ((1+2+\cdots+n) + (n+1))^2$.

(Poslední úprava není nic jiného než použití známého vzorce $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ pro $a = (1 + 2 + \cdots + n)$ a $b = (n+1)$.)

5. ÚLOHA

Řešení je prostinké, což ovšem neznamená, že na něj lze snadno přijít. Rozdělme šachovnici na parkety (obdélníky skládající se ze dvou čtverečků) podle následujícího obrázku.



Rozdělíme tedy nejprve šachovnici na čtverce 2 krát 2 a potom ještě rozdělíme každý z těchto čtverců na parkety střídavě vodorovnou nebo svislou čarou.

a) Zahajuje soupeř. Svůj kámen položím vždy do té parkety, do které položil soupeř svůj poslední kámen.

b) Zahajuji já. Svůj první kámen položím libovolně. Ukážu, že vždy můžu hrát tak, aby po soupeřově tahu vždy nastala jedna z následujících situací:

1) parkety buď neobsahují žádný kámen nebo obsahují jeden můj a jeden soupeřův kámen.

2) jedna parketa obsahuje jen můj kámen, jedna parketa obsahuje jen soupeřův kámen a ostatní parkety jsou buď prázdné nebo obsahují jeden můj a jeden soupeřův kámen.

Toto dokážu indukcí — po prvním soupeřově tahu nastala buď situace 1) (to když soupeř položí svůj kámen do té parkety, do které jsem položil já svůj první kámen) nebo situace 2) (nastene ve zbylých případech). Indukční krok — je-li po soupeřově n-tém tahu na šachovnici situace 1), položím svůj kámen do libovolné prázdné parkety. Soupeř pak svůj kámen položí buď do stejné parkety, čímž nastane situace 1) nebo jinam, čímž nastane situace 2). Je-li po soupeřově tahu na šachovnici situace 2), položím svůj kámen do parkety, která obsahuje jen jeden soupeřův kámen. Už si sami rozmyslete, že jakýkoli soupeřův tah vede opět k situaci 1) nebo 2).

Ukázali jsme, že nikdy nenastane situace, že by některá parketa obsahovala dva soupeřovy kameny. Vzhledem k tomu, že každá pětice políček v řadě (resp. ve sloupci) vedle sebe (resp. nad sebou) obsahuje jednu parketu, je zřejmé, že nikdy neprohrajeme.