6. série

Trojúhelníky a kružnice

1. ÚLOHA

V rovině jsou dány tři kružnice $k = (r_k, S_k)$, $l = (r_l, S_l)$, $m = (r_m, S_m)$, z nichž žádné dvě nemají společný bod. Určete geometrické místo těžišť všech takových trojúhelníků KLM, že $K \in k$, $L \in l$, $M \in m$.

2. ÚLOHA

V rovině jsou dány navzájem různé polopřímky $\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}, \dots, \overrightarrow{AB_n}$; $B_0 = B_n$; $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ je $|\sphericalangle B_{i-1}AB_i| \in (0, 180^\circ)$. Zvolme $C_0 \in \overrightarrow{AB_0} \setminus \{A\}$ a sestrojme kružnici k_1, která se dotýká polopřímek $\overrightarrow{AB_0}, \overrightarrow{AB_1}$, obsahující C_0. $k_1 \cap \overrightarrow{AB_1}$ označme C_1 atd., k_i se dotýká $\overrightarrow{AB_{i-1}}$ v bodě C_{i-1} a $\overrightarrow{AB_i}$ v bodě C_i. Zjistěte, kdy bude $C_0 = C_n$.

3. ÚLOHA

Trojúhelník ABC obsahuje tři kružnice k_A, k_B, k_C tak, že každé dvě se dotýkají a každá se dotýká obou stran vycházejících z příslušného úhlu. Dokažte, že do každého trojúhelníka lze takto umístit tři kružnice právě jedním způsobem.

4. ÚLOHA

Mějme trojúhelník ABC o stranách a, b, c. Sestrojme trojúhelník $A'B'C'$ tímto způsobem: nechť k je kružnice vepsaná trojúhelníku ABC, k_1 (resp. k_2, resp. k_3) je kružnice dotýkající se kružnice k a přímek a, b (resp. b, c, resp. c, a), p_1 (resp. p_2, resp. p_3) je společná tečna kružnic k a k_1 (resp. k_2, resp. k_3) procházející jejich společným bodem, pak bod A' (resp. B', resp. C') leží v průsečíku přímek p_1 a p_2 (resp. p_2 a p_3, resp. p_3 a p_1). Určete všechny trojúhelníky ABC, pro něž je takto sestrojený trojúhelník $A'B'C'$ shodný s trojúhelníkem ABC.

5. ÚLOHA

Mějme trojúhelník ABC a body P, Q, R takové, že P leží uvnitř úsečky AB, Q leží uvnitř úsečky BC a R leží uvnitř úsečky CA. Zjistěte všechny polohy bodů P, Q, R, pro které se kružnice opsané trojúhelníkům ARP, BPQ a CQR protínají v jednom bodě.

Řešení 6. série

1. ÚLOHA

Nejprve pomocné tvrzení — mějme dva trojúhelníky ABC a ABC'. Pro jejich těžiště T a T' platí: $TT' \parallel CC'$ a $|TT'| = \frac{1}{3}|CC'|$.

Důkaz: Označme si S střed úsečky AB. Potom jsou trojúhelníky $TT'S$ a $CC'S$ podobné (stejnolehlost se středem S); z tohoto faktu již snadno plyne naše tvrzení.

Označme si T_0 těžiště trojúhelníka $S_kS_lS_m$, T_1 těžiště trojúhelníka KS_lS_m, T_2 těžiště trojúhelníka KLS_m, T_3 těžiště trojúhelníka KLM. Dle pomocného tvrzení $T_3 = T_2 + \frac{1}{3}\overrightarrow{S_mM} = T_1 + \frac{1}{3}(\overrightarrow{S_mM} + \overrightarrow{S_lL}) = T_0 + \frac{1}{3}(\overrightarrow{S_mM} + \overrightarrow{S_lL} + \overrightarrow{S_kK})$. Odtud je již vidět, že množina všech T_3 (tedy hledaná množina) je mezikruží se středem T_0, vnějším poloměrem $\frac{1}{3}r_k + r_l + r_m$ a vnitřním poloměrem rovným největšímu z čísel 0, $\frac{1}{3}(r_m - r_l - r_k)$, $\frac{1}{3}(r_l - r_m - r_k)$, $\frac{1}{3}(r_k - r_l - r_m)$.

2. ÚLOHA

Označme si S_i střed kružnice $k_i (i = 1, 2, \dots, n)$. Pak pro všechna $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ platí: $|C_iS_{i+1}| = |C_{i+1}S_{i+1}|$, úhly $\sphericalangle S_{i+1}C_iA$ a $\sphericalangle S_{i+1}C_{i+1}A$ jsou pravé a tedy trojúhelníky AC_iS_{i+1} a $AC_{i+1}S_{i+1}$ jsou shodné. Z toho plyne, že $|AC_i| = |AC_{i+1}|$. Tato rovnost platí pro všechna $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ a tedy platí jak $|AC_0| = |AC_1| = |AC_2| = \dots = |AC_n|$, tak také $C_0 = C_n$.

3. ÚLOHA

a) Ukážeme, že existuje nejvýše jedno řešení. Nechť existují dvě různá řešení k_A, k_B, k_C a k'_A, k'_B, k'_C. Potom musí existovat $i \in \{A, B, C\}$ tak, že $r_i \neq r'_i$ (kde r_i (resp. r'_i) je poloměr kružnice k_i (resp. k'_i)). Nechť $i = A$ (ostatní případy se řeší analogicky). Kdyby $r_A > r'_A$, muselo by být $r'_B > r_B$ a $r'_C > r_C$, pak se ale k'_B a k'_C protínají. Kdyby $r_A < r'_A$, muselo by platit $r_B > r'_B$ a $r_C > r'_C$, pak se ovšem k'_B a k'_C nedotýkají. Dostali jsme spor a tedy existuje nejvýše jedno řešení.

b) Ukážeme, že existuje alespoň jedno řešení. Označme r poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Potom pro všechna $r_A \in (0, r)$ existuje kružnice k_A o poloměru r_A, která se dotýká stran b a c. Dále existuje kružnice k_B (resp. k_C), která se dotýká k_A a ramen úhlu β (resp. γ). Takových kružnic k_B existuje více, uvažme tu, která má nejmenší poloměr (obdobně pro k_C). Takto sestrojené kružnice nemusí řešit úlohu, pokud je r_A malé, kružnice k_B a k_C se protínají, pokud se r_A málo liší od r jsou k_B a k_C disjunktní. Nechme nyní probíhat r_A celý interval $(0, r)$. Vzhledem ke spojitosti tohoto děje existuje $r_A \in (0, r)$ tak, že k_A, k_B a k_C se dotýkají navzájem a řeší naši úlohu.

Poznámka: Přesný důkaz existence řešení by byl poněkud obtížnější a vyžadoval by znalost hlubších pojmů, proto jej jen naznačíme — položme $M_j = \{r_A \in (0, r); k_B \cap k_C \text{ má } j \text{ prvků}\}$, dále položme $r_A = \sup M_2$, ukážeme, že $r_A = \inf M_0$ a že $M_2 = (0, r_A)$, $M_0 = (r_A, r)$ a tedy $M_1 = r_A$.

4. ÚLOHA

Úloha není korektně zadána, neboť popsaná konstrukce kružnic k_1, k_2, k_3 není jednoznačná. Tato nejednoznačnost umožňovala brát jako přímky p_1, p_2, p_3 také přímky a, b, c nebo b, c, a. Snadno nahlédnete, že v těchto případech je řešení úlohy velmi snadné.

Zadání mělo znít … k_1 (resp. k_2, resp. k_3) je kružnice dotýkající se kružnice k a **úseček** a, b … .

Budeme postupovat ve dvou krocích. 1) Je-li trojúhelník ABC rovnostranný, pak i $A'B'C'$ je rovnostranný, z konstrukce vyplývá, že k je kružnicí vepsanou trojúhelníkům ABC a $A'B'C'$, tedy trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou shodné. 2) Nechť trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou shodné. Proveďme konstrukci na trojúhelník $A'B'C'$. Postupně dostáváme $k'(=k)$, k'_1, k'_2, k'_3, p'_1, p'_2, p'_3, $A''B''C''$. Pak také trojúhelníky $A'B'C'$ a $A''B''C''$ jsou shodné a tedy i trojúhelníky ABC a $A''B''C''$ jsou shodné. Označme si postupně S, S_1, S_2, S_3, S'_1, S'_2, S'_3 středy kružnic k, k_1, k_2, k_3, k'_1, k'_2, k'_3. Trojice bodů A, S_2, S leží na jedné přímce, totéž platí pro trojice B, S_3, S; C, S_1, S; A', S'_2, S; B', S'_3, Sů C, S'_1, S. Položme $D_2 = AS \cap p_2$, $D'_2 = A'S \cap b$. Potom jsou trojúhelníky ASD'_2 a $A'SD_2$ shodné ($|AS| = |A'S|$, $|\sphericalangle ASD'_2| = |\sphericalangle A'SD_2|$, $|\sphericalangle SAD'_2| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BAC| = \frac{1}{2}|\sphericalangle B'A'C'| = |\sphericalangle SA'D_2|$), tudíž $|\sphericalangle SD'_2A| = |\sphericalangle SD_2A'| = 90^\circ$. Tedy přímky $A'S$ a $AD'_2 = b$ jsou na sebe kolmé a $D'_2 \in k$, z toho už vyplývá, že b je společná tečna kružnic k a k_2, tedy $b = p'_2$. Analogicky ukážeme, že $c = p'_3$ a $a = p'_1$. Potom $A'' = p'_1 \cap p'_2 = a \cap b = C$, $B'' = p'_2 \cap p'_3 = b \cap c = A$, $C'' = p'_3 \cap p'_1 = c \cap a = B$ a tedy $A'' = C$, $B'' = A$ a $C'' = B$, tedy $\triangle ABC \simeq \triangle A''B''C''$, a tak $|AB| = |A''B''| = |CA| = |C''A''| = |BC|$ a trojúhelník ABC musí být rovnostranný. Z 1) a 2) plyne, že řešením musí být právě všechny rovnostranné trojúhelníky.

5. ÚLOHA

Označme si k_A kružnici opsanou trojúhelníku APR, k_B kružnici opsanou trojúhelníku BQP, k_C kružnici opsanou trojúhelníku CRQ a S takový bod, že $\{P, S\} = k_A \cap k_B$.

a) Nechť bod S leží uvnitř trojúhelníka ABC. Potom $|\sphericalangle RSQ| = 360^\circ - |\sphericalangle QSP| - |\sphericalangle RSP| = 360^\circ - (180^\circ - \beta) - (180^\circ - \alpha) = \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$. Tedy čtyřúhelník $CRSQ$ je tětivový.

b) Nechť bod S leží vně trojúhelníka ABC. Potom $|\sphericalangle RSQ| = |\sphericalangle RSP| + |\sphericalangle PSQ| = |\sphericalangle RAP| + |\sphericalangle PBQ| = \alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$ a i v tomto případě je $CRSQ$ tětivový čtyřúhelník.

c) Nechť bod S leží na úsečce AB. Potom $S = P$. Označme si S_A střed kružnice k_A, S_B střed kružnice k_B. Trojúhelníky AS_AP a BS_BP jsou zřejmě rovnoramenné, vzhledem k tomu, že k_A a k_B se dotýkají, je $|\sphericalangle APS_A| = |\sphericalangle BPS_B|$ a také $|\sphericalangle AS_AP| = |\sphericalangle BS_BP|$. Rozlišme dále tři polohy bodu S_A.

c1) S_A leží vně trojúhelníka ABC. Potom S_B leží uvnitř a $|\sphericalangle AS_AP| = 2(180^\circ - |\sphericalangle ARP|)$, $|\sphericalangle BS_BP| = 2(180^\circ - |\sphericalangle PQB|)$ a tedy $180^\circ = |\sphericalangle ARP| + |\sphericalangle PQB|$, což značí, že čtyřúhelník $CRSQ$ je tětivový.

c2) S_A leží uvnitř trojúhelníka ABC. Potom S_B leží vně. Zcela obdobně jako v c1) (jen zaměníme roli R a Q a A a B) a ukážeme, že čtyřúhelník $CRSQ$ je tětivový.

c3) S_A leží na přímce AB. Potom S_B leží na této přímce a $|\sphericalangle ARP| = |\sphericalangle PQB| = 90^\circ$ a tedy i v tomto případě je čtyřúhelník $CRSQ$ tětivový.

Víme nyní, že čtyřúhelník $CRSQ$ je vždy tětivový. Jemu opsaná kružnice splývá s kružnicí opsanou trojúhelníku CRQ, tedy k_C je kružnice opsaná čtyřúhelníku $CRSQ$. Z toho plyne, že $S \in k_C$ a tedy $k_A \cap k_B \cap k_C \neq \emptyset$, což jsme chtěli ukázat.