3. série

Celá čísla, dělitelnost

1. ÚLOHA
Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n číslo $\binom{2n}{n}$ dělí nejmenší společný násobek čísel $1, 2, \ldots, 2n$.

2. ÚLOHA
Číslo n dostaneme tak, že zapíšeme čísla od jedné do 99 za sebou, tedy

$$n = 123456789101112\ldots979899.$$

Zjistěte, zda je číslo n dělitelné 11.

3. ÚLOHA
Najděte všechna celočíselná řešení rovnice $a^6 + b^4 + c^2 = 1234567$.

4. ÚLOHA
Označme $f(x, y, z) = xyz(x^2y^4z^6 - x^2z^6 - x^2y^4 - y^4z^6 + x^2 + y^4 + z^6 - 1)$. Najděte nejmenší přirozené číslo n takové, aby existovala uspořádaná trojice (x, y, z) celých čísel, pro níž by platilo, že n nedělí $f(x, y, z)$.

5. ÚLOHA
Zjistěte, zda číslo $9^{9^9} + 6$ je dělitelné číslem 11.

Řešení 3. série

4. Úloha

$f(x,y,z) = (x^3 - x)(y^5 - y)(z^7 - z) = x(x-1)(x-2)y(y-1)(y+1)(y^2+1)z(z-1)(z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)$. Tedy zřejmě $f(x,y,z)$ je vždy dělitelné čísly $1,2,4,8$. S použitím malé Fermatovy věty pak i čísly $3,5,7$ a protože $(y^5 - y) = (y^3 - y)(y^2+1)$ také číslem 9. Vidíme, že $f(x,y,z)$ je dělitelné čísly $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$. Ale např. pro $(x,y,z) = (2,2,2)$ dostáváme $f(x,y,z) = 22680$, což není dělitelné jedenácti. Hledané číslo n je tedy 11.

5. Úloha

$9^9 \equiv (-1)^9 \equiv -1 \pmod{10} \quad 9^9 \equiv 9 \pmod{10}$. Můžeme tedy psát: $9^{9^9} = 9^9 \cdot 9^{10k}$, kde k je vhodné přirozené číslo. Dále $9^{10} \equiv (-2)^{10} \equiv 1 \mod 11$. Tudíž $9^{9^9} \equiv 9^9 \mod 11, 9^9 \equiv (-2)^9 \equiv 5 \mod 11$. Platí tedy $9^{9^9} \equiv 5 \mod 11, 9^{9^9} + 6 \equiv 0 \mod 11$. $9^{9^9} + 6$ je tedy dělitelné číslem 11.