# 1. série
## Funkce a nerovnosti

1. ÚLOHA
Buď $f_n(x) = (\frac{x}{n^2})^n$. Dokažte, že ke každému kladnému reálnému číslu $x$ existuje přirozené číslo $n$ tak, že pro všechna přirozená čísla $k$ od $n$ počínaje platí:

$$f_{k+1}(x) < f_k(x).$$

2. ÚLOHA
Buď $n$ přirozené číslo. Dokažte, že existuje $r > 0$ tak, že pro všechna kladná $x$ menší než $r$ platí

$$(1+x)^{2n-1} < (2n-1)x(1+x)^n.$$

3. ÚLOHA
Dokažte, že nerovnost

$$2\sin\sqrt{n+1}\sin\sqrt{n-1} + 1 < 2\cos\sqrt{n+1}\cos\sqrt{n-1}$$

má nekonečně mnoho řešení mezi přirozenými čísly.

4. ÚLOHA
Najděte aspoň jednu reálnou funkci, která pro všechna kladná $x$ splňuje nerovnosti

$$0 < f(x) < 1,$$

$$(1 - f(x))(1 + 3f(x) + 5f(2x) + \cdots + (2n+1)f(nx)) < 1 \quad n \in \mathbb{N}$$

5. ÚLOHA
V závislosti na parametru $p$ najděte všechna řešení rovnice

$$\sqrt[5]{p+x} + \sqrt[5]{p-x} = \sqrt[5]{p+1} + \sqrt[5]{p-1}.$$

Proveďte diskusi.

# Řešení 1. série

Podle došlých řešení by se zdálo, že jsme vás zkoušeli, kdo umí lépe derivovat. Pravý opak je pravdou. Úlohy lze řešit elementárně a elementární řešení, i když je delší, pokládáme za hodnotnější.

1. Úloha

Úloze vyhovuje např. $n > 2(1 + x + x^2)$. Vskutku: Nechť $k \geq n$. Porovnávané výrazy si upravíme podle binomické věty a odhadneme jednotlivé členy nebo skupiny členů. Samozřejmě $1 = 1$. Dále

$$\binom{k+1}{1}\frac{x}{(k+1)^2} = \frac{x}{k} - \frac{x}{k(k+1)} = \binom{k}{1}\frac{x}{k^2} - \frac{x}{k(k+1)}.$$

Rutinním výpočtem ověříme, že pro $k \geq 2$

$$\binom{k+1}{2}\frac{x^2}{(k+1)^4} \leq \binom{k}{2}\frac{x^2}{k^4}.$$

Nechť $j \geq 3$. Potom z nerovnosti $k > 2x$ dostáváme

$$\binom{k+1}{j}\frac{x^j}{(k+1)^{2+j}} \leq \frac{x^j}{(k+1)^j} \leq x^3(k+1)^{-3}2^{3-j}.$$

Vzhledem k nerovnosti $k > 2x^2$ můžeme pokračovat v odhadu

$$\cdots \leq \frac{x}{k(k+1)}2^{2-j}.$$

Sečtením těchto nerovností dostáváme

$$\sum_{j=0}^{k+1}\binom{k+1}{j} \leq 1 + \binom{k}{1}\frac{x}{k^2} + \binom{k}{2}\frac{x^2}{k^4}, \tag{1}$$

neboť

$$\frac{x}{k(k+1)}(-1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + \dots) = 0.$$

Výraz na pravé straně nerovnosti (1) jsou první tři členy rozvoje $(1 + xk^{-2})^k$ pomocí binomické věty. Vzhledem k tomu, že ostatní členy jsou nezáporné, dokázali jsme požadovanou nerovnost.

2. ÚLOHA
Nejprve provedeme s nerovností něktreré ekvivalentní úpravy. Jedničku si převedeme na levou stranu nerovnosti, kdež použijeme vzoreček pro rozdíl $k$-tých mocnin $k = 2n - 1$. Dostaneme

$$x(1 + (1 + x) + (1 + x)^2 + \cdots + (1 + x)^{2n-2}) < (2n - 1))x(1 + x)^n.$$

Když ještě obě strany podělíme výrazem $x(1 + x)^{n-1}$ vidíme, že stačí ukázat nerovnost

$$(1 + x)^{1-n} + (1 + x)^{2-n} + \cdots + (1 + x)^n - 1 < (2n - 1)(1 + x). \tag{2}$$

Buď kupř. $r = n^{-2}2^{-2n}$. Uvažujme kladné $x$ menší než $r$. Potom ze vzorce pro rozdíl $k$-tých mocnin snadno dostaneme

$$(1 + x)^{k+1} - 1 < kx(1 + x)^{n-1} \leq n(1 + r)^{n-1}x < n2^{n-1}x \leq xr^{-\frac{1}{2}}, (k = 1, \ldots, n).$$

Pro $k = 1, 2, \ldots, n$ tedy máme

$$(1 + x)^{-k} + (1 + x)^k = 2 + ((x + 1)^k - 1)^2(x + 1)^-k < 2 + x^2r^{-1} < 2 + x.$$

Sečteme-li tyto nerovnosti přes $k = 1, \ldots, n-1$ a ještě na každé straně přidáme jedničku, máme

$$(1 + x)^{1-n} + (1 + x)^{2-n} + \cdots + (1 + x)^{n-1} < 1 + (n - 1)x < (2n - 1)(1 + x).$$

3. ÚLOHA
Nerovnost si snadno převedeme na tvar

$$\cos\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}\right) > \frac{1}{2}.$$

Nechť $k$ je přirozené číslo. Buď $n(k)$ nejmenší přirozené číslo větší než $k^2\pi^2$. Dále budeme značit $n = n(k)$, dokud $k$ bude v našich úvahách pevné. Zřejmě

$$\sqrt{n-1} \leq k\pi \leq \sqrt{n+1},$$

takže

$$\left|\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} - 2k\pi\right| \leq \sqrt{n+1} - \sqrt{n+1} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} < \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Máme

$$\left|1 - \cos(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})\right| = \left|\cos 2k\pi - \cos(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})\right| =$$
$$= 2\left|\sin\frac{1}{2}(2k\pi - \sqrt{(n+1)} - \sqrt{(n-1)}\right| \cdot \left|\cos\frac{1}{2}(2k\pi + \sqrt{(n+1)} + \sqrt{(n-1)}\right| \leq$$
$$\leq 2\sin\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sin\frac{1}{k\pi}\,.$$

Pokud $k > \frac{24}{\pi^2}$ (a takových $k$ je nekonečně mnoho), potom $n(k)$ splňuje požadovanou nerovnost. Jelikož různým $k$ odpovídají různá $n(k)$, je důkaz hotov.

4. Úloha

Marně jste pátrali po smyslu tohoto příkladu. Proto ani nemohlo být jasné, zda je míněna nekonečná soustava nerovnic (v tom případě žádná funkce nesplňuje, neboť z nerovnosti $(1 - f(x))(1 + 3f(x)) < 1$ plyne $f > \frac{2}{3}$, potom ale $(1 - f(x))(\cdots + (2n+1)f(nx)) > (1 - f(x))(2n+1)\frac{2}{3}$, což mi pro velká $n$ přeleze 1, nebo „v závislosti na parametru $n$ řešte …“ (potom najdeme dokonce řešení ve tvaru konstanty). Autor se omlouvá za tuto dvojsmyslnost a speciální prémií vyrovnává bodové ohodnocení tak, aby řešitelé nebyli poškozeni nevhodným zadáním. Z toho vidíte, že se vyplatí zaslat řešení podivných úloh. Jak tedy úloha měla znít správně? Najděte aspoň jednu reálnou funkci $f$, která pro všechna kladná $x$ splňuje nerovnosti $0 < f(x) < 1$,

$$(1 - f(x))(1 + f(x) + 3f(2x) + 5f(3x) + \cdots + (2n-1)f(nx)) < 1 \quad \forall \in \mathbb{N}$$

(teď už je to snad dobře). Řešením může být např. funkce $q^{-x^2}$ pro pevné $q > 1$. Označme si $f = f(x)$. Potom $f(jx) = q^{-j^2x^2} = f^{j^2}$. Máme

$$\begin{aligned}(1 - f(x))(1 + f(x) + 3f(2x) + 5f(3x) + \dots) &= \\ = (1-f)(1 + f + f^4 + f^4 + f^4 + f^9 + f^9 + f^9 + f^9 + f^9 + \dots) &< \\ < (1-f)(1 + f + f^2 + f^3 + f^4 + f^5 + f^6 + f^7 + f^8 + f^9 + \dots) &\le 1\,.\end{aligned}$$

5. Úloha

Pro $p = 0$ řeší rovnici každé reálné $x$. Buď $p$ kladné (tím skončíme, neboť případ záporného $p$ by se vyšetřil zcela analogicky). Vyjdeme z elementární nerovnosti $(1+z)^n \ge 1 + nz, \forall z > -1$, (důkaz indukcí). Po dosazení $n = 5$, $z = \frac{y}{5}$ a odmocnění dostáváme

$$\sqrt[5]{1+y} \le 1 + \frac{y}{5}, \quad (y > -5)\,.$$

Nyní dokážeme, že pro každá dvě čísla $x, t$; $x \ge 0$, $t > 0$, platí

$$\sqrt[5]{p+x+t} - \sqrt[5]{p+x} < \sqrt[5]{p-x} - \sqrt[5]{p-x-t}. \tag{3}$$

Důkaz rozdělíme do několika kroků. V prvním kroku buď $x + t \le p$. Potom

$$\begin{aligned}&\sqrt[5]{p+x+t} - \sqrt[5]{p+x} + \sqrt[5]{p-x-t} - \sqrt[5]{p-x} = \\ &\quad = \sqrt[5]{p+x}\left(\sqrt[5]{1 + \frac{t}{p+x}} - 1\right) + \sqrt[5]{p-x}\left(\sqrt[5]{1 - \frac{t}{p+x}} - 1\right) \le \\ &\quad\quad \le \frac{t}{5}(p+x)^{-\frac{4}{5}} - \frac{t}{5}(p-x)^{-\frac{4}{5}} < 0\,.\end{aligned}$$

V druhém kroku buď $t \le p \le x$. Potom

$$
\begin{aligned}
&\sqrt[5]{p+x+t} - \sqrt[5]{p+x} + \sqrt[5]{x-p} - \sqrt[5]{x-p+t} = \\
&\qquad = \sqrt[5]{p+x}\left(\sqrt[5]{1+\frac{t}{p+x}} - 1\right) + \sqrt[5]{x-p+t}\left(\sqrt[5]{1-\frac{t}{x-p+t}} - 1\right) \le \\
&\qquad\qquad \le \frac{t}{5}(p+x)^{-\frac{4}{5}} - \frac{t}{5}(x-p+t)^{-\frac{4}{5}} < 0\,.
\end{aligned}
$$

V dalších krocích označme $F(x,t) = \sqrt[5]{p+x+t} + \sqrt[5]{p-x-t}$. Ve třetím kroku buď $x \ge p$. Najdeme $k \in \mathbb{N}$ tak, aby $\frac{t}{k} \le p$. Označme $s = \frac{t}{k}$. Podle druhého kroku dostáváme

$$
\begin{aligned}
F(x,t) &= F(x,ks) = F(x+(k-1)s, s) < F(x+(k-1)s, 0) = \\
&= F(x+(k-2)s, s) < \cdots < F(x,0)\,.
\end{aligned}
$$

V čtvrtém kroku buď $x < p \le x+t$. Potom podle prvního a třetího kroku je $F(x,t) = F(p, x+t-p) \le F(p,0) = F(x, p-x) < F(x,0)$. Tím je nerovnost (3) dokázána. Z ní lehko vidíme, že daná rovnice má řešení pouze $x = 1, x = -1$.