5. série
Diskrétní úlohy

1. ÚLOHA
Mějme v každém ze tří různých košíků několik jablek. Můžeme provést následující operaci: vyndat ze dvou košíků po jednom jablku, jedno z nich sníst a druhé dát do zbývajícího košíku. Předpokládejme, že po několika takovýchto operacích zbylo jedno jablko, a to v prvním košíku. Dokažte, že pokud na výchozí rozložení aplikujeme v libovolném pořadí povolené operace dokud můžeme, zbydou jablka pouze v prvním košíku.

2. ÚLOHA
Na soustředění matematického semináře bylo pozváno $(k-1)l+1$ účastníků. Dokažte, že se mezi nimi najde buď k, kteří se navzájem neznají, nebo jeden, který zná alespoň l ostatních. Platí to i pro $(k-1)l$ účastníků?

3. ÚLOHA
Na kružnici je 12 bodů. Na 4 sousedních bodech stojí po řadě červená, modrá, zelená a žlutá figurka. Jedním tahem lze libovolnou figurkou přeskočit z bodu, na kterém stojí, přes čtyři body na pátý, pokud je neobsazený (v libovolném směru). Určete všechna pořadí, v jakých se mohou figurky po konečném počtu tahů ocitnout na původních polích.

4. ÚLOHA
Čísla $1, 2, \ldots .1987$ jsou zapsána za sebou. Je dovoleno vybrat libovolná čtyři čísla a přemístit je v opačném pořadí na stejných místech, (např. $4 \to 186, 12 \to 91, 91 \to 12, 186 \to 4$). Můžeme takto dosáhnout pořadí $1987, \ldots, 2, 1$?

5. ÚLOHA
V tabulce 4×4 jsou zapsána celá čísla. Je dovoleno vybrat libovolný čtverec 3×3 nebo 2×2 a zvětšit v něm všechna čísla o 1. Je vždy možné postupným prováděním těchto operací dostat tabulku, v níž jsou všechna čísla dělitelná třemi?

Řešení 5. série

1. ÚLOHA

Libovolnému rozdělení jablek v košících přiřaďme uspořádanou trojici (p_1, p_2, p_3), kde $p \in \{\mathit{sud}á, \mathit{lich}á\}$ jsou parity počtu jablek v prvním, druhém a třetím košíku. Všimněme si, že naše operace provádí změnu všech parit. Jestliže jsme tedy z výchozí pozice došli k rozdělení $(1, 0, 0)$ tj. k paritám $(\mathit{lich}á, \mathit{sud}á, \mathit{sud}á)$, byly nutně parity ve výchozí pozici $(\mathit{lich}á, \mathit{sud}á, \mathit{sud}á)$ nebo $(\mathit{sud}á, \mathit{lich}á, \mathit{lich}á)$ a prováděním povolených operací již žádnou jinou trojici parit kromě těchto dvou nemůžeme získat. Nyní již sami nahlédnete, proč nám nakonec nutně zbudou jablka pouze v prvním košíku.

Poznámka: Omlouváme se všem, kterým nesprávná interpretace slovního spojení „dokud můžeme“ způsobila žaludeční potíže.

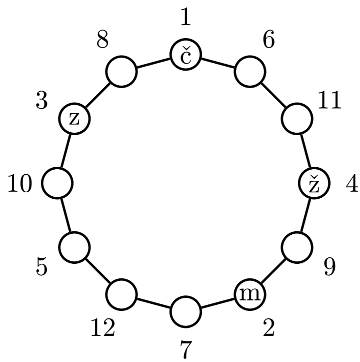
2. ÚLOHA

Tvrzení dokážeme matematickou indukcí podle k. 1) Nechť $k = 1$, potom tvrzení platí triviálně. 2) Mějme dáno $k > 1$. Vyberme jednoho účastníka, řekněme, že se jmenuje Jakub. Kdyby t — počet Jakubových známých na soustředění byl alespoň l, jsme hotovi, nechť tedy $t \le l - 1$. Ode všech účastníku soustředění si odmysleme Jakuba, jeho známe a ještě nějakých $l - 1 - t$ účastníků. Zbude nám $(k-2)l + 1$ účastníků, z nichž se žádný nezná s Jakubem. Podle indukčního předpokladu mezi nimi buď existuje jeden, který zná alespoň l ostatních, nebo $k - 1$ takových, kteří se navzájem neznají, k nim však můžeme přidat Jakuba. Tím je důkaz indukčního kroku hotov.

3. ÚLOHA

Očíslujme body na kružnici po řadě čísly $1, 2, \ldots, 12$. Nakresleme graf, v němž spojíme čísla i a j, pokud je možno figurkou přeskočit z bodu s číslem i do bodu s číslem j. (Např. jedničku spojíme se šestkou a osmičkou.) Viz obrázek, do kterého jsme dokreslili počáteční postavení figurek.

Sami lehce ověříte, že naše pravidla přeskoku jsou taková, že se figurky v tomto obrázku nemohou „předbíhat“. Tedy půjdeme-li od modré figurky ve směru hodinových ručiček, vždy narazíme nejprve na zelenou pak na červenou a nakonec na žlutou figurku. (Řečeno matematicky — při pohybu figurek se nemění cyklické uspořádání.) Odtud již snadno plyne, že lze konečným počtem přeskoků na bodech č. 1 a 4 získat právě čtyři různá pořadí figurek.



4. ÚLOHA

Nechť $P = (P_1, P_2, \ldots, P_{1987})$ je nějaká permutace čísel $1, 2, \ldots, 1987$. Řekneme, že dvojice (i, j) je skokem v P, jestliže $i < j$ a $P_i < P_j$. Zkoumejme nyní, jak se mění počet skoků při prohození dvojice čísel v permutaci P. Předpokládejme, že $l < k$. Označme nově získanou permutaci R. Rozeberme následující možnosti a) $i < l$, b) $k < j$, c) $l < i < j < k$, d) $l = i < j < k$, e) $l < i < j = k$, f) $l = i < j = k$. Rozmyslete si, že to jsou skutečně všechny možnosti. Nyní snadno nahlédneme, že dvojice (i, j), která splňuje a), b) nebo c) je skokem v P právě tehdy, když není skokem v R. Dvojic splňujících d) je stejně jako dvojic splňujících e) a to $k - l - 1$. Dvojice, splňující f) je pouze jedna. Celkem tedy máme lichý počet dvojic (i, j), pro které platí (i, j) je skokem v P právě když není skokem v R. Vidíme tedy, že při prohození dvojice čísel se počet skoků změní o liché číslo. Naše operace se však skládá ze dvou takových prohození. Počet skoků po provedení naší operace se tedy změní o sudé číslo. Počet skoků v permutaci $1, 2, \ldots, 1987$ je $\frac{1987 \cdot 1986}{2}$, tedy lichý. V permutaci $1987, \ldots, 2, 1$ není žádný skok. Odtud je zřejmé, že prováděním popsané operace nikdy nedosáhneme kýženého pořadí.

5. ÚLOHA

Důkaz provedeme sporem, předpokládejme, že je to vždy možno. Konfiguraci čísel ve čtverci přiřaďme čtveřici s_1, s_2, s_3, s_4, kde s_i je součet v i-tém sloupci. Operace přičtení jedničky ve čtverci 3×3 resp. 2×2 odpovídá přičtení trojky resp. dvojky nějakým třem resp. dvěma číslům vedle sebe v této čtveřici. Tedy podle našeho předpokladu je možné těmito operacemi dojít od čtveřice (1,0,0,0) ke čtveřici v níž jsou všechna čísla dělitelná třemi. Zřejmě stačí uvažovat pouze operaci přičtení dvojky ke dvěma sousedním číslům. Nechť k krát jsme to provedli na 1. a 2. pozici, l krát na 2. a 3. pozici a m krát na 3. a 4. pozici. Nyní dokažte, že m, l i k musí být dělitelná třemi (na druhé, třetí i čtvrté pozici musí zůstat číslo dělitelné trojkou). To je ale spor, protože pak na první pozici dostaneme číslo, které dává po dělení třemi zbytek jedna.