4. série

Teorie funkcí

1. ÚLOHA

Dokažte, že pro každé kladné reálné číslo x a přirozené číslo n platí nerovnost $x(1 - x^n)(n+1)^{\frac{n+1}{n}} \leq n$.

2. ÚLOHA

Najděte největší řešení rovnice $2^{\sqrt{x}-8} = 3^{\sqrt[3]{x}-4}$.

3. ÚLOHA

Dokažte, že pro všechna reálná čísla x a přirozená čísla n platí $\sin^{2n} x + \cos^{2n} x \geq 2^{1-n} \cos x$.

4. ÚLOHA

Sečtěte $\sum_{k=1}^{n} \cos k^2 x \sin kx$ (n je přirozené číslo, x je reálný parametr).

5. ÚLOHA

Dokažte, že všechna řešení rovnice $(x+1)^3 = \frac{2 \sin x}{x}$ jsou menší než $\frac{2}{3}$.

Řešení 4. série

1. ÚLOHA

Indukcí lze snadno odvodit nerovnost $(1+z)^{n+1} \geq 1+(n+1)z$ (n přirozené, $z > -1$). Položme $z = x(n+1)^{\frac{1}{n}} - 1$. Dostáváme $x^{n+1}(n+1)^{\frac{n+1}{n}} \geq 1+(n+1)(x(n+1)^{\frac{1}{n}} - 1)$. Odtud již lehce plyne požadovaná nerovnost.

2. ÚLOHA

Hledejme x ve tvaru y^6. Máme $2^{y^3-8} = 3^{y^2-4}$. Tato rovnice bude zřejmě splněna, když $y^3 - 8 = y^2 - 4 = 0$, tj. $y = 2$, $x = 64$. To však neznamená, že daná rovnice nemůže mít jiná řešení! Ukážeme, že 64 je největší řešení dané rovnice. Buď $z > 64$. Označme $t = z^{\frac{1}{6}} - 2$. Potom $t > 0$ a $z = (2+t)^6$. Máme $2^{\sqrt{z}-8} = 2^{(2+t)^3-8} = 2^{12t+6t^2+t^3} > 2^{3(4t+t^2)} = 8^{4t+t^2} > 3^{4t+t^2} = 3^{(2+t)^2-4} = 3^{\sqrt[3]{z}-4}$. Tedy z není řešení dané rovnice.

3. ÚLOHA

Činitel $\cos x$ na pravé straně si odmysleme, slouží pouze ke zmatení řešitele. Dokazujme indukcí. Pro $n = 1$ platí. Nechť platí pro $n = k$. Potom $2(\sin^{2k+2} x + \cos^{2k+2} x) = \sin^{2k} x + \cos^{2k} x + (\cos^{2k} x - \sin^{2k} x)(\cos^2 x - \sin^2 x) \geq 2^{1-k}$ (rozlište případy $\sin^2 x \geq \cos^2 x$ a naopak), takže nerovnost platí i pro $n = k+1$.

4. ÚLOHA

Stačí sečíst rovnosti $\frac{1}{2}(\sin(k(k+1)x) - \sin(k(k-1)x)) = \sin k \cos k^2$ přes $k = 1, \dots, n$.

5. ÚLOHA

Nechť x je kladné řešení dané rovnice. Potom

$$1 + 3x < (x+1)^3 = \frac{2\sin x}{x} \leq \frac{2}{x},$$

tedy $(3x-2)(x+1) = x(1 + 3x - \frac{2}{x}) < 0$. Odtud $x < \frac{2}{3}$.

Několik rad a postřehů:

— grafické řešení může sloužit jako pomůcka, nikoli jako seriózní důkaz

— pokud z dané nerovnosti odvodíme správnou nerovnost, neznamená to, že jsme nerovnost dokázali

— je-li y imaginární, y^6 nemusí být imaginární

— je-li $2^a = 3^b$, neznamená to, že $a = b = 0$