3. série
Stereometrie

1. Úloha

Ota, Emil, Ludvík a Vladislav tvrdí: Nechť je dán libovolný čtyřstěn $ABCD$ a uvnitř bod X. Potom šestinásobek součtu vzdáleností bodu X od vrcholů A, B, C, D je menší než p-násobek součtu délek hran daného čtyřstěnu, přičemž p je počet písmen v mém křestním jméně. Rozhodněte a dokažte, kdo má pravdu a kdo lže.

2. Úloha

Určete všechny mnohostěny, jejichž libovolný rovinný řez je bod, úsečka, trojúhelník nebo čtyřúhelník.

3. Úloha

Mějme čtyřstěn $ABCD$. Pata kolmice spuštěné z bodu A na rovinu BCD splývá s průsečíkem výšek v trojúhelníku BCD. Dokažte, že za tohoto předpokladu také pata kolmice spuštěné z bodu D na rovinu ABC splývá s průsečíkem výšek v trojúhelníku ABC.

4. Úloha

Určete všechny konvexní mnohostěny, které splňují následující dvě podmínky:
(i) každá stěna je čtyřúhelník
(ii) z každého vrcholu vychází sudý počet hran.

5. Úloha

V prostoru máme dva různé body A, B. Označme M množinu všech X v prostoru, pro něž $|\sphericalangle AXB| = 120°$. Najděte všechny kružnice, které jsou podmnožinou M.

Řešení 3. série

1. Úloha

Ota a Emil pravdu nemají — protipříklad: $|AB| = |BC| = |AC| = 1\text{mm}$, $|AD| = |BD| = |CD| = 1\text{m}$ a bod X ležící těsně u bodu D.

Dokážeme, že Ludvík a Vlastimil mají pravdu, tj. dokážeme, že platí:

$$|AX| + |BX| + |CX| + |DX| \le |AB| + |BC| + |AC| + |AD| + |BD| + |CD|\,. \tag{1}$$

Lemma 1. Leží-li bod S uvnitř trojúhelníka PQR, pak platí $|PS| + |QS| \le |PR| + |QR|$.

Důkaz: Nechť T je průsečík PS a QR. Z trojúhelníkové nerovnoti plyne, že $|QS| \le |QT| + |ST|$ a $|PT| \le |PR| + |RT|$, tedy: $|PS| + |QS| \le |PS| + |QT| + |ST| \le |PT| + |QT| \le |PR| + |RT| + |QT| \le |PR| + |QR|$. Označme si Y průsečík roviny ABX s přímkou CD. Z lemmatu a trojúhelníkové nerovnosti plyne:

$$|AX| + |BX| \le |AY| + |BY| \le |AC| + |CY| + |BD| + |DY| \le |AC| + |BD| + |CD|\,. \tag{2}$$

Analogicky ukážeme, že platí:

$$|CX| + |DX| \le |AD| + |BC| + |AB|\,. \tag{3}$$

Z (2) a (3) vyplývá, že platí (1). Q.E.D.

2. Úloha

Je jasné, že hledané mnohostěny musí být konvexní. Vezměme libovolný konvexní mnohostěn vyhovující zadání. Nechť má čtyřúhelníkovou stranu. Označme si ji $ABCD$. Je-li P (resp. Q) střed úsečky AB (resp. BC), pak mezi rovinami procházejícími body P a Q vždy najdeme alespoň jednu rovinu, jejíž řez naším mnohostěnem je pětiúhelník. Z toho plyne, že žádná stěna nemůže být čtyřúhelník. Protože žádná stěna nemůže mít ani víc než čtyři vrcholy, je každá stěna trojúhelník. Z žádného vrcholu nesmí vycházet více než čtyři hrany. Nechť z vrcholu A vychází čtyři hrany a nechť A je spojen hranou s nějakým jiným vrcholem B. Protože z bodu vychází alespoň tři hrany, mezi rovinami rovnoběžnými s přímkou AB vždy najdeme aspoň jednu, jejíž řez naším mnohostěnem je pětiúhelník. Z toho vyplývá, že z každého vrcholu vycházejí právě tři hrany. Mnohostěn, který těmto podmínkám vyhovuje (strany trojúhelníky, z každého vrcholu právě tři strany) je jedině čtyřstěn.

3. Úloha

Úlohu vyřešíme, jestliže dokážeme následující ekvivalenci. Pata výšky z A na BCD splývá s průsečíkem výšek trojúhelníka BCD právě tehdy, když $AB \perp CD$, $AC \perp BD$,

$AD \perp BC$. (Pozor! AB a CD jsou mimobežky a kolmost mezi nimi můžeme chápat třeba takto: $PQ \perp RS$, jestliže existuje rovina ρ taková, že $PQ \subset \rho$ a $RS \perp \rho$.)

Důkaz: Označme si A' kolmý průmět bodu A do roviny BCD.

a) Implikace zleva doprava: Nechť B' je průsečík přímek BA' a CD. A' je průsečík výšek trojúhelníka BCD, takže $A'B' \perp CD$ a tedy i $AB' \perp CD$. Z toho plyne $AB \perp CD$. Analogicky dokážeme, že $AC \perp BD$ a $AD \perp BC$.

b) Implikace zprava doleva: $A'A \perp CD$ a $AB \perp CD$ implikuje $BA' \perp CD$. $AC \perp BD$ a $A'A \perp BD$ implikuje $CA' \perp BD$, tedy A' je průsečík výšek trojúhelníka BCD.

4. ÚLOHA

Mějme libovolný hledaný mnohostěn. Označme si S počet jeho hran, V počet jeho vrcholů, H počet jeho hran. Protože hledaný mnohostěn je konvexní, platí pro něj Eulerova formule: $S+V = H+2$. Jestliže každá stěna je čtyřúhelník, pak platí $2S = H$. Z každého vrcholu mnohostěnu vycházejí vždy alespoň tři hrany. Má-li z každého vrcholu vycházet sudý počet hran, pak z každého vrcholu vycházejí aspoň čtyři hrany, tedy každý vrchol náleží alespoň čtyřem různým stěnám a tudíž platí vztah $V \leq S$. Celkově dostáváme $h + 2 = S + V \leq 2S = h$, což nemůže platit, a tak žádný mnohostěn daných vlastností neexistuje.

5. ÚLOHA

Množina M vznikne rotací kruhového oblouku o poloměru $\frac{\sqrt{3}}{3}|AB|$ s krajními body A, B kolem přímky AB. Nechť k je kružnice se středem S taková, že $k \subset M$. Rovinu, ve které leží kružnice k, označme ρ. Nechť p je přímka procházející S, kolmá na rovinu ρ, a proto přímky p a AB mají aspoň jeden společný bod, který si označíme R. Všechny body kružnice k mají od R stejnou vzdálenost, a proto k je podmnožinou nějaké koule κ o středu R. Nechť Q je množina bodů vzniklých rotací kružnice k kolem přímky AB. Pak $Q \subset \kappa$ a zároveň $Q \subset M$, tedy $Q \subset \kappa \cap M$. Pokud by rovina ρ nebyla kolmá na AB, čili $Q \neq k$, pak by M muselo obsahovat nějakou kulovou plochu, a tedy M by byla totožná s κ, což se však nemůže stát. Tedy pokud $k \subset M$, pak rovina kružnice k je kolmá na přímku AB.