1. série

Planimetrie

Vehiklem rozumíme rovnoramenný trojúhelník ABC o základně AB. Výšku v_c značíme v. Symbolů c i v budeme užívat i pro délky strany c (resp. výšky v). Vehikl se pohybuje přískoky po závodní dráze a nabývá postupně poloh $A_0B_0C_0$, $A_1B_1C_1$, ... , $A_nB_nC_n$. Závodní dráhou je mezikruží M včetně hraničních kružnic: vnitřní K_i se středem O a poloměrem R_i a vnější K_e se středem O a poloměrem R_e. V každé poloze $(j = 0, \ldots, n)$ je trojúhelník $A_jB_jC_j$ podmnožinou mezikruží M. Přískok je shodné zobrazení, jímž se vehikl přesune z polohy $A_jB_jC_j$ do polohy $A_{j+1}B_{j+1}C_{j+1}$ $(j = 0, \ldots, n-1)$, přičemž C_j musí být bod trojúhelníka $A_{j+1}B_{j+1}C_{j+1}$ ležící na výšce v_{j+1} (mezní případy $C_j = C_{j+1}$ a $C_j =$pata výšky v_{j+1} jsou povoleny). Polohu vehiklu udáváme v polárních souřadnicích vrcholu C, to znamená, že $C_j = [r_j, \alpha_j]$. (Pro $j \geq 1$ je poloha bodů B_j,A_j určena jednoznačně body C_j a C_{j-1}), r_j je vzdálenost $|C_jO|$, α_j je velikost úhlu $\sphericalangle C_0OC_j$. Musí být $0° \leq \alpha_{j+1} - \alpha_j \leq 180°$. Závodník je v cíli, když $\alpha_n \geq 360°$.

1. ÚLOHA

V závislosti na parametrech R_i, R_e, r napište soustavu nerovností o proměnných v, c, jejíž splnění je nutné a postačující k tomu, aby existoval vehikl ABC o základně délky c, výšce délky v, vzdálenosti $|CO| = r$ a umístěný do mezikruží M.

2. ÚLOHA

Zjistěte, zda existuje volba R_i, R_e, r, v, c tak, aby ve startovní poloze byl vehikl uvnitř mezikruží, nedotýkal se kružnic K_i, K_e, a přesto nebyl schopen dokončit závod (tj. po každé možné sérii přeskoků je $\alpha_n < 360°$).

3. ÚLOHA

Navrhněte soustavu nerovností v závislosti na parametrech R_i, R_e, v, c o proměnných r_j,α_j,r_{j+1},α_{j+1} (j pevné), jejíž splnění je ekvivalentní neporušení pravidel při přískoku $A_jB_jC_j \rightarrow A_{j+1}B_{j+1}C_{j+1}$.

4. ÚLOHA

Závod jezdců: Navrhněte v mezích pravidel posloupnost $C_0, C_1, \ldots, C_n$ tak, aby C_n bylo v cíli a n bylo co nejmenší (ve srovnání s ostatními závodníky — účastníky semináře). $R_i = 1$,$R_e = 5$,$r_0 = 3$,$c = 2$,$v = 3$. Při rovném n vítězí větší α_n.

5. ÚLOHA

Závod konstruktérů: Pravidla stejná jako u závodu jezdců, ale smíte si sami zvolit parametry c,v.

Řešení 1. série

1. ÚLOHA

Označme ještě P patu výšky v, $a = \sqrt{v^2 + \frac{c^2}{4}}$ rameno trojúhelníka ABC, γ úhel při vrcholu C. Máme $\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{v}{a}$, $\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{c}{2a}$, $\cos\gamma = \frac{v^2 - \frac{c^2}{4}}{a^2}$, $\sin\gamma = \frac{vc}{a^2}$. Omezíme se na nejzajímavější případ $R_i < r < R_e$. Rozlišíme čtyři možnosti podle polohy trojúhelníka ABC (tzv. vehiklu):

1) Jestliže úsečka AB protíná úsečku CO nebo $a < r - R_i$, potom lze vehikl pootočit tak, že $|\sphericalangle OCP| = 0°$. V této poloze lze umístit vehikl, jsou-li splněny nerovnosti: $R_i + v < r$, $D < R_E$, kde $D = \sqrt{\frac{c^2}{4} + (r-v)^2}$.

2) Jestliže úsečka AB protíná polopřímku OC za bodem C, lze vehiklem pootočit tak, aby $|\sphericalangle OCP| = 180°$. V této poloze lze vehikl umístit, je-li splněna nerovnost: $D < R_e$, kde $D = \sqrt{\frac{c^2}{4} + (r+v)^2}$.

3) Jestliže $r - R_i \le a \le \sqrt{r^2 - {R_i}^2}$ a polopřímka OC neprotíná úsečku AB, potom lze vehikl pootočit tak, že jeden z vrcholů leží na vnitřní kružnici. V této poloze lze vehikl umístit při splnění nerovností: $r - R_i \le a \le \sqrt{r^2 - {R_i}^2}$, $R_e \le D$, kde $D = r^2 + a^2 - 2ar\sqrt{\cos\mu\cos\gamma - \sin\mu\sin\gamma}$, $\cos\mu = \frac{r^2 + a^2 - {R_i}^2}{2ra}$, $\sin\mu = \sqrt{1 - \cos^2\mu}$ (po dosazení dostáváme výraz obsahující pouze r, R_e, R_i, v, c; žádné goniometrické funkce).

4) Jestliže $\sqrt{r^2 - {R_i}^2} < a$ a úsečka AB neprotíná polopřímku OC, potom lze vehikl pootočit tak, že jedno z ramen se opírá o vnitřní kružnici. V této poloze lze umístit vehikl, je-li splněna soustava nerovností: $\sqrt{r^2 - {R_i}^2} < a$, $D \le R_e$, kde za D dosadíme jako v předchozím případě, avšak funkce úhlu μ (v němž zajisté čtenář poznal úhel $\sphericalangle OCA$ nebo $\sphericalangle OCB$ podle polohy vehiklu) vyjádříme pomocí vzorců $\sin\mu = \frac{R_i}{r}$, $\cos\mu = \sqrt{1 - \cos^2\mu}$. Vehikl lze umístit do „závodní dráhy“, právě je-li splněna jedna ze soustav nerovností, které jsou napsány v bodech 1), 2), 3) a 4).

2. ÚLOHA

Vyberme libovolnou rozumnou volbu R_i, R_e, v a c. Sestrojíme sečnu vnější kružnice, která je kratší než c. Umístíme-li vrchol C do úseku ohraničeného touto sečnou a kratším z vyťatých oblouků, již se z tohoto úseku žádným přískokem nemůže dostat a nemůže tudíž dokončit závod. Stačí tedy volit r dostatečně velké vzhledem k ostatnímu.

3. ÚLOHA

Budeme se zabývat pouze zajímavým případem $C_{j+1} \ne C_j$ (jinak je zadání trochu nepřesné, neboť poloha vehiklu po přískoku není jednoznačně určena). V označení prvků trojúhelníka $A_{j+1}B_{j+1}C_{j+1}$ budeme vynechávat index ${}_{j+1}$. Dále budeme předpokládat, že vehikl se pohybuje tak, že OA je menší než OB. Označíme $\xi = |\sphericalangle OCP| = |\sphericalangle OCC_j|$,

$\delta = |\sphericalangle C_j O C_{j+1}| = \alpha_{j+1} - \alpha_j$. Spočteme vzdálenosti:

$$\begin{aligned}|OA| &= \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar(\cos\xi\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\xi\sin\frac{\gamma}{2})},\\ |OB| &= \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar(\cos\xi\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\xi\sin\frac{\gamma}{2})}\end{aligned}.$$

Funkce poloviny γ známe již z prvního příkladu. K výpočtu ξ použijeme sinové věty. Dostáváme $t = \tan\xi = \frac{r_j \sin\delta}{r - r_j\cos\delta}$, $\cos\xi = \frac{1}{t^2+1}$, $\sin\xi = t\cos\xi$. Dále si spočítáme, který bod na přímce AB je nejblíže ke středu O. Tento bod je od P vzdálen $r\sin\xi$ a od O $r\cos\xi - v$. Který bod na přímce AC je nejblíže středu? Od vrcholu C je vzdálen $r\cos\mu$ a od středu O $r\sin\mu$, kde $\cos\mu = \cos\xi\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\xi\sin\frac{\gamma}{2}$ a $\sin\mu = \sin\xi\cos\frac{\gamma}{2} - \cos\xi\sin\frac{\gamma}{2}$.

Závěr: Musí být splněny následující podmínky:

(1) Podmínka délky přískoku: $\frac{r_j \sin\delta}{\sin\xi} \le v$
(2) Podmínka bodu A: $|OA| \ge R_i$
(3) Podmínka bodu B: $|OB| \le R_e$
(4) Podmínka bodu C: $R_i \le r \le R_e$
(5) Podmínka strany AB: $r\cos\xi - v \ge R_i$ nebo $r\sin\xi > \frac{c}{2}$
(6) Podmínka strany AC: $r\sin\mu \ge R_i$ nebo $r\cos\mu > a$.

4. ÚLOHA

Nejlépe si vedli jezdci, kteří umístili P_{j+1} do C_j a stranou $C_{j+1}A_{j+1}$ se dotkli vnitřní kružnice. Dosáhli $n = 5$ a $\alpha_5 = 421°$.

5. ÚLOHA

Strategie podobná jako v předchozím případě. Základnu volíme co nejmenší a výšku co nejdelší. Minimální n vyjde 3. Hodnota α_3 závisí na drzosti konstruktéra.