2. série

Funkcionální rovnice, nerovnice a soustavy

1. ÚLOHA

Najděte všechna řešení soustavy funkcionální rovnice a nerovnice

$$f(2x+1) = f(x)$$
$$f(x) - f(y) \leq |x - y|$$

na intervalu $(-2, 2)$.

Poznámka: Obecná definice pojmu funkcionální rovnice a jejího řešení je dosti složitá. Proto budeme zadání úloh chápat intuitivně. Např. zadání 1. úlohy znamená: Najděte všechny funkce $f : (-2, 2) \to \mathbb{R}$ takové, že platí 1) pro všechna $x \in (-2, 2)$ je splněna rovnost $f(2x+1) = f(x)$ a 2) pro všechna $x \in (-2, 2)$ a $y \in (-2, 2)$ je splněna nerovnost $f(x) - f(y) \leq |x - y|$. Neznámá je funkce!

2. ÚLOHA

Pro každé celé číslo n najděte alespoň jedno nekonstantní řešení funkcionální rovnice $f(2x) = 2^n \cos x f(x)$ (argument u cos je pouze x) na intervalu $(0, \infty)$.

3. ÚLOHA

Najděte všechna řešení soustavy

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$$
$$|f(x)| \leq x^2 + 1$$

na množině reálných čísel.

4. ÚLOHA

Nechť g je funkce na intervalu $(0, 1)$ nabývající pouze kladných konečných hodnot. Najděte všechna řešení nerovnice

$$|f(x) - f(y)| \leq g(x)(y^2 - x^2)^2$$

na $(0, 1)$.

5. ÚLOHA

Najděte všechna řešení funkcionální rovnice

$$f(1 + xy) = f(x) + 2x(1 + xy - x)$$

na $(0, \infty) \cup (-\infty, 0)$.

Nezapomeňte: Ve všech úlohách hledáte neznáme funkce f, nikoliv speciální hodnoty x a y.

Řešení 2. série

1. ÚLOHA

Dokážeme, že řešeními jsou pouze konstantní funkce. Zvolme $x \in (-2,2)$. Položme $x_n = 2^{-n}(x - 2^n + 1)$. Potom $x_0 = x$, $2x_{n+1} + 1 = x_n$, $f(x_{n+1}) = f(2x_{n+1} + 1) = f(x_n)$. Indukcí $f(x_n) = f(x)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Máme $|f(x) - f(-1)| \leq |x_n - (-1)| = |2^{-n}x + 2^{-n}| \leq 5 \cdot 2^{-n}$. Jelikož $n \in \mathbb{N}$ bylo libovolné, je $f(x) = f(-1)$.

2. ÚLOHA

Hledejme f ve tvaru $f(x) = g(x) \sin x$. Dostáváme $g(2x) = 2^{n-1} g(x)$, odkud nás napadne $g(x) = x^{n-1}$, $f(x) = x^{n-1} \sin x$.

3. ÚLOHA

Funkce $f(x) = x^2$ je řešení. Nechť h je řešení, označme $g = h - x^2$. Potom máme $g(x) + g(y) = g(x+y)$, $g(x) \leq 1$ a po dosazení $x = y = 0$ do první rovnice získáme $g(0) = 0$. Nechť $z \in \mathbb{R}$, $g(z) \neq 0$. Potom najdeme celé číslo n tak, že $g(nz) = ng(z) > 1$, což je spor. Tedy $g = 0$, $h = x^2$.

4. ÚLOHA

Dokážeme sporem, že f je konstantní. Nechť $f(x) \neq f(y)$. Buď $c = |\frac{f(x)-f(y)}{x-y}|$. Najdeme indukcí posloupnost $\{a_n\}$ nul a jedniček tak, že $|\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}| \geq c$, kde $x_n = x + (2^{-1}a_1 + 2^{-2}a_2 + \cdots + 2^{-n}a_n)(y-x)$, $y_n = x_n + 2^{-n}(y-x)$. Položme $z = x + (2^{-1}a_1 + 2^{-2}a_2 + \ldots)(y-x)$. Potom $|f(u_n) - f(z)| \geq c|u_n - z|$ pro některé $u_n \in \{x_n, y_n\}$ a pro dostatečně velká n je $g(z)|u_n - z|(u_n + z)^2 \leq c$, takže $|f(u_n) - f(z)| \geq g(z)({u_n}^2 - z^2)^2$.

5. ÚLOHA

Položme $y = \frac{x+h-1}{x}$. Potom $f(x+h) = f(x) + 2xh$, tedy $f(x+2h) = f((x+h)+h) = f(x) + 4xh + 2h^2$, avšak také $f(x + (2h)) = f(x) + 4xh$. Dostáváme $2h^2 = 0$, spor.